

**INTER-AMERICAN TROPICAL TUNA COMMISSION**  
**COMISION INTERAMERICANA DEL ATUN TROPICAL**

Bulletin — Boletín

Vol. 13, No. 3

(Completing the Volume)

(Completando el Volumen)

**A GENERALIZED STOCK PRODUCTION MODEL**

**UN MODELO GENERALIZADO  
DE LA PRODUCCION DEL STOCK**

by — por

**Jerome J. Pella and/y Patrick K. Tomlinson**

La Jolla, California

1969

The Inter-American Tropical Tuna Commission was established by a Convention between the Governments of the Republic of Costa Rica and the United States of America. The Convention entered into force in 1950. The Commission's duties under the Convention (Art. II, 1.) include the conduct of:

"Investigations concerning the abundance, biology, biometry, and ecology of yellowfin (*Neothunnus*) and skipjack (*Katsuwonus*) tuna in the waters of the eastern Pacific Ocean . . . and the kinds of fishes commonly used as bait in the tuna fisheries . . . and of other kinds of fish taken by tuna fishing vessels; and the effects of natural factors and human activities on the abundance of the populations of fishes supporting all of these fisheries."

and to

"Recommend from time to time, on the basis of scientific investigations, proposals for joint action . . . designed to keep populations of fishes covered by this Convention at those levels of abundance which will permit the maximum sustained catch."

The Commission initiated its investigations, which are conducted by a permanent international scientific staff, in 1951.

Provision is made in the Convention (Art. V, 3.) for:

"Any government, whose nationals participate in the fisheries covered by this Convention . . . Upon receiving the unanimous consent of the High Contracting Parties . . ."

to adhere. Under this provision the Republic of Panama adhered in 1953, the United Mexican States in 1964, and Canada in 1968.

Commissioners serving at the time of publication are:

**CANADA**

A. W. H. Needler  
E. B. Young

**COSTA RICA**

José L. Cardona-Cooper  
Fernando Flores  
Milton H. López  
Victor Nigro

La Comisión Interamericana del Atún Tropical fue establecida por una Convención entre los Gobiernos de la República de Costa Rica y los Estados Unidos de América. La Convención entró en vigencia en el año de 1950. Las obligaciones de la Comisión bajo la Convención (Art. II, 1.) incluyen:

"Llevar a cabo investigaciones sobre la abundancia, biología, biometría y ecología de los atunes de aletas amarillas (*Neothunnus*) y bonitos (*Katsuwonus*) de las aguas del Pacífico Oriental . . . como también de las clases de pescado que generalmente se usan como carnada en la pesca del atún . . . y otras clases de peces que pescan las embarcaciones atuneras; y asimismo sobre los efectos de los factores naturales y de la acción del hombre en la abundancia de las poblaciones de peces que sostengan a todas estas pesquerías."

como también

"Recomendar en su oportunidad, a base de investigaciones científicas, la acción conjunta necesaria . . . para fines de mantener las poblaciones de peces que abarca esta Convención en el nivel de abundancia que permita la pesca máxima constante."

La Comisión inició sus investigaciones, las cuales son conducidas por un personal científico internacional permanente, en 1951.

Existe una disposición en la Convención (Art. V, 3.) por medio de la cual:

"Todo gobierno cuyos nacionales tomen parte en las operaciones de pesca que abarca esta Convención . . . Al recibir el consentimiento unánime de las Altas Partes Contratantes . . ."

puede adherirse. Bajo esta cláusula la República de Panamá se adhirió en 1953, los Estados Unidos Mexicanos en 1964, y Canadá en 1968.

Los Delegados vigentes en la presente edición son:

**MEXICO**

Alejandro Cervantes D.  
Juan Luis Cifuentes L.  
María Emilia Téllez B.  
Amin Zarur M.

**PANAMA**

Dora de Lanzner  
Carlos A. López-Guevara  
Juan L. de Obarrio  
Camilo Quintero

**UNITED STATES OF AMERICA**

John G. Driscoll, Jr.  
William H. Holmstrom  
J. L. McHugh

*Director of Investigations — Director de Investigaciones*  
JAMES JOSEPH

*Headquarters and Main Laboratory — Oficina y Laboratorio Principal*  
c/o SCRIPPS INSTITUTION OF OCEANOGRAPHY  
LA JOLLA, CALIFORNIA, U. S. A.

Price per copy — \$1.00 — Precio por copia

An important phase of the scientific work of the **Inter-American Tropical Tuna Commission** is the publication of research results. The Commission publishes studies by its staff and by cooperating scientists in its *Bulletin* series, in both English and Spanish.

The Commission also publishes, in these languages, the Annual Report of the Inter-American Tropical Tuna Commission. In the Annual Report are reported the actions of the Commission, a review of the year's work carried out under the direction of the Commission, a roster of scientific staff, and a listing of all publications issued during the preceding calendar year.

Bulletins, Annual Reports, and papers published by the staff in other journals are distributed on an exchange basis to a selected international list of governmental organizations, official libraries and laboratories. Other organizations or persons may purchase Commission publications at the prices indicated. Remittances must be in advance, payable in U. S. funds to the order of the Inter-American Tropical Tuna Commission. Requests for these publications, as well as for a listing of all publications, may be directed to The Editor.

Some recent publications in the *Bulletin* series are:

Vol. 12, No. 7 — \$1.00

Distribution of skipjack in the Pacific Ocean, based on records of incidental catches by the Japanese longline tuna fishery, *by* Makoto Peter Miyake. La Jolla, 1968.

Distribución del barrilete en el Océano Pacífico, basada en los registros de la pesca japonesa palangrera de atunes, según las capturas incidentales, *por* Makoto Peter Miyake. La Jolla, 1968.

Vol. 13, No. 1 — \$4.00

Population dynamics of the skipjack tuna (*Katsuwonus pelamis*) of the eastern Pacific Ocean, *by* James Joseph and Thomas P. Calkins. La Jolla, 1969.

Dinámica de las poblaciones del barrilete (*Katsuwonus pelamis*) del Océano Pacífico oriental, *por* James Joseph y Thomas P. Calkins. La Jolla, 1969.

Vol. 13, No. 2 — \$2.00

The Japanese longline fishery for tunas and billfishes in the eastern Pacific Ocean east of 130°W, 1964-1966, *by* Susumu Kume and James Joseph. La Jolla, 1969.

La pesca japonesa con palangre de atunes y peces espada en el Océano Pacífico oriental al este de los 130°W, 1964-1966, *por* Susumu Kume y James Joseph. La Jolla, 1969.

*Editor:*

CLIFFORD L. PETERSON

Inter-American Tropical Tuna Commission  
Comisión Interamericana del Atún Tropical  
c/o Scripps Institution of Oceanography  
La Jolla, California, U. S. A.

---

Price per copy — \$1.00 — Precio por copia

Una fase importante del trabajo científico de la **Comisión Interamericana del Atún Tropical** es la publicación de los resultados de sus investigaciones. La Comisión publica tanto en inglés como en español, los estudios efectuados por su personal y por científicos que cooperan en su serie de *Boletines*.

La Comisión también publica en estos idiomas, el Informe Anual de la Comisión Interamericana del Atún Tropical. En el Informe Anual, se participa sobre las acciones de la Comisión; una revisión del trabajo llevado a cabo durante el año bajo la dirección de la Comisión; un registro del personal científico y una lista de todas las publicaciones editadas durante el año calendario anterior.

Los Boletines, Informes Anuales y artículos publicados por el personal en otras revistas, se distribuyen, a base de intercambio, a una lista internacional escogida de organizaciones gubernamentales, bibliotecas oficiales y laboratorios. Otras organizaciones o personas pueden comprar las publicaciones de la Comisión a los precios indicados. La remesa debe hacerse por adelantado en dólares a nombre de la Comisión Interamericana del Atún Tropical. Los pedidos para estas publicaciones, lo mismo que de la lista de todas las ediciones, deben ser dirigidos al Editor.

Las publicaciones recientes en la serie de *Boletines* son:



# **INTER-AMERICAN TROPICAL TUNA COMMISSION COMISION INTERAMERICANA DEL ATUN TROPICAL**

Bulletin — Boletín

Vol. 13, No. 3

(Completing the Volume)

(Completando el Volumen)

## **A GENERALIZED STOCK PRODUCTION MODEL**

### **UN MODELO GENERALIZADO DE LA PRODUCCION DEL STOCK**

by — por

**Jerome J. Pella and/y Patrick K. Tomlinson**

La Jolla, California

1969

## CONTENTS — INDICE

### ENGLISH VERSION — VERSION EN INGLES

	Page
ABSTRACT.....	421
ACKNOWLEDGMENTS.....	421
INTRODUCTION.....	421
DESCRIPTION OF THE MODEL.....	422
ASSUMPTIONS.....	425
Random variation in production and catching rates.....	425
Equilibrium size and age structure.....	426
Other time lags.....	427
Closed population.....	427
Constant catchability.....	427
PARAMETER ESTIMATION.....	427
Linearization approach.....	428
Minimum S—criterion.....	435
Searching routine.....	436
Data for fitting.....	439
EXAMPLE PROBLEMS.....	440
Guppies.....	440
Yellowfin tuna of the eastern Pacific Ocean.....	443
CONCLUSION.....	444
FIGURES — FIGURAS.....	446
TABLES — TABLAS.....	454

### VERSION EN ESPAÑOL — SPANISH VERSION

	Página
EXTRACTO.....	459
AGRADECIMIENTOS.....	459
INTRODUCCION.....	459
DESCRIPCION DEL MODELO.....	460
SUPOSICIONES.....	464
Variación aleatoria en las tasas de producción y captura.....	464
Tamaño equilibrado y estructura de la edad.....	464
Otros desfases cronológicos.....	465
Población cerrada.....	466
Capturabilidad constante.....	466
ESTIMACION DE PARAMETROS.....	466
Enfoque de linealización.....	466
Criterio del mínimo de S.....	474
Rutina exploratoria.....	475
Datos para el ajuste.....	479
EJEMPLOS DE PROBLEMAS.....	480
Gambusinos.....	480
Atún aleta amarilla del Océano Pacífico oriental.....	483
CONCLUSION.....	484
LITERATURE CITED — BIBLIOGRAFIA CITADA.....	486
APPENDIX — APENDICE.....	488

# A GENERALIZED STOCK PRODUCTION MODEL

by

Jerome J. Pella and Patrick K. Tomlinson<sup>1</sup>

## ABSTRACT

A generalization of the Schaefer model is described which allows for skewness of the stock production curve relating production with population size. A fitting scheme is developed by which the stock production curve can be determined for an exploited population using only the catch and effort history of the fishery. Because of the extensive computations required in estimating the parameters, a computer program for use in the calculations is included. Examples are provided which demonstrate the suitability of the model for describing the dynamics of certain fish populations. In particular the catch and effort history for the yellowfin tuna fishery in the eastern Pacific Ocean is analyzed.

## ACKNOWLEDGMENTS

We are grateful to Mr. John A. Gulland, Food and Agriculture Organization of the United Nations, Dr. James Joseph, Inter-American Tropical Tuna Commission, and Dr. M. B. Schaefer, Institute of Marine Resources of the University of California, for their comments on the manuscript. We owe Dr. G. J. Paulik, College of Fisheries, University of Washington, a special debt of gratitude for his extensive and constructive review.

## INTRODUCTION

Stock production models represent an attempt by fisheries biologists to assess directly the relationship between the sustainable yield from a stock (or population) and the stock size. The earliest analytic approach of this type is due to Graham (1935), who utilized the logistic model to estimate the yield which might be expected from fish stocks of the North Sea. In the estimation procedure he adopted it is necessary that the fishery be stable at least once in its history.

Feller (1940) developed a modified form of the logistic model to describe the growth of some colonies of Infusoria from experiments by Gause. In these experiments, as described by Feller, portions of colonies were being continuously removed from the cultures. He developed estimators of the parameters of the logistic model, assuming the rates of removal were known and that periods occurred when the Infusoria colonies were in equilibrium with the rates of removal.

Schaefer (1954) independently developed essentially the same model as that of Feller (now commonly referred to in fisheries applications as

<sup>1</sup>Operations Research Branch, California Department of Fish and Game, Terminal Island, California.

the Schaefer model) and described a technique to estimate the logistic parameters under non-equilibrium exploitation conditions. The information required is the catch and effort history for the stock, together with an independent estimate of the catchability coefficient. Schaefer (1957) extended his estimation scheme so that the catchability coefficient could also be estimated from the catch and effort history.

The logistic assumption is justly criticized, since it results in the curve of equilibrium yield as related to stock size (hereafter called the stock production curve) having its maximum at a stock size of exactly one-half of the theoretical maximum stock size. Ricker (1958) and Schaefer and Beverton (1963), among others, have remarked that for many fish populations the curve may well be skewed, with the maximum occurring at stock sizes less than one-half the maximum stock size. These authors have suggested models which would account for this skewness. Neither of the suggestions is accompanied by an estimation scheme using only the catch and effort history as a data base. The model we now propose permits positive or negative skewness of the stock production curve, and the estimation technique permits us to determine the magnitude and direction of skewness from the catch and effort information alone.

### DESCRIPTION OF THE MODEL

We hypothesize that the stock or population under consideration has at each level  $P$  (which may be measured in terms of either numbers or biomass) a certain potential for growth. If at time  $t$ , the population is at size  $P(t)$ , then we assume that the instantaneous rate of growth of the population at time  $t$  is

$$\frac{dP(t)}{dt} = HP^m(t) - KP(t) \quad (1)$$

where  $H$ ,  $K$ , and  $m$  are constants.  $m \geq 0$ . If the population is limited in growth to an absolute maximum, say  $P_{max}$ , it is easy to show that  $H$  and  $K$  must be negative if  $m > 1$  and positive if  $m < 1$ . We defer the discussion of the case when  $m = 1$  momentarily. Equation (1) is a special case of Bernoulli's equation, and has been previously discussed in a different context (Richards 1959; Chapman 1960).

If the population described by (1) is permitted to increase without external interference, then upon integrating we have

$$P(t) = [P_{max}^{1-m} - (P_{max}^{1-m} - P(0)^{1-m})e^{-K(1-m)t}]^{\frac{1}{1-m}} \quad (2)$$

where

$P(0)$  is the population size at time 0 and



$$P_{max} = \left(\frac{K}{H}\right)^{\frac{1}{m-1}}. \quad (3)$$

On the other hand, if individuals are removed from this population during the interval  $(0, t)$ , the rate of growth will be altered. If a fishery of  $f(t)$  units of effort is operating on the population at time  $t$ , the instantaneous catch rate is

$$\frac{dC(t)}{dt} = qf(t)P(t) \quad (4)$$

provided the units of effort operate independently. The constant  $q$  is called the catchability coefficient in fisheries literature. With a fishery present the instantaneous rate of growth of the population given by (1) is decreased by the instantaneous catch rate at (4), resulting in a modified growth rate

$$\frac{dP(t)}{dt} = HP^m(t) - KP(t) - qf(t)P(t). \quad (5)$$

We may indicate at this juncture that with  $m = 2$ , (5) becomes the Schaefer model

$$\frac{dP(t)}{dt} = k_1P(t)(L - P(t)) - k_2f(t)P(t) \quad (6)$$

(Schaefer 1954, 1957) where our parameters are defined in terms of his notation as

$$\begin{aligned} H &= -k_1 \\ K &= -k_1L \\ q &= k_2. \end{aligned}$$

If the fishing effort remains constant during the time interval  $(0, t)$  the population size at time  $t$  is obtained by integrating (5) so as to obtain

$$P(t) = \left[\frac{H}{K+qf} - \left(\frac{H}{K+qf} - P(0)^{1-m}\right)e^{-(K+qf)(1-m)t}\right]^{\frac{1}{1-m}} \quad (7)$$

where  $f$  is the constant effort. If  $f = (HP(0)^{m-1} - K)/q$ , the population will be in equilibrium with the fishery and  $P = P(0)$  at any time  $t$ . Hereafter we shall drop the variable, time, from the notation to emphasize equilibrium conditions when they occur. If  $f < [(HP(0)^{m-1} - K)/q]$ , the population will increase, and given  $t$  sufficiently large re-establish a new equilibrium at

$$P = \left(\frac{qf + K}{H}\right)^{\frac{1}{m-1}}.$$

If  $[(HP(0)^{m-1} - K)/q] < f < \infty$  and  $0 < m < 1$ , the population will decline and given  $t$  sufficiently large re-establish itself in equilibrium at a positive population size given by the equation above. The implication here

is that the population cannot be fished to extinction. If  $[(HP(0)^{m-1} - K)/q] < f < (-K/q)$ , and  $m > 1$ , the population again given sufficient time will decline to a positive equilibrium population size given by the equation above, but if  $f \geq (-K/q)$ , the population will eventually be fished to extinction. Practically speaking, we have little confidence in prognostications of survival or extinction of a population under extreme exploitation, but this does not diminish the utility of the model.

If the fishery is of such a magnitude as to exactly remove the production by the population, the equilibrium catch per unit of time, say 1 year, is

$$C = HP^m - KP = qfP. \quad (8)$$

We observe from (8) that the equilibrium annual catch,  $C$ , is obtained by the equilibrium effort which maintains the population in equilibrium at size  $P$ .

Our generalized production model results in a family of stock production curves indexed by the parameter  $m$  (Figure 1). The previous objection to the Schaefer model on the basis of skewness of the stock production curve is easily overcome by permitting  $m < 2$ .

Figure 1 includes the curve for  $m = 1$ . The curve plotted there was obtained by interpolating between the curves for  $m = 0.999$  and  $m = 1.001$ , which for practical purposes were indistinguishable. When  $m \rightarrow 1$  and  $P_{max}$  is finite, (1) can be shown to correspond to the Gompertz growth model (see Richards 1959). The coefficients  $H$  and  $K$  in this case become equal and infinitely great. It shall be obvious from the discussion on fitting of the model that this difficulty is circumvented. Clearly we cannot allow  $m = 1$  but may allow  $m \rightarrow 1$ .

The relation between equilibrium yield and effort for any choice of  $m$  can be obtained from (8) and is

$$C = qf \left( \frac{qf + K}{H} \right)^{\frac{1}{m-1}} \quad (9)$$

These curves are skewed in the same direction of the stock production curves for any  $m$  (Figure 2). If the stock production curve is positively skewed, as has been suggested, fishing beyond the maximum of the yield curve at (9) will result in a less pronounced decline in yield than would be predicted by the Schaefer model or models with  $m > 2$ . As  $m$  decreases to 1, the curves intersect the abscissa at  $f = 0$  and  $f = -K/q$ . With  $0 < m < 1$  the curves rise to a maximum and then decline with increasing effort, becoming asymptotic to the abscissa. With  $0 < m < 2$  the curves have an inflection point to the right of the maximum at

$$f = \frac{2K(1 - m)}{qm}.$$

When  $m = 0$ , the curve is asymptotic to the maximum equilibrium catch.

The equilibrium catch per unit of effort, as related to effort, is obtained from (9) by dividing by  $f$  to obtain

$$U = q \left( \frac{qf + K}{H} \right)^{\frac{1}{m-1}} \quad (10)$$

These curves are plotted for a variety of  $m$  values (Figure 3). Some plots of catch per unit of effort against effort in fisheries literature (*e.g.* FAO, 1968) are suggestive of these curves with  $m < 2$ . The curvature of these lines, even with values of  $m$  substantially less than 2, is slight even over broad ranges of effort, so that it is quite difficult to reject the logistic assumption from such plots by a test for linearity unless  $m$  is greatly different from 2, effort has been observed over a wide range, or large numbers of observations are available. Even then simple plots of catch per unit of effort against effort are not strictly appropriate in attempting to discriminate between different  $m$  values since the curves at (10) are under equilibrium conditions. Attempts to adjust the data to equilibrium conditions are generally unsatisfactory for reasons which will later be demonstrated.

Several characteristics of the population model at (5) which are of particular interest in management of a fishery are the maximum of the equilibrium yield curve ( $C_{max}$ ), the population size at which this catch can be taken ( $P_{opt}$ ), and the fishing effort required to maintain the population at this level ( $F_{opt}$ ). In terms of the constants of the model these parameters are as follows:

$$C_{max} = H \left( \frac{K}{mH} \right)^{\frac{m}{m-1}} - K \left( \frac{K}{mH} \right)^{\frac{1}{m-1}} \quad (11)$$

$$P_{opt} = \left( \frac{K}{mH} \right)^{\frac{1}{m-1}} \quad (12)$$

$$F_{opt} = \frac{K(1-m)}{mq} \quad (13)$$

Before commencing with the estimation section, we wish to qualify the conditions under which (5) might validly approximate the dynamics of an exploited fish population. Some of this discussion stems from earlier comments by Schaefer (1957) and Schaefer and Beverton (1963).

## ASSUMPTIONS

### Random variation in production and catching rates

We have delayed the discussion of the problem of random variation in the production and catching rates in (5) to this point. At the present there is little to offer concerning the stochastic nature of the population under exploitation. We recognize the process is not deterministic as we

have so far represented it, so that perhaps a more realistic representation at (5), say, would be

$$\frac{dP(t)}{dt} = \eta_1(t) [HP^m(t) - KP(t)] - \eta_2(t) qf(t)P(t) \quad (14)$$

where  $\eta_1(t)$  and  $\eta_2(t)$  are time-varying random variables. The variable  $\eta_1$  represents random variation in the rate of production from the stock due to changes in recruitment, growth, and natural mortality caused by the environment. Variation in the catching rate due to random changes in availability and catchability is represented by the variable  $\eta_2$ . It is assumed that these variables are distributed so that (8), (9), and (10) represent regression curves, and (5) describes the rate of population change under average environmental and fishing conditions. These sweeping assumptions are necessitated by the difficulty encountered in attempting to develop stochastic analogues of (1). Complete results are available only for the case  $m = 0$ . In this instance, Ahuja and Nash (1965) have developed a stochastic analogue of (1) in terms of a discrete population growth process, derived expressions for the mean and variance of the process, and found maximum likelihood estimators of the parameters for the situation where the population can be counted at points in time while it grows toward the maximum. Some studies on stochastic analogues of the logistic model are available (Feller 1939; Kendall 1949; Bartlett 1957; and Leslie 1958). These investigations demonstrate the difficulty of working with probability analogues of (1) with  $m \neq 0$  since neither of the moments of the logistic process nor probabilistic estimators of the parameters could be determined. The situation would not be simplified by adding dynamic exploitation to the problem.

### Equilibrium size and age structure

The population is assumed to tend to a stable size and age distribution at each level of fishing effort. Thus at each level of effort there is an associated equilibrium population size with a corresponding stable age distribution. During transition periods between changes in fishing effort and concomitant changes in population size, it is assumed that the age structure of the population continuously adjusts to the stable age distribution corresponding to the population levels encountered. We then interpret the differential equation at (5) as describing the growth of the population under average environmental and fishing conditions when the age distribution continuously assumes the stable age distribution with changing population size.

In reality, during transition periods the actual age distribution will lag the stable age distribution in time as the population size changes and hence (5) will not exactly describe the rate of change of population size under the average conditions. However, if the changes in the fishery are gradual, the transient age distribution at any moment should not differ greatly from

the associated stable age distribution so that (5) will give a good approximation to the actual rate of change. Large and rapid changes in effort will result in (5) providing a poorer representation of the actual rate of population change. Species with relatively short generation times should most closely meet these conditions concerning population size and age structure.

#### **Other time lags**

It is assumed that the population size at any instant is the primary determinant of the potential for increase of the population at that instant. Reduced population sizes are favorable for increase, while large population sizes are less favorable. At low population levels the growth rate of individuals may be accelerated, the natural mortality rate may be reduced, and perhaps reproductive success is improved. At high levels, competition for limited quantities of the species' niche can affect some or all of these components of the rate of population growth so as to reduce the potential for increase. The model requires that these primary factors of individual growth, natural mortality, and reproduction respond immediately to changes in the population size, whereas in reality these responses may well be lagged. Reproduction, for instance, is necessarily lagged, and whatever the relationship among population size, age distribution, and reproduction might be for the stock, the reproduction during transition periods should deviate from that at stability. However, if the changes are gradual, this discrepancy is diminished.

#### **Closed population**

The population must be a distinct self-sustaining unit. Significant changes in the population size caused by persistent immigration and/or emigration unrelated to the population size preclude the use of this model to describe the dynamics of the population.

#### **Constant catchability**

Each unit of effort expended should remove, on the average, a constant fraction of the population. When a variable portion of the population is subject to exploitation during the history of the fishery, this assumption will be violated. A developing fishery, expanding over the area inhabited by a population that mixes slowly through its range provides a likely example. Temporal changes in gear efficiency such as have been observed in the yellowfin fishery (Pella 1969) also violate the assumption unless the effort is adjusted to a reference level of efficiency.

### **PARAMETER ESTIMATION**

We introduce in this paper a technique for estimating the parameters of the production model from the catch and effort history of the stock.

We begin by indicating the motivation for our method by describing some techniques based on a linearization approach currently employed for the special case of the Schaefer model. After indicating certain shortcomings of these methods, we describe our technique, which avoids some of the difficulties in the linearization methods.

### Linearization approach

Were we to follow the approach taken by Schaefer (1954, 1957) we would develop a linear model from (5) by integrating over an interval of time, say 1 year, to obtain

$$\Delta P = C_e - C \quad (15)$$

$$\Delta P = \int_{P(0)}^{P(1)} dP(t) \quad (16)$$

$$C_e = H \int_0^1 P^m(t) dt - K \int_0^1 P(t) dt \quad (17)$$

$$C = qf \int_0^1 P(t) dt. \quad (18)$$

We have assumed fishing effort is constant during the year. Equation (15) is a mathematical formulation of the obvious fact that the change in stock size during the year,  $\Delta P$ , is the difference between the equilibrium catch,  $C_e$ , and  $C$ , the actual catch.

Further paralleling the development by Schaefer we would set

$$C_e = H\bar{P}^m - K\bar{P} \quad (19)$$

where

$$\bar{P} = \int_0^1 P(t) dt.$$

A minor objection can be raised here in that equation (19) is only an approximation since in general

$$\int_0^1 P^m(t) dt \neq \left[ \int_0^1 P(t) dt \right]^m. \quad (20)$$

With  $m > 1$  it can be shown by Hölder's inequality that

$$\int_0^1 P^m(t) dt > \left[ \int_0^1 P(t) dt \right]^m \quad (21)$$

except when the stock is in equilibrium. Under equilibrium conditions the two sides of the inequality at (21) are equal.

Therefore, for the Schaefer model

$$\Delta P = C_e - C - B \quad (22)$$

where  $C_e$  is given at (19) with  $m = 2$  and  $B$ , the resultant difference between the equilibrium catch as calculated at (19), minus that given by (17), is nonnegative with its magnitude depending on  $H, K, q, f$ , and  $P(0)$ .

We would then return to (4) and integrate over a year to obtain the catch

$$C = qf\bar{P} \quad (23)$$

$$C = \int_0^1 dC(t) .$$

We let  $\bar{U} = C/f = q\bar{P}$ .  $\bar{U}$  is called the annual catch per unit of effort, and is directly proportional to the average stock size during the year.

We may then estimate  $\bar{P}$  by

$$\hat{\bar{P}} = \bar{U}/q \quad (24)$$

and rewrite (15) as

$$\Delta P = H(\bar{U}/q)^m - K(\bar{U}/q) - C \quad (25)$$

in which the variables  $\bar{U}$  and  $C$  are observable. The change in stock size in (25) remains to be estimated.

Schaefer suggested that the stock size at the beginning of year  $i$ , say  $P_i(0)$ , might be estimated by linearly interpolating between the average stock sizes in years  $i-1$  and  $i$ , viz.,

$$\hat{P}_i(0) = (\bar{P}_{i-1} + \bar{P}_i)/2 . \quad (26)$$

The stock size at the end of the year would be estimated by

$$\hat{P}_i(1) = (\bar{P}_i + \bar{P}_{i+1})/2 . \quad (27)$$

The difference between these two estimates can be used to estimate the change in stock size during the year

$$\Delta \hat{P}_i = (\bar{P}_{i+1} - \bar{P}_{i-1})/2 . \quad (28)$$

In terms of the observable catch per effort in these years we would estimate the change in stock size as

$$\Delta \hat{P}_i = (\bar{U}_{i+1} - \bar{U}_{i-1})/2q = \Delta U_i/q . \quad (29)$$

The substitution of this latter expression into (25) for the change in stock size, the addition of appropriate subscripts to identify the year, and some manipulation provides us with the linear model

$$\Delta U_i = \frac{H}{q^{m-1}} \bar{U}_i^m - K\bar{U}_i - qC_i . \quad (30)$$

Up to this stage of the development in this section we have made the implicit assumption that the population growth process and catching process are deterministic. The more feasible version of the model at (14) requires that when we form the linear expression at (15) we include an error term

$$\gamma = \int_0^1 [\eta_1(t) - 1] [HP^m(t) - KP(t)] dt - \int_0^1 [\eta_2(t) - 1] qfP(t) dt .$$

Additional error in the expression (30) is due to the assumptions at (19) and (29). We shall represent all these sources, some random and some not random, by a single error term  $\epsilon$  and write (30) as

$$\Delta U_i = \frac{H}{q^{m-1}} \bar{U}_i^m - K\bar{U}_i - qC_i + \epsilon_i . \quad (31)$$

Equation (31) can now be used to develop a variety of estimation schemes for *fixed*  $m$ . The first technique one might use is least squares. The model is linear, and hence usual regression methods could be used to estimate the coefficients, *i.e.*, if we let

$$\begin{aligned} Y_i &= \Delta U_i & \beta_1 &= H/q^{m-1} \\ X_{1i} &= \bar{U}_i^m & \beta_2 &= -K \\ X_{2i} &= \bar{U}_i & \beta_3 &= -q \\ X_{3i} &= C_i \end{aligned}$$

then (31) can be written in the more familiar form

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \epsilon_i . \quad (32)$$

Given the estimates of the  $\beta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , and  $m$ , we can obtain the corresponding estimates of  $H$ ,  $K$ , and  $q$ .

On the other hand, we could continue to follow Schaefer's development by dividing (31) by  $\bar{U}_i$  to obtain

$$\frac{\Delta U_i}{\bar{U}_i} = \frac{H}{q^{m-1}} \bar{U}_i^{m-1} - K - qf_i + \epsilon'_i . \quad (33)$$

If our data consist of the annual catches and efforts observed for a series of  $n$  years, we might partition our observations into two subsets, placing the data for the first  $n^*$  years in one subset and the remaining observations in the other. Schaefer nowhere to our knowledge suggests a criterion for partitioning, and thus the scheme lacks uniqueness in the sense that two individuals analyzing the same set of data may partition the observations differently and so obtain different estimates for the parameters.



As we point out in the sequel, the data should be partitioned into subsets corresponding to intervals of years over which population change is thought to be great.

Once the data are partitioned a system of three linear equations in three unknowns may be formed:

$$\sum_{i=1}^{n^*} \frac{\Delta U_i}{\bar{U}_i} = \frac{H}{q^{m-1}} \sum_{i=1}^{n^*} \bar{U}_i^{m-1} - n^*K - q \sum_{i=1}^{n^*} f_i$$

$$\sum_{i=n^*+1}^n \frac{\Delta U_i}{\bar{U}_i} = \frac{H}{q^{m-1}} \sum_{i=n^*+1}^n \bar{U}_i^{m-1} - (n - n^*)K - q \sum_{i=n^*+1}^n f_i \quad (34)$$

$$\sum_{i=1}^n \left| \frac{\Delta U_i}{\bar{U}_i} \right| = \sum_{[i:\Delta U_i > 0]} \left[ \frac{H}{q^{m-1}} \bar{U}_i^{m-1} - K - qf_i \right] - \sum_{[i:\Delta U_i < 0]} \left[ \frac{H}{q^{m-1}} \bar{U}_i^{m-1} - K - qf_i \right]$$

where we have arbitrarily set

$$\sum_{i=1}^{n^*} \epsilon'_i = \sum_{i=n^*+1}^n \epsilon'_i = 0$$

$$\sum_{[i:\Delta U_i > 0]} \epsilon'_i - \sum_{[i:\Delta U_i < 0]} \epsilon'_i = 0$$

which may be reasonable approximations. The system is easily solved for fixed  $m$  and the estimates of  $H$ ,  $K$ , and  $q$  are again readily obtained.

To this juncture two schemes have been described which might be used to estimate the parameters of our model for fixed  $m$ . It is straightforward to develop others based on this linearization tack, but these will suffice.

In addition to our previous minor criticisms, the linearization approach as presented here depends on estimates of changes in stock sizes which can be shown to be quite seriously in error under the assumed system of a stock under exploitation defined at (5). If we approximate the differential equation at (5) by a finite difference equation, we may compute the stock size at discrete instants by

$$P(t + \Delta t) = P(t) + [HP^m(t) - KP(t) - qf(t)P(t)] \Delta t \quad (35)$$

and the catch resulting from the fishing between  $t$  and  $t + \Delta t$  by

$$C(t, t + \Delta t) = qf(t)P(t)\Delta t. \quad (36)$$

Given values for  $H$ ,  $K$ ,  $m$ ,  $q$ , the initial population size  $P(0)$ , and the effort function,  $f(t)$ , a catch history can be computed using these two equations. Pella (1967) has computed such a catch history for the Schaefer model. He set

$$\begin{aligned} m &= 2 \\ H &= -8.814 \times 10^{-3} \\ K &= -2.600 \\ q &= 3.8 \times 10^{-2} \\ P(0) &= 295 \\ \Delta t &= 0.1 \end{aligned}$$

These parameters, with the exception of  $\Delta t$ , were chosen to correspond to the estimates obtained for the Schaefer model for the yellowfin tuna fishery in the eastern Pacific Ocean (Schaefer 1957). The stock is measured in millions of pounds and the effort in thousands of boat days (standardized to bait vessels of 201 to 300 short tons capacity). The approximation by the finite difference equation can be shown to be excellent through a comparison with the integrated analogues of (35) and (36). In general, it is not possible to obtain the integrated form corresponding to (36). The effort function was taken to be a step function, changing annually, but remaining constant within years. The effort used was that observed in the yellowfin tuna fishery for 1935 through 1964 (Table 6). The statistics generated by this simulation are presented in Table 1. The interesting point here is the comparison between the observed changes in population size and the estimates obtained by linear interpolation with the catchability coefficient known (Table 1; Figure 4). Clearly the estimates in the situation described are poor, generally underestimating the true changes. The absolute values of the errors are generally only slightly smaller than the corresponding absolute values of the stock changes themselves. It is easy to demonstrate graphically how these errors occur (Figure 5). This plot illustrates the stock size under a fishing effort history of overfishing, followed by underfishing, succeeded by overfishing. By overfishing and underfishing we simply mean the fishing effort level is such that the stock will decrease and increase, respectively. We observe that by linearly interpolating between  $\bar{P}_1$  and  $\bar{P}_2$  we have an estimate of  $P(1)$  with a large positive error. The interpolation between  $\bar{P}_2$  and  $\bar{P}_3$  results in an estimate of  $P(2)$  with a large negative error. We would estimate  $P(2) - P(1)$ , a large positive change by  $\hat{P}(2) - \hat{P}(1)$ , a small negative change. The opposite fishing pattern — underfishing, overfishing, underfishing — produces the same result.

The catch and effort history for the yellowfin tuna fishery substantiates our claim that the linear interpolation formula does not estimate population changes in this fishery satisfactorily. We draw this conclusion

from the following points which will immediately be demonstrated for the yellowfin fishery from the data of 1934 through 1965 (Table 6): (1) the linear regression model (31) explains little of the variability in  $\Delta U$  (or equivalently scaled estimates of population changes); (2) the Schaefer model with parameters estimated by the Schaefer method (34) explains over 80 percent of the variation in the catches; and (3) the Schaefer method results in much cancellation of errors of estimates of population change.

When we fit the linear regression equation (31) by least squares to the catch and effort data of the yellowfin tuna fishery for say 1934 through 1965, we find that less than 11 percent of the total sum of squares can be accounted for by the model. The fit is so poor one might reasonably argue that the logistic model is inappropriate. (Certain parameter estimates obtained by this least squares fit with  $m = 2$  are presented in Table 2.) However, it is patent that the errors in estimating stock changes contribute a great deal to the residual errors of the fitted model. For if we assume the initial stock size at the beginning of 1934 was approximately proportional to the catch per unit of effort of that year, set the constants of the Schaefer model equal to the estimates obtained by use of the Schaefer method (Table 2) for this fishery, and compute the catches predicted by the model as was done in computing the statistics of Table 1, we find that over 80 percent of the variation in the catches can be accounted for by the model, *i.e.*,

$$R = \frac{\sum_i (C_i - \bar{C})^2 - \sum_i (C_i - \hat{C}_i)^2}{\sum_i (C_i - \bar{C})^2} > .80 \quad (37)$$

where  $\hat{C}_i$  = predicted catch for year  $i$   
 $C_i$  = actual catch for year  $i$

and the summation extends from 1935 through 1964. We compute  $R$  from 1935 through 1964 rather than from 1934 through 1965 since the least squares technique fitted these years, *i.e.*, due to estimating the change in population size by the interpolation formula, the 2 years at the extremes are lost.

The statistic  $R$  here is an analogue of the correlation coefficient of regression theory. It is a measure of the improvement in the fit of the catch history by the Schaefer model over the arithmetic mean. So if the Schaefer model fits the catches no better than the mean,  $R = 0$ . If the model fits the catches perfectly,  $R = 1$ . If the mean gives a better fit,  $R < 0$ . Certainly the Schaefer model fits the catch history of the yellowfin fishery remarkably well when viewed in this respect.

The Schaefer estimation scheme partially circumvents the errors in estimating changes in population size during individual years by forming sums of weighted estimates of population changes over periods of years, *viz.*, over  $n^*$  and  $n-n^*$  years in (34). A great deal of cancellation takes place in this summing process. If we form an unweighted sum of estimates of population change over  $k$  years to estimate the total change over those years,  $\Delta P$  total ( $k$ ), we have

$$\hat{\Delta P} \text{ total } (k) = \sum_{i=1}^k \hat{\Delta P}_i = \left( \frac{\bar{U}_k + \bar{U}_{k+1}}{2q} \right) - \left( \frac{U_0 + U_1}{2q} \right) \quad (38)$$

where all the intermediate terms cancel. We therefore estimate the change in stock size over the  $k$  years by the difference of the means of the estimates of mean population sizes during the last 2 years and the first 2 years of  $k + 2$  years of data. If the change is large over the  $k$  years, the error in estimating stock change as above will be relatively small as compared to the actual stock change, whereas the relative errors for the more erratic and smaller changes during individual years may be quite large. A cursory examination of the yellowfin data indicates a large change in population size has occurred since 1934, but that the decline has often been interrupted by periods of growth. The weighting by the inverse of the catch per effort used by Schaefer makes our cancellation of errors argument less cogent, but undoubtedly much of the error in the individual estimates cancels. The terms which cancel in (38) are separated by a single term. In the weighted estimate the denominators of the corresponding terms are the catches per effort in alternating years. Provided the catch per unit of effort in these years is not greatly dissimilar, the cancelling should occur.

So far our results are evincive of the superiority of the Schaefer method over the least squares technique. We would certainly suggest to anyone who wishes to use his technique that the data be partitioned at points in time between which large stock changes are thought to have occurred. If such a partitioning is possible, it should eliminate the absurd estimates reported by Pella (1967) by using the Schaefer method and by Southward (1968) who used a slight variation of the method.

Pella (1967) developed some additional techniques as variants of the linearization approach. In computing the estimates of the parameters for the yellowfin fishery using the data for 1934 through 1965, he obtained values for the parameters ranging between those of Table 2. Some of the estimates could not be considered as inferior to those obtained by the Schaefer method on the basis that they were unrealistic, as was done for the least squares estimates. Thus a variety of estimates is possible from any set of catch and effort data by the linearization approach.

We propose now a criterion by which estimates of the parameters by different techniques can be compared for goodness of fit of the catch and effort data, and we develop a scheme to determine the parameter estimates which are best as defined in our sense. The estimation technique will further permit us to estimate  $m$ , which until now has been assumed fixed by the investigator. With an estimate of  $m$  we will have an idea of the degree and direction of skewness of the stock production curve.

**Minimum S—criterion**

We now propose a reasonable measure of the goodness of fit of our production model to a set of catch and effort data based on the catch and effort observations themselves. The introduction of extraneous error to the observations through attempting to estimate stock changes is avoided. We shall presume that the fishery has been under observation for some length of time during which the catch and effort are known for each of  $n$  subintervals of duration  $\Delta t_i, i = 1, \dots, n$ . The subintervals, of course, need not be equal. Suppose that the effort sequence  $[E] = (E_1, E_2, \dots, E_n)$  is observed during the study. Here  $E_i$  is the actual number of units of effort expended during the  $i^{th}$  time interval. Our earlier discussion dealt with intervals of unit length, but now to permit variable time intervals we introduce the  $E$  notation. Presuming the effort to be constant during the  $i^{th}$  interval, we would convert to the earlier effort measure by scaling the  $E_i$  by the inverse of  $\Delta t_i, viz., f_i = E_i/\Delta t_i$ . Let  $[C] = (C_1, C_2, \dots, C_n)$  be the corresponding sequence of observed catches. Let  $[C(H, K, q, m, P(0))] = (\hat{C}_1, \hat{C}_2, \dots, \hat{C}_n)$  be the sequence of catches predicted by the integration of the differential equation (4) with  $P(t)$  given by (7) using the parameters  $H, K, q,$  and  $m$  when the initial stock size at the beginning of the first time interval was  $P(0)$  and the effort sequence  $[E]$ . Let  $\beta = [(H, K, q, m, P(0))]$ . If

$$S(H, K, q, m, P(0)) = \sum_{i=1}^n (C_i - \hat{C}_i)^2 \tag{39}$$

then  $(\hat{H}, \hat{K}, \hat{q}, \hat{m}, P(\hat{0}))$  is here defined as the best estimate of the generalized production model parameters provided that for all feasible points in  $\beta, S$  is minimal at  $(\hat{H}, \hat{K}, \hat{q}, \hat{m}, P(\hat{0}))$ . We remark in passing that

$$R = \frac{\sum_{i=1}^n (C_i - \bar{C})^2 - \sum_{i=1}^n (C_i - \hat{C}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (C_i - \bar{C})^2} \tag{40}$$

is maximized at the best estimate. Hence, we have chosen as the best

estimate of the generalized production model parameters that point in the parameter space by which the maximum proportion of the variation in the catches is explained by the model in our specially defined sense.

The surface  $S$  in the space  $\beta$  cannot in general be expressed in algebraic form since, as we mentioned earlier, an explicit expression for the integral of (4) with  $P(t)$  given by (7) cannot generally be found. We can, as we shall presently show, obtain a good numerical approximation of the integral. Therefore, in order to obtain the best estimate of the parameters of the model we must conduct a search over the surface  $S$  in the space  $\beta$  by numerically approximating  $S$  at points selected in such a manner as to lead us to the minimizing point. The searching routine we are about to describe is subject to the usual pitfalls in examining portions of a surface to locate an extremum. The routine may terminate its search at a relative minimum if the surface has relative minima in addition to the absolute minimum. Therefore estimates generated by the procedure should be treated circumspectly. In our experience with several sets of fisheries data, the surface was well-behaved with a clear minimum and no relative minima.

### Searching routine

The computations required to search over  $S$  are so lengthy as to make the method impractical without the availability of a high-speed electronic computer. We now describe a computer program, hereafter referred to as GENPROD, which will locate, for fixed  $m$ , the minimizing point in a subspace of  $\beta$ ,  $\beta^* = [(H, K, q, P(0))]$ , with as much precision as desired. The computer program permits the investigator to vary  $m$  over a likely range of values and in turn find  $\hat{m}$  with as much precision as he deems necessary, thus finding the best estimate in  $\beta$ .

We have actually written the program to search over a transformation of  $\beta^*$ ,  $\beta^{**} = [(F_{opt}, q, r, U_{max})]$ , for fixed  $m$ . The transformation from  $\beta^*$  to  $\beta^{**}$  is defined as follows:

$$\begin{aligned} F_{opt} &= \frac{K(1-m)}{mq} \\ q &= q \\ r &= P(0)/P_{max} = P(0)/(K/H)^{\frac{1}{m-1}} \\ U_{max} &= q(K/H)^{\frac{1}{m-1}} \end{aligned} \quad (41)$$

Here  $F_{opt}$ , as defined earlier, is the effort required to maintain the population at its optimum size and to harvest the maximum sustainable yield. The parameter  $q$  is of course the catchability coefficient. The parameter

$r$  is the ratio of the stock size at the time when the fishery first comes under observation to the maximum stock size.  $U_{max}$  is the maximum catch per unit of effort which would be observed when the stock is at its maximum. The inverse transformation is as follows:

$$\begin{aligned}
 H &= \left(\frac{m}{1-m}\right) \left(\frac{q}{U_{max}}\right)^{m-1} qF_{opt} \\
 K &= \left(\frac{m}{1-m}\right) qF_{opt} \\
 q &= q \\
 P(0) &= rU_{max}/q.
 \end{aligned}
 \tag{42}$$

The transformation is one-to-one if only feasible parameter values are permitted. Clearly, searching through  $\beta^*$  or  $\beta^{**}$  for the minimum of  $S$  for fixed  $m$  is equivalent in the sense that once the minimizing point is located in either subspace, the minimizing point in the other is determined by the appropriate transformation. Our purpose in making the transformation is to facilitate the guessing of initial values for the model parameters which are required to begin the search. The investigator undoubtedly will find his intuition stronger in  $\beta^{**}$  than  $\beta^*$ .

Program GENPROD begins by computing  $H$ ,  $K$ , and  $P(0)$  from guesses of  $F_{opt}$ ,  $q$ ,  $r$ , and  $U_{max}$  for a given  $m$ . The program then computes the predicted catches,  $[\hat{C}]$ , by approximating the integration of equation (4) with  $P(t)$  given by (7). Each of the  $n$  time intervals is partitioned into  $N$  subintervals (the length of the subintervals in the  $i^b$  time interval is  $\Delta t_i/N$ ). The user specifies the value of  $N$ . The predicted catch during the  $i^b$  interval is approximated by

$$\hat{C}_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} qf_i P(t) dt \cong qf_i \sum_{j=1}^N \frac{1}{2}(P_{ij} + P_{i,j+1}) \frac{\Delta t_i}{N}$$

where  $P_{ij}$  is the predicted population size at the beginning of the  $j^b$  subinterval in the  $i^b$  time interval and  $f_i = E_i/\Delta t_i$  is the fishing effort per unit time. The  $P_{ij}$  are computed by equation (7). The  $f_i$  are computed internally in GENPROD. *The user provides the observed catches  $[C]$ , the observed efforts  $[E]$ , and the lengths of the time periods  $[\Delta t]$ .* For most situations, the change in population size during any time interval can be reasonably represented by a straight line and  $N$  is set equal to 1. The error of estimation is reduced by increasing  $N$ .

GENPROD now begins to modify the guesses and search for the best estimates in  $\beta^{**}$ . Each time the guesses are modified,  $[\hat{C}]$  is recalculated until the minimum  $S$  is found. It is necessary for the user to provide one or more values of  $m$  and initial guesses of  $F_{opt}$ ,  $q$ ,  $r$ , and  $U_{max}$  when using GENPROD. GENPROD further requires the user to provide step intervals

for  $F_{opt}$ ,  $q$ ,  $r$ , and  $U_{max}$  which are here designated as  $\Delta F$ ,  $\Delta q$ ,  $\Delta r$ , and  $\Delta U$ , respectively, and the user must supply lower and upper bounds for each of the four parameters. The step intervals are used in the search across the range of possible solutions for each parameter as next described.

The searching technique was originally programmed by Beisinger and Bell (1963). The initial guess supplied by the user is taken as a base point,  $(F_{opt}, q, r, U_{max})$ , for searching, and the routine begins an exploratory phase. It evaluates  $S$  at the point  $(F_{opt} + \Delta F, q, r, U_{max})$  and if  $S$  at  $(F_{opt} + \Delta F, q, r, U_{max})$  is less than  $S$  at  $(F_{opt}, q, r, U_{max})$ , then  $(F_{opt} + \Delta F, q, r, U_{max})$  is taken as a new base point and the routine explores in the  $q$  direction. On the other hand, if  $S$  is less at the initial base point, the routine tries the point  $(F_{opt} - \Delta F, q, r, U_{max})$ , and if  $S$  is less at this choice than at  $(F_{opt}, q, r, U_{max})$ , then  $(F_{opt} - \Delta F, q, r, U_{max})$  is taken as the new base point; if not, it retains the old base point, and in either event, begins exploring in the  $q$  direction. In a similar manner each of the remaining axes of the parameter space corresponding to  $r$  and  $U_{max}$  is explored and at the termination of this exploration a check is made to see if the base point has been changed. If the base point has changed, a pattern phase is entered; if not, the routine re-enters the exploratory phase with the step intervals for each parameter divided by 10. In the pattern phase the routine tries a pattern step which is a combination of all the successful moves in the previous exploratory phase. This pattern step is repeated until it no longer results in a decrease in the value of the function  $S$ , at which time the routine returns, with the step intervals for the parameters unchanged, to the exploratory phase. The routine is halted when the exploratory phase, with the step intervals divided by  $10^{KK}$  ( $KK$  is specified by the user) fails to change the latest base point. During the entire process, whenever a step in the search moves outside the lower or upper bounds specified by the user, a test senses this and the trial point is drawn back to the boundary. The best estimates of the parameters in  $\beta^{**}$  are those corresponding to the minimum value of  $S$  found.

Since guesses are required when using GENPROD, some hints for evaluating these are appropriate. The general situation is depicted as one in which data (catch and effort) are distributed over a range of stock sizes, including the optimum. The technique suggested is to choose  $F_{opt}$  equal to the mean of the observed efforts; choose  $U_{max}$  equal to the maximum observed catch per unit of effort; choose  $P_{max}$  equal to 4 times the maximum observed catch; and set  $q$  equal to  $U_{max}$  divided by  $P_{max}$ ; choose  $r$  equal to 0.8. The lower bounds of  $F_{opt}$  and  $U_{max}$  are set at 1/10 of the guesses and the upper bounds are set at 10 times the guesses. The bounds of  $q$  should be more liberal, say 1/100 and 100 times. The bounds of  $r$  are obviously 0 and 1. The values for the step intervals are simply set equal to the guesses. These guesses are based on the assumption that all  $\Delta t_i = 1$ .

Of course, if it is known that the catch-effort data were obtained from a segment of the range of stock sizes, or some  $\Delta t_i \neq 1$ , then the guessing



process must be modified. If serious doubt exists, one should make guesses as suggested and at the same time set very wide bounds and utilize relatively large step intervals for a quick search across the range. If any of the final estimates equal a bound, the data should be rerun with wider bounds if the user does not consider solutions beyond the bounds as infeasible. As for the values of  $m$ , it is appropriate to begin the search by choosing a range of values greater than 0 but less than 4 ( $m = 1$  must be excluded). If little is known about the shape of the production curve, try 0.4, 0.8, 1.2, 1.6, 2.0, 2.4, 2.8, and 3.2 for a first run, then try additional values when the approximate range is determined by examining the values of  $S$ .

Several factors will influence the amount of computer time necessary to find a solution. The two most important are the values of  $N$  and  $KK$ , since each of these automatically increases the amount of computation as they become larger. Doubling  $N$  will roughly double computation. Increasing  $KK$  decreases the rate at which the search occurs and unless the search is near the estimate, convergence can be very slow. It would be advisable on initial runs, to set  $N = 1$ ,  $KK = 2$  and use values of the step intervals which will search across the range with few steps. It should be pointed out that if independent information exists about one or more of the parameters, this can be incorporated by setting very narrow bounds. This will speed up the computation time. A CDC 1604 computer used 2 minutes, 14 seconds execution time with  $N = 1$ ,  $KK = 3$ , and  $n = 34$  for six values of  $m$ .

The instructions for setting up the input data cards are given in the Appendix. The computer output from GENPROD is given in Table 7, which relates the program terminology to the terminology in this paper. The output should be relatively self-explanatory, except the times (AT TIME) given are the times at the end of the interval and the population sizes given are at the end of each interval. The effort and catch are those during the interval.

### Data for Fitting

Assuming the model is appropriate for a given species, the only data necessary to estimate the parameters are catch, effort, and time. For a given total catch over some length of time, the data must be presented in terms of intervals of time. The usual case would be catch by year for some number of years. In each interval of time, the number of time units ( $\Delta t_i$ ), the catch ( $C_i$ ), and the effort ( $E_i$ ) must be available. The values of  $C_i$  and  $E_i$  may be zero, such as in the case of closed seasons. In fisheries applications, the usual assumption would be that the growth of the stock in biomass could be approximated by the model. Therefore, the catch should be in terms of weight. The unit of effort is arbitrary, but it must be standardized to conform to the assumption that  $q$  is constant. Since the

model has five parameters, at least six different population sizes must be represented by the catch-effort data. Of course if one is willing to assume a value for  $m$ , the numbers of parameters and required data points are reduced by one.

At times, the catch and effort for each time interval are not directly available, but can be estimated from other sources of data. It is straightforward to estimate the effort ( $E_i$ ) if the catches ( $C_i$ ) and average catch per unit of effort ( $\bar{U}_i$ ) are known. For some fisheries, the instantaneous fishing mortality is estimable without knowledge of effort or catch per unit of effort (*e.g.* Murphy 1966). The efforts are estimated as being proportional to the instantaneous fishing mortalities.

### EXAMPLE PROBLEMS

Examples for stocks of two species of fish have been worked out to explore the use of GENPROD. The first example comes from experiments on exploiting guppies (*Lebistes reticulatus*) by Silliman and Gutsell (1958). The guppy data are particularly useful in exposing deficiencies of the model and showing the utility of the fitting scheme. The second example comes from the catch statistics (Bayliff 1967) of the yellowfin tuna (*Thunnus albacares*) in the eastern Pacific Ocean. An attempt will be made in the latter case to establish why the predicted catches sometimes vary substantially from the observed catches.

#### Guppies

Silliman and Gutsell (1958) maintained four guppy populations under similar ecological conditions, except two of the populations (A and B) were exposed to varying fishing rates while the other two (C and D) were not fished. The fishing technique used on the guppies involved systematic removal of every  $n^{th}$  fish at points in time separated by 3-week intervals, with  $n$  depending on the fishing rate. The removal rates for numbers of fish were 10, 25, 50, and 75 percent each 3-week period. The harvesting scheme would imply that every exploitable fish had an equal chance of being in the catch at a time when removals were made, and therefore approximately every  $n^{th}$  gram in the population should have entered the catch.

Silliman and Gutsell artificially constructed an effort history for the guppy experiments by assuming the percent removals in each triweekly period were proportional to the effort measures. They equated the 10-percent rate to 1 unit of effort, the 25-percent rate to 2.5 units of effort, the 50-percent rate to 5 units of effort, and the 75-percent rate to 7.5 units of effort. This would imply that  $q = 0.1$ . Since we decided to fit the model in terms of biomass rather than numbers, we computed the actual percent removals in weight for each time period. Effort values were constructed

along the lines of Silliman and Gutsell by scaling the percent removals in weight by one tenth, implying again that  $q = 0.1$ . Hence the catches  $[C]$  we used correspond exactly to those in Silliman and Gutsell's Table 8. The efforts  $[E]$  we used correspond closely to those given in that same table, but we actually computed them from their Table 4.

Since the removals were made at discrete points in time separated by 3-week intervals, we have attempted to affect the harvesting process by dividing each time interval into closed and open fishing periods. We assumed that the guppies were exposed to fishing during only the last one hundredth of each triweekly period. During the closed fishing period of each triweekly interval the catch and effort were set equal to 0. The catches  $[C]$  actually used in the fitting of the model then consist of those reported by Silliman and Gutsell, each preceded by a 0 catch. There is similarly an augmented effort history  $[E]$ . A more exact fitting of the guppy data would necessarily treat the removals as true point removals. Our purpose here, however, is to demonstrate both the utility of the general production model and the fitting program GENPROD. Furthermore we doubt that a more refined treatment of these data in fitting the model would significantly alter the parameter estimates we are about to present. In fact much of the fitting about to be described was carried out a second time with the assumption of continuous fishing during the triweekly periods. The parameter estimates resulting from these fits agreed fairly well with those we now report which were computed under the more realistic discontinuous fishing pattern we adopted.

Some results from the initial fitting of the guppy data of populations A and B are illustrated by Figures 6 and 7. The lower panels of Figures 6 and 7 show the correspondence between the observed catch histories for each population and the best-fitting predicted histories. The observed and predicted population sizes generated from these fits are shown in the upper panels of Figures 6 and 7. In spite of the obviously excellent fits to the catch data for both populations, the population biomass was overestimated in both cases, especially during the first two thirds of the experiment. The trends in the actual population size histories were adequately described by the model.

In seeking to explain the overestimation of the population biomass, it was noticed that  $q$  was underestimated (Table 3; parameters unrestricted and minimum  $S$ ). We next restricted  $q$  to 0.1 (the lower and upper bounds of  $q$  were set equal to 0.1) and recalculated the remaining parameters for population A (Table 3;  $q$  restricted). The results of this new fit (Fig. 8) illustrate a considerable improvement in the correspondence between the predicted and observed population size histories for population A.

The estimated maximum biomass ( $P_{max}$ ) of 40 to 50 grams with  $q$  unrestricted is an overestimate for these guppy populations under the ex-

perimental conditions. The two unexploited control populations appeared to oscillate around a value between 30 to 36 grams. Thus the estimate of  $P_{max}$  for population A with  $q$  restricted seems in line.

Estimates of  $C_{max}$  and  $F_{opt}$  from the different fits are fairly consistent. The  $C_{max}$  estimates compare well with the empirical conclusion of Silliman and Gutsell (see their Figure 14), but the  $F_{opt}$  estimates are less than that suggested by Figures 12 and 13 of Silliman and Gutsell.

The empirical evidence from the combined data for populations A and B (Figure 14 of Silliman and Gutsell) suggests a stock production curve skewed to the right. The fit to population A indicated such a curve skewed to the right, but population B appeared to have a symmetrical stock production curve at least to the level of precision ( $1.9 < m < 2.1$ ) we chose. It is particularly noteworthy that in the case of population A, the curve of which apparently is skewed, the assumption that the curve is symmetric does not seriously alter the estimates of the important parameters,  $C_{max}$  and  $F_{opt}$  (Table 3; population A, parameters either restricted or unrestricted,  $m = 2$ ).

The fitting procedure seems to be most sensitive to estimating  $C_{max}$ ,  $F_{opt}$ , and  $U_{max}$ , while least sensitive to estimating  $m$ ,  $q$ , and  $P_{max}$ . It is almost certain that the overestimation of population biomass in the upper panels of Figures 6 and 7 was caused by poor estimation of  $q$ . But even with  $q$  restricted, it is apparent that the model does not represent the population changes exactly though we believe the representation is very good. There are times (Figure 8 upper panel) when the population does not respond as rapidly as the model predicts (resulting in overestimation of the catches) and times when the population does better than predicted (resulting in underestimation of the catches). The exploited guppy populations did not appear to have a stable age distribution at any of the fishing rates, and this might account for the growth rate not responding as predicted.

As a final exercise with the guppy data, the data for population A were divided into two parts. The first part contained catch data for times when the population size was always greater than  $P_{opt}$  (week 40 to week 109) and the second part contained catches for times when the population size was generally less than  $P_{opt}$  (week 110 to week 172). Curiously the fits to the halves of the data suggested the stock production curve either was symmetric or skewed in the opposite direction from that computed by the fit to the entire data (Table 4). By fitting only half of the data at a time, observations were taken primarily from either the left ascending limb or right descending limb of the stock production curve. Apparently observations are required from both limbs if the skew parameter  $m$  is to be determined accurately. In any case, neither of the fits to the halves indicated the curve was strongly skewed.

Both fits to the halves of the data produced estimates of  $F_{opt}$  greater

than and  $P_{max}$  less than the corresponding estimates from the entire data with the parameters unrestricted. It would appear, considering the fit to the entire data and the empirical conclusions of Silliman and Gutsell, that  $F_{opt}$ ,  $C_{max}$ ,  $P_{max}$ , and  $q$  were better estimated from the first than the second half of the data. As a partial explanation, it was noted earlier that the population which is not changing very rapidly is most likely to provide the best data. Population A underwent a rapid change during the time represented by the second half of the data.

### Yellowfin tuna of the eastern Pacific Ocean

The yellowfin tuna data for 1934 through 1967 (Table 6) were fitted for a range of  $m$  values with the parameters unrestricted (Table 5). The predicted and observed catch histories for  $m = 1.4$ , the best estimate of the skew parameter, are plotted in Figure 9. The curves of equilibrium catch versus effort were obtained from (9) for  $m = 2$  and  $m = 1.4$  using the parameter estimates of Table 5 (Figure 10). While it appears that the stock production curve for yellowfin may be skewed, the assumption that the Schaefer model with its symmetric curve is appropriate does not appreciably change either the estimates of maximum sustainable yield or optimum fishing effort. If the curve is skewed, it would be expected that overfishing would not produce as noticeable a decline in catch per unit of effort as would be predicted by the Schaefer model.

The fits of the yellowfin data with the catchability coefficient unrestricted resulted in estimates of that parameter which were unreasonably large. We then restricted the catchability coefficient to a more realistic range of values, but found little difference in either the quality of the fit or the estimates of the other parameters (Table 5).

Clearly the fit to the yellowfin data is not of the quality of that for the guppies, but we did not expect it to be. There are sources of variation inherent in the yellowfin population dynamics which are absent or less influential in the guppy experiments. The guppies were kept in a relatively homogeneous environment where variation in reproduction, growth of individuals, or survival, induced by environmental perturbations, should be of less importance than in the case of the yellowfin tuna. Secondly, we developed an effort measure which perfectly satisfied the assumption of a constant catchability coefficient. The development of such a perfect effort measure for an actual commercial fishery of the complexity of the yellowfin fishery would not be possible.

Some discussion of the fit to the catch history will now be undertaken. In Figure 9 we see there are two periods of significant underestimation (1948 through 1951 and 1960 through 1961) and two periods of consistent and considerable overestimation (1952 through 1954 and 1956 through 1959). Such discrepancies between the observed and predicted catch histories may have been caused by unusually successful or unsuccessful re-

production, since each year class influences the catch for several consecutive years. Alternatively, environmental features either favoring or reducing production by the stock could be correlated in time. In any case, periods of consistent overestimation and underestimation of the catch history are not unexpected.

The remainder of the scattering about the predicted catch history could arise from several causes. Naturally productivity of the stock in different years will be subject to some variation caused by environmental changes and so unexplainable by the model. Furthermore, variation in the catchability coefficient could also be a cause. The age composition of the population has varied over these years, and since certain ages are more susceptible to capture than others (Davidoff 1969), the catchability coefficient must have varied. Further variation in the catchability coefficient could arise from changes in availability of the tuna due to, say, environmental features (*e.g.* Broadhead and Barrett 1964).

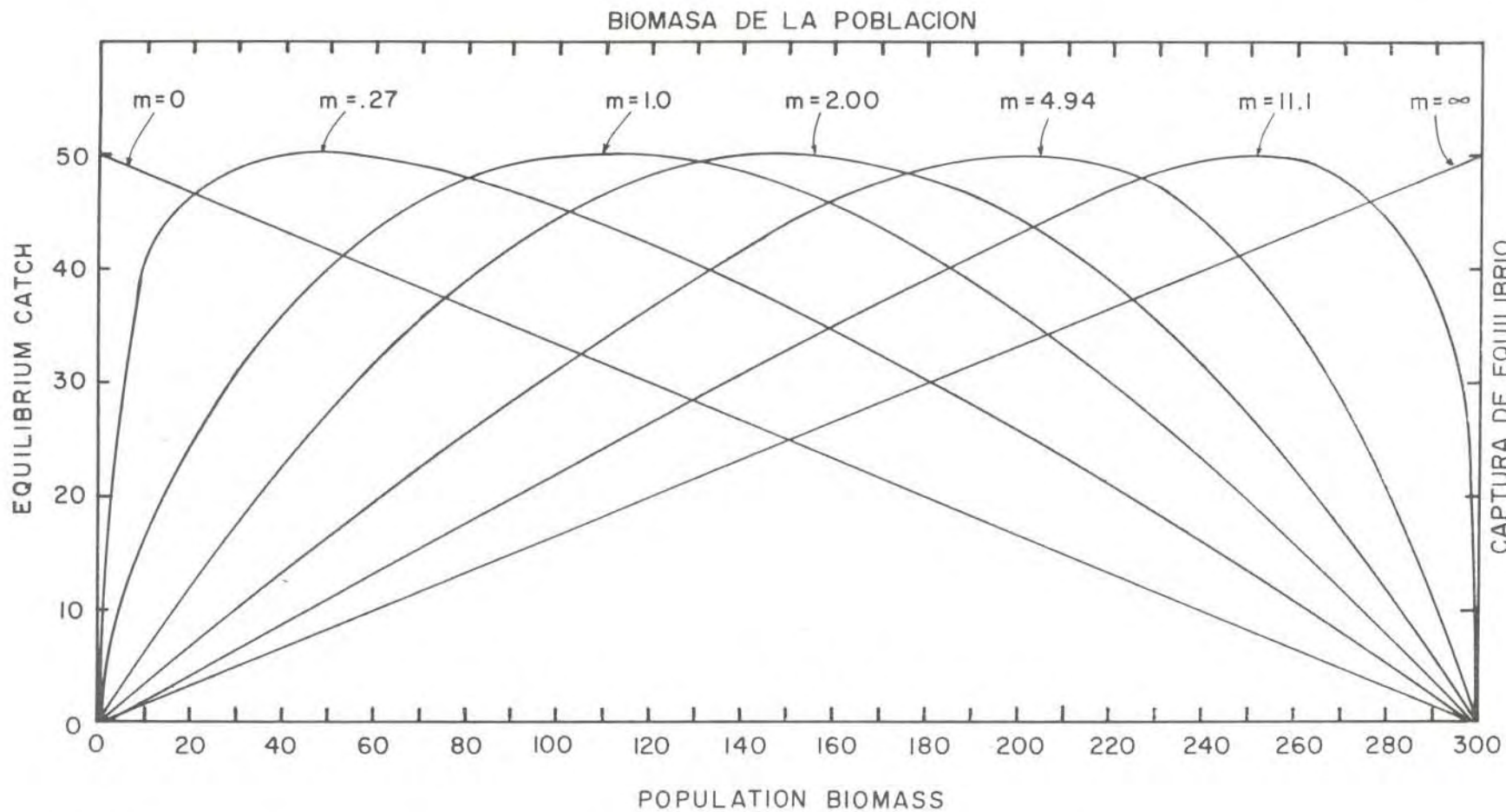
These comments have indicated some of the probable causes for the discrepancies between the observed and fitted catch histories. Considering the many potential sources of variation which are not taken into account by the model, together with the high proportion of the variation in the catches explained by the model ( $R > 0.80$ ), it appears to be remarkably suitable for describing the dynamics of the yellowfin tuna in the eastern Pacific Ocean.

As a final note, the yellowfin catches generally came from stock sizes greater than  $P_{opt}$ . Whether or not the parameter estimates would change if data were generated from allowing the population to go below  $P_{opt}$  is left to speculation, but it is not likely that much additional information will be forthcoming if the population goes roughly into equilibrium under current regulation.

### CONCLUSION

The problem investigated in this paper is the determination of the sustainable yield from fish stocks which can be anticipated under different levels of exploitation through an examination of only historic catch and effort information. The yield predictions from the model we discussed should be reasonably accurate provided the harvesting techniques are the same as those used to generate the data base from which the parameter estimates are made. A change in size selection by the fishery or in the time of the year when fishing occurs (*e.g.*, compression of fishing seasons due to catch restrictions) could modify the stock production curve. Still in these cases the analysis of catch and effort information on the basis of the generalized production model should provide a bench mark from which refinements in yield estimates can be made on the basis of more detailed studies of the dynamics of the stock.

We have dealt strictly with physical yield from the stock. The formulations would suggest that ordinarily an attempt should be made to maintain the size of the population, through catch or effort restrictions, at some intermediate level ( $P_{opt}$ ) between the maximum population size and extinction. At such a level the population should be most productive, generating, on the average, a maximum annual sustainable catch ( $C_{max}$ ). As has been pointed out by a series of authors (Scott 1954; Crutchfield and Zellner 1962; Turvey 1964; and Smith 1968, among others) such a management strategy based only on physical yield and ignoring economics may be a bit shortsighted. These authors suggest that profit maximization should be the goal of fisheries management. In the event that profit is chosen as the criterion, additional information on fishing costs are required to determine the optimum rate of exploitation. Whether physical yield or profit maximization is chosen as the objective, the determination of the physical yield as related to population size and fishing effort is essential in making management decisions. Viewed from this respect, the present study is fundamental to the management of fisheries, and we hope it will be of value to decision makers in the future.



**FIGURA 1.** Stock production curves for various values of  $m$ .  $C_{max} = 50$ ,  $P_{max} = 300$ , and  $q = 0.001$ .

**FIGURA 1.** Curvas de producción del stock para varios valores de  $m$ .  $C_{max} = 50$ ,  $P_{max} = 300$ , y  $q = 0.001$ .



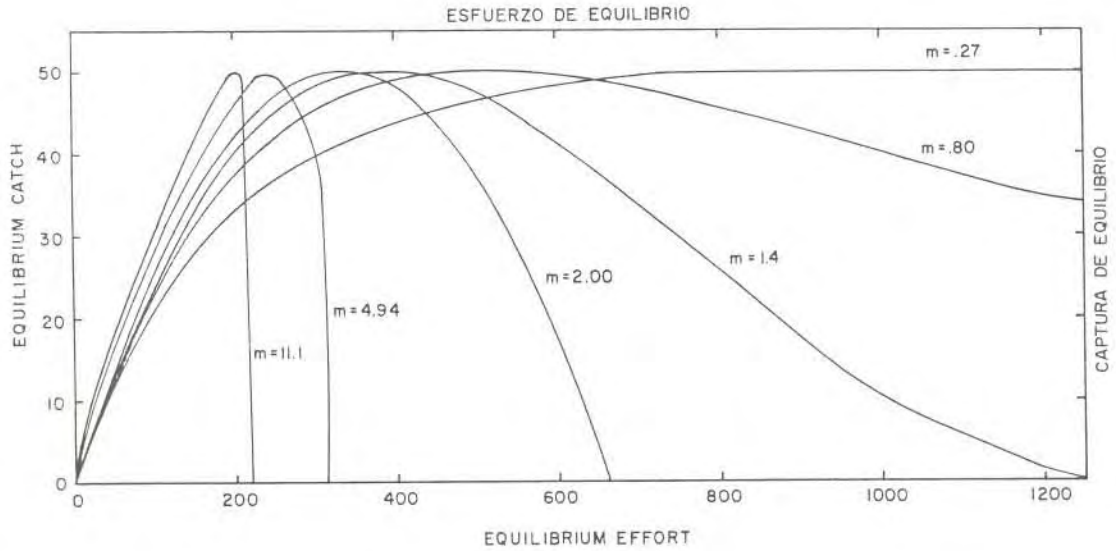


FIGURE 2. Equilibrium yield as related to effort for various values of  $m$ .  $C_{max} = 50$ ,  $P_{max} = 300$ , and  $q = 0.001$ .

FIGURA 2. Rendimiento de equilibrio con relación al esfuerzo para varios valores de  $m$ .  $C_{max} = 50$ ,  $P_{max} = 300$ , y  $q = 0.001$ .

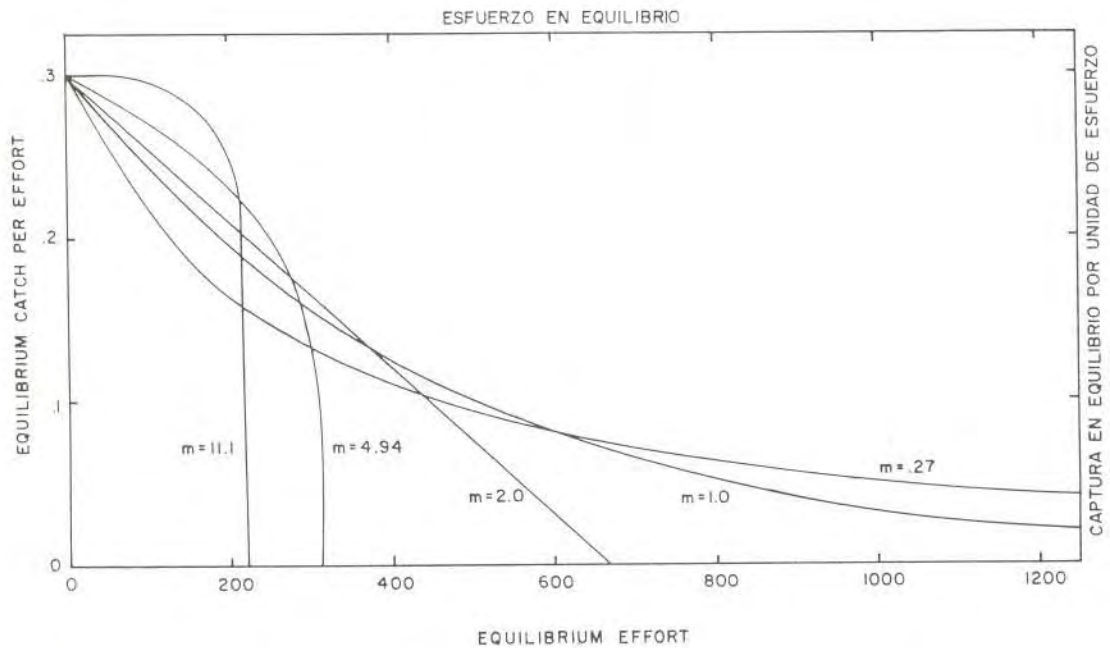
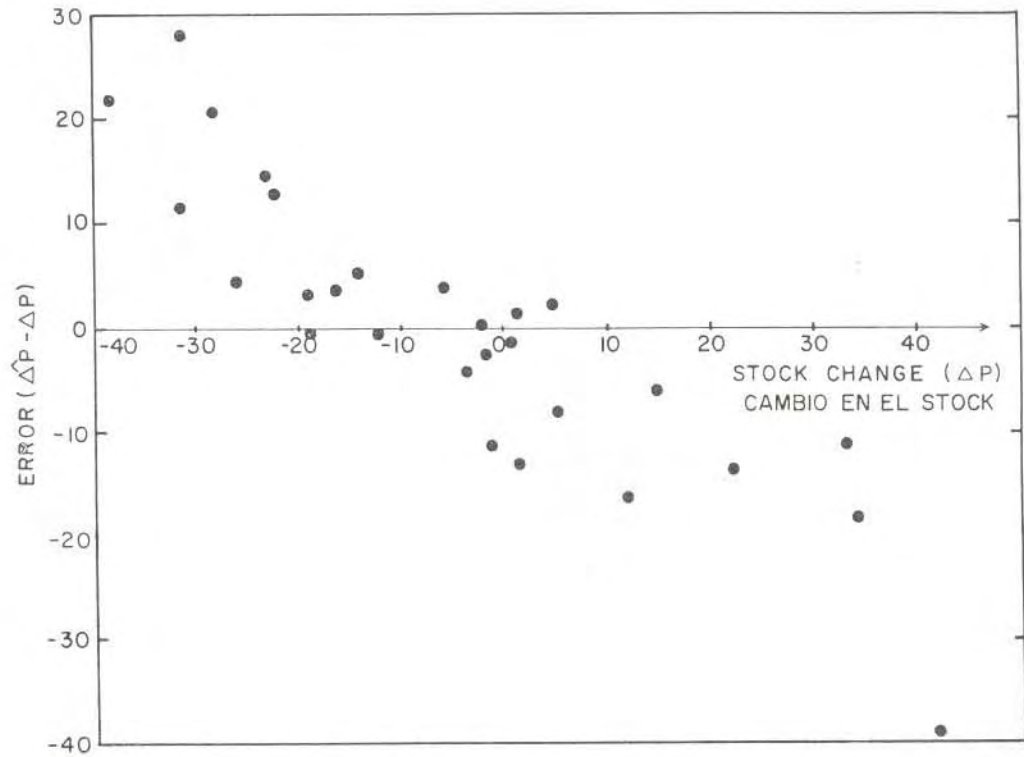


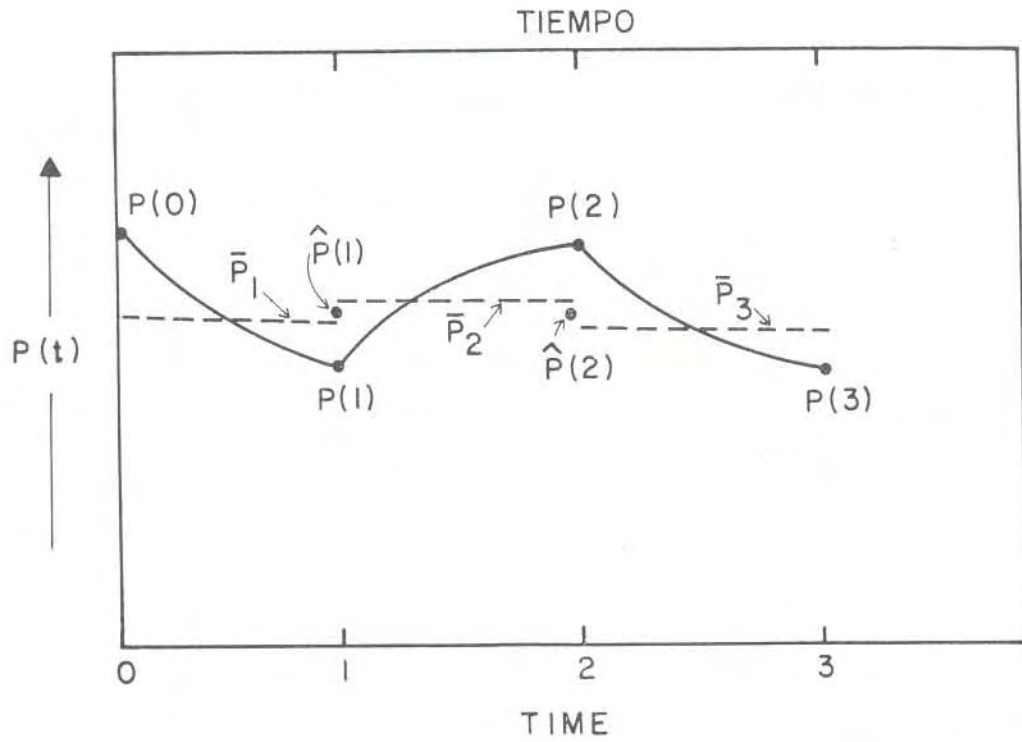
FIGURE 3. Equilibrium catch per unit of effort as related to effort for various values of  $m$ .  $C_{max} = 50$ ,  $P_{max} = 300$ , and  $q = 0.001$ .

FIGURA 3. Captura de equilibrio por unidad de esfuerzo con relación al esfuerzo para varios valores de  $m$ .  $C_{max} = 50$ ,  $P_{max} = 300$ , y  $q = 0.001$ .



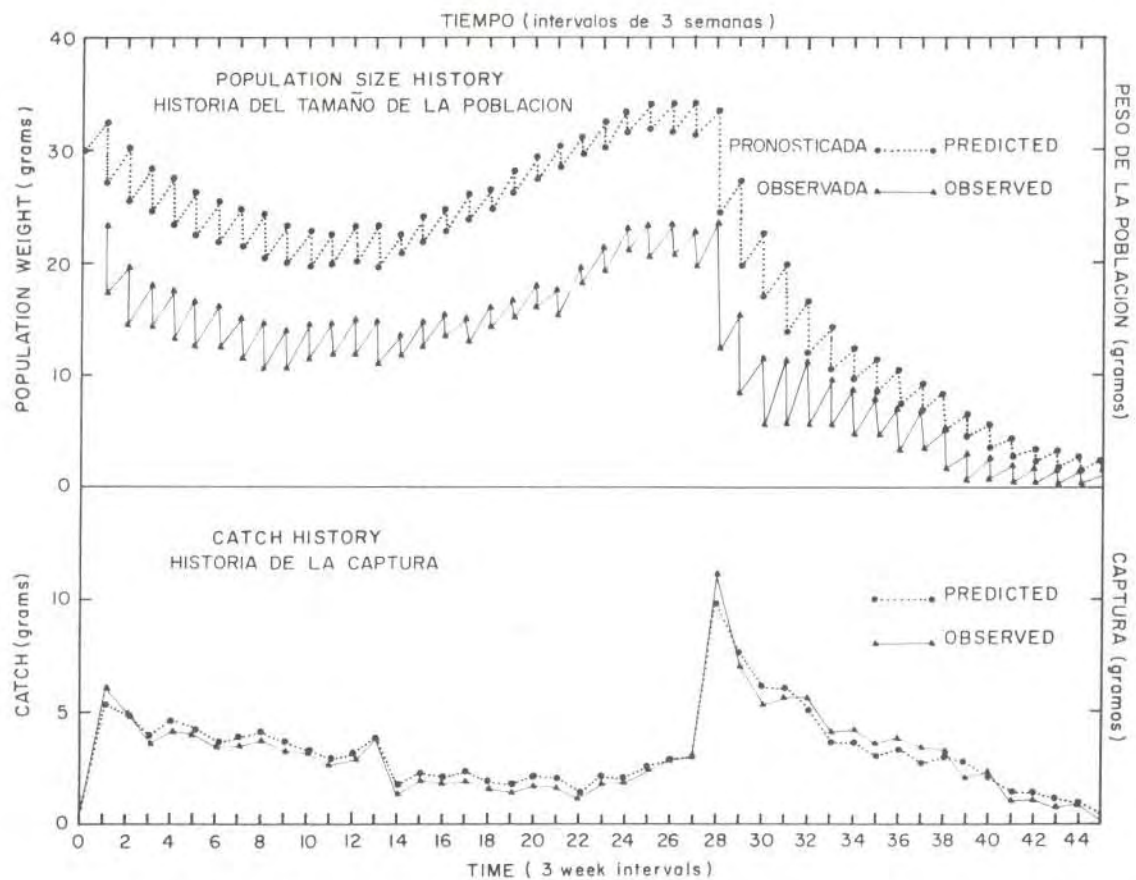
**FIGURE 4.** Plot of the errors in estimating stock changes by the linear interpolation formula versus the stock changes for a simulated logistic stock under exploitation. The data are from Table 1.

**FIGURA 4.** Gráfico de los errores en la estimación de cambios del stock mediante la fórmula de interpolación lineal en comparación con los cambios del stock en un stock logístico simulado, bajo explotación. La información proviene de la Tabla 1.



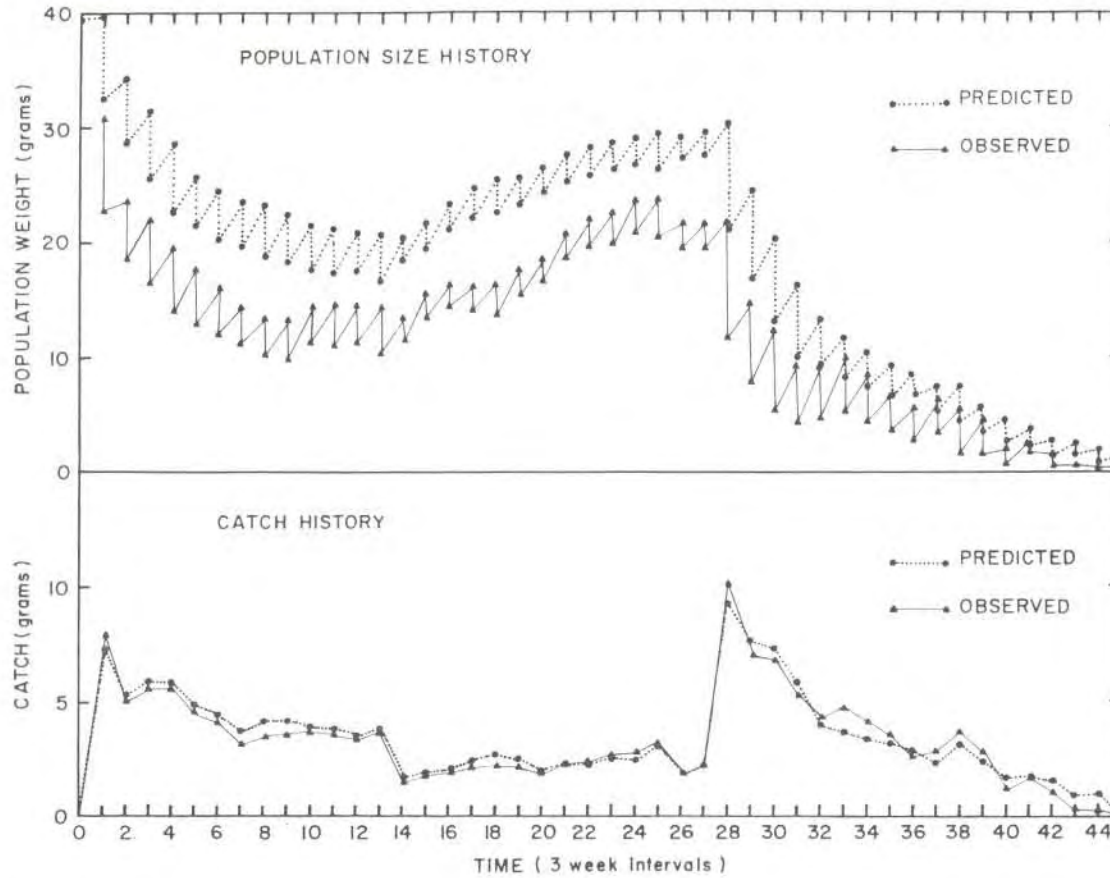
**FIGURE 5.** Stock size  $P(t)$  when overfishing occurs in the first and third time units and underfishing occurs in the second unit.

**FIGURA 5.** Tamaño del stock  $P(t)$  cuando ocurre la sobrepesca en la primera y tercera unidad de tiempo y en el caso de subpesca en la segunda mitad.



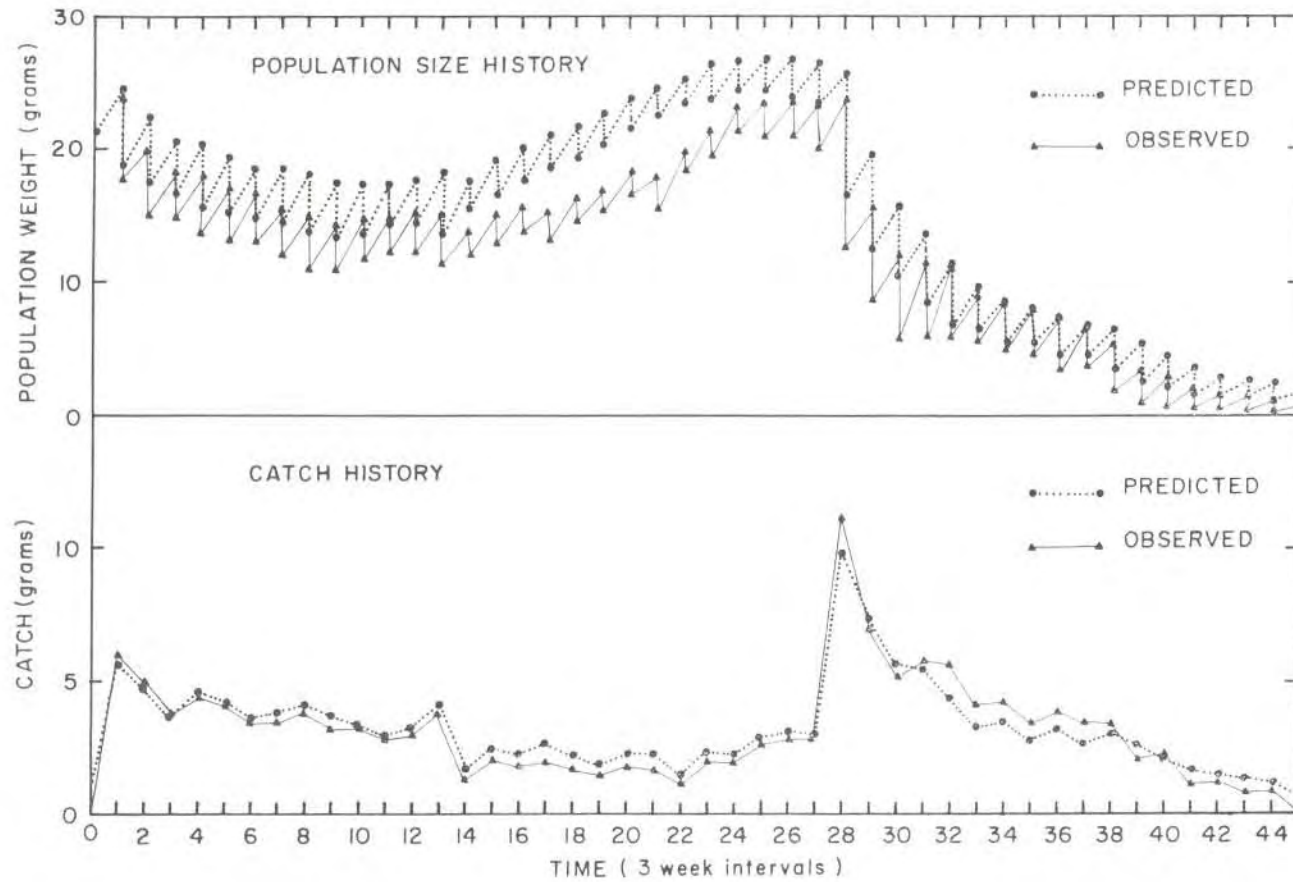
**FIGURE 6.** Observed and predicted population size and catch histories for guppy population A of Silliman and Gutsell (1963). The parameter values were unrestricted in fitting the catch data.

**FIGURA 6.** Tamaño observado y pronosticado de la población y cronología de captura de la población A de gambusinos de Silliman y Gutsell (1963). Los valores de los parámetros fueron irrestrictos al ajustar la información de captura.



**FIGURE 7.** Observed and predicted population size and catch histories for guppy population B of Silliman and Gutsell (1963). The parameter values were unrestricted in fitting the catch data.

**FIGURA 7.** Tamaño observado y pronosticado de la población y cronología de captura de la población B de gambusinos de Silliman y Gutsell (1963). Los valores de los parámetros fueron irrestrictos al ajustar la información de captura.



**FIGURE 8.** Observed and predicted population size and catch histories for guppy population A of Silliman and Gutsell (1963). The catchability coefficient was restricted in fitting the catch data.

**FIGURA 8.** Tamaño observado y pronosticado de la población y cronología de captura de la población A de gambusinos de Silliman y Gutsell (1963). El coeficiente de capturabilidad fue restringido al ajustar la información de captura.

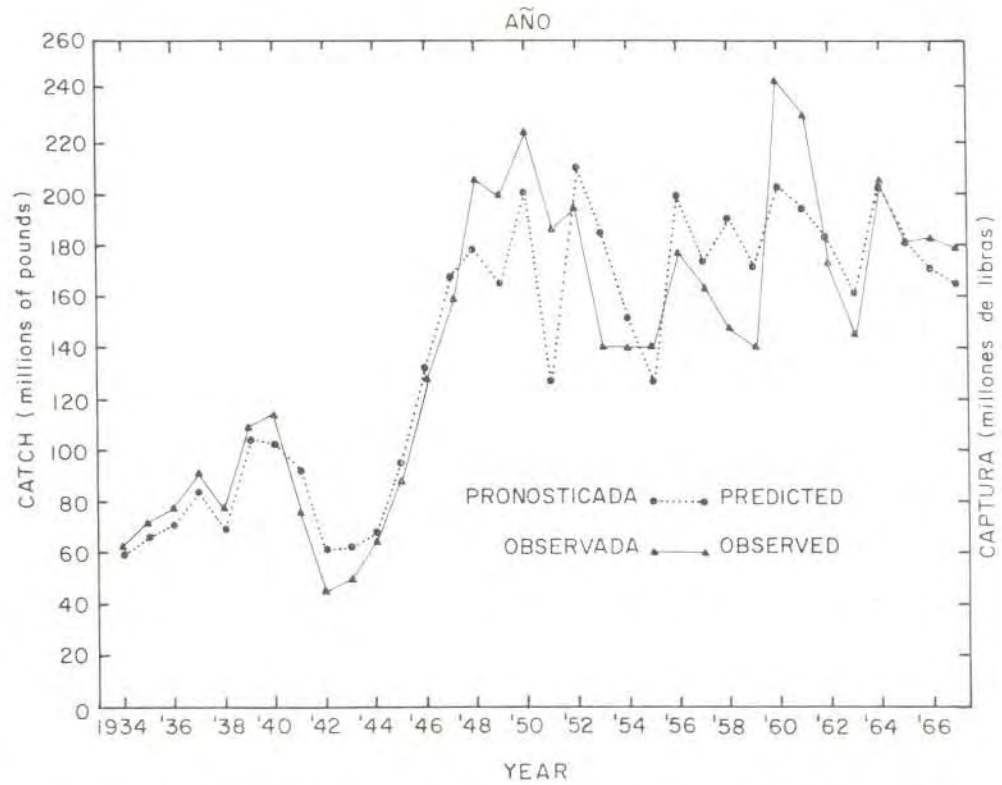


FIGURE 9. Observed and predicted catch histories when  $m = 1.4$  and  $q$  is unrestricted for the yellowfin tuna in the eastern Pacific Ocean.

FIGURA 9. Cronología de captura observada y pronosticada cuando  $m = 1.4$  y  $q$  es irrestricta para el atún aleta amarilla en el Océano Pacífico Oriental.

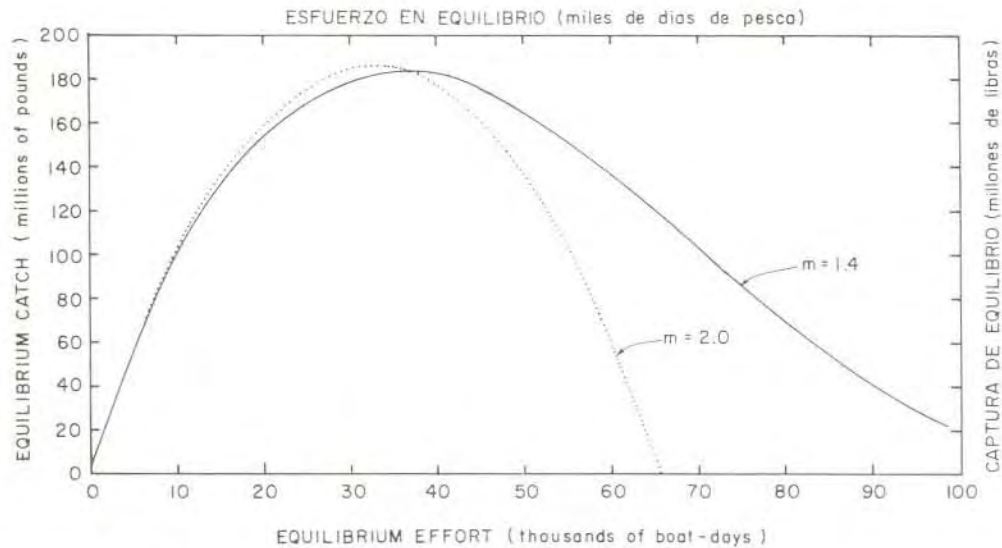


FIGURE 10. Comparison of equilibrium catch curves for  $m = 1.4$  and  $m = 2.0$  with  $q$  unrestricted for yellowfin tuna of the eastern Pacific Ocean.

FIGURA 10. Comparación de las curvas de captura equilibradas para  $m = 1.4$  y  $m = 2.0$  con  $q$  irrestricta para el atún aleta amarilla del Océano Pacífico Oriental.

**TABLE 1.** Statistics generated from a simulation of a logistic stock under exploitation. The headings for the columns are as follows:  $t$ , time in years;  $P$ , stock size at the beginning or end of each year;  $C$ , annual catch;  $f$ , effort during the year;  $\bar{U}$ , average catch per unit of effort for the year;  $\hat{\Delta}P$ , predicted change in stock size during the year;  $\Delta P$ , observed change in stock size during the year. The parameter values were as follows:  $k_1 = 8.814 \times 10^{-3}$ ,  $L = 295$ , and  $k_2 = 3.8 \times 10^{-2}$ . The estimated change in stock size was computed by the interpolation method with  $q$  known.

**TABLA 1.** Estadísticas hechas según la simulación de un stock logístico bajo explotación. Los títulos de las columnas son los siguientes:  $t$ , tiempo en años;  $P$ , tamaño del stock al principio o fin de cada año;  $C$ , captura anual;  $f$ , esfuerzo durante el año;  $\bar{U}$ , captura promedio por unidad de esfuerzo para el año;  $\hat{\Delta}P$ , cambio predicho en el tamaño del stock, durante el año;  $\Delta P$ , cambio observado en el tamaño del stock durante el año. Los valores de los parámetros fueron los siguientes:  $k_1 = 8.814 \times 10^{-3}$ ,  $L = 295$ , y  $k_2 = 3.8 \times 10^{-2}$ . El cambio estimado en el tamaño del stock se computó por el método de interpolación con  $q$  conocida.

$t$	$P$	$C$	$f$	$C/f = \bar{U}$	$\hat{\Delta}P$	$\Delta P$
0	295.00	66.56	6.3	10.565		-25.53
1	269.47	69.04	6.8	10.153	- 7.94	- 3.53
2	265.94	81.69	8.2	9.962	- 1.87	- 5.84
3	260.10	68.07	6.8	10.011	- 3.07	+ 5.18
4	265.29	102.15	10.5	9.729	- 8.98	-14.35
5	250.94	102.39	10.8	9.480	- 2.23	- 2.29
6	248.65	91.76	9.6	9.559	+ 6.60	+ 4.56
7	253.21	59.89	6.0	9.981	+ 8.70	+14.78
8	267.99	60.30	5.9	10.220	+ 2.77	+ 1.47
9	269.46	65.23	6.4	10.192	- 4.62	- 1.91
10	267.55	92.77	9.4	9.869	-12.44	-12.10
11	255.44	129.45	14.0	9.247	-19.76	-18.94
12	236.50	170.69	20.4	8.367	-21.38	-26.05
13	210.45	182.93	24.0	7.622	-12.57	-16.22
14	194.23	170.47	23.0	7.412	-11.83	+ 1.36
15	195.60	214.47	31.9	6.723	- 3.36	-31.13
16	164.46	133.82	18.7	7.156	+ 2.84	+41.80
17	206.26	218.59	31.5	6.939	-17.01	-38.93
18	167.33	213.42	36.4	5.863	- 9.62	-22.48
19	144.85	155.20	25.0	6.208	+21.93	+33.42
20	178.27	134.04	17.8	7.530	+15.87	+34.13
21	212.40	199.44	26.9	7.414	- 7.43	-28.32
22	184.08	181.79	26.1	6.965	-12.97	- 1.33
23	182.75	210.21	32.7	6.428	- 8.39	-23.02
24	159.73	176.54	27.9	6.328	- 4.34	+11.92
25	171.65	209.17	34.3	6.098	-16.00	-19.19
26	152.46	220.83	43.2	5.112	-19.50	-31.34
27	121.12	185.12	40.1	4.616	- 0.45	+ 0.68
28	121.79	167.57	33.0	5.078	+ 8.43	+22.10
29	143.89	200.83	38.2	5.257		- 9.89
30	134.01					



**TABLE 2.** Estimates of the Schaefer model parameters for the yellowfin tuna fishery by the least squares method and Schaefer's method. The effort is measured in boat days and the catch in millions of pounds.

**TABLA 2.** Estimaciones de los parámetros del modelo de Schaefer para la pesquería del atún de aleta amarilla mediante el método de los mínimos cuadrados y el método de Schaefer. El esfuerzo se avalúa por días de operación de los barcos, y la captura en millones de libras.

Method Método	$k_1$	$L$	$k_2$	$F_{opt}$	$C_{max}$
Least squares mínimos cuadrados	$9.181 \times 10^{-5}$	2,313	$5.412 \times 10^{-6}$	19,620	122.8
Schaefer	$2.136 \times 10^{-2}$	184	$62.90 \times 10^{-6}$	31,190	180.8

**TABLE 3.** Various estimates of parameters for the guppies of Silliman and Gutsell.  $C_{max}$  and  $P_{max}$  are expressed in grams.

**TABLA 3.** Varias estimaciones de los parámetros para los gambusinos (*Lebistes reticulatus*) de Silliman y Gutsell.  $C_{max}$  y  $P_{max}$  se expresan en gramos.

Population Población	$m$	$F_{opt}$	$C_{max}$	$P_{max}$	$U_{max}$	$q$	$S$	$R$
A*	1.7***	1.95	3.20	49.3	3.50	0.071	6.95	0.983
A*	2.0	2.02	3.23	46.4	3.20	0.069	7.14	0.982
B*	2.0***	2.18	3.36	39.5	3.08	0.078	8.78	0.980
A**	1.4***	2.23	3.49	36.3	3.63	0.100	9.61	0.975
A**	2.0	2.47	3.79	30.7	3.07	0.100	10.73	0.973

\* parameters unrestricted — parámetros irrestrictos

\*\*  $q$  restricted —  $q$  restrictos

\*\*\* minimum  $S$  —  $S$  mínima

**TABLE 4.** Comparison of best fits to population A for different sets of catch data.  $C_{max}$  and  $P_{max}$  are expressed in grams.

**TABLA 4.** Comparación de los mejores ajustes para la población A de las diferentes series de los datos de captura.  $C_{max}$  y  $P_{max}$  se expresan en gramos.

Population Población	$m$	$F_{opt}$	$C_{max}$	$P_{max}$	$U_{max}$	$q$	$S$	$R$
A (1st half) (1 <sup>ra</sup> mitad)	2.6	2.19	3.00	35.5	2.48	0.070	0.32	0.998
A (2nd half) (2 <sup>da</sup> mitad)	2.0	2.61	4.85	26.6	3.72	0.140	3.41	0.987
A (total)	1.7	1.95	3.20	49.3	3.50	0.071	6.95	0.983

**TABLE 5.** Comparison of parameter estimates from several fits for the yellowfin tuna.  $C_{max}$  is in millions of pounds,  $F_{opt}$  in boat days, and  $U_{max}$  in pounds per boat-day.

**TABLA 5.** Comparación de las estimaciones de los parámetros según varios ajustes para el atún aleta amarilla.  $C_{max}$  está en millones de libras,  $F_{opt}$  en días por barco, y  $U_{max}$  en libras diarias por barco.

$m$	$F_{opt}$	$C_{max}$	$U_{max}$	$q$	$S$	$R$
2.0	32,600	185.8	11,400	$9.9 \times 10^{-4}$	$1.86 \times 10^{10}$	0.822
1.4*	35,300	182.6	12,000	$4.5 \times 10^{-4}$	$1.78 \times 10^{10}$	0.829
1.3**	36,750	181.5	11,850	$5.0 \times 10^{-5}$	$1.82 \times 10^{10}$	0.825

\* minimum  $S$  with parameters unrestricted —  $S$  mínima con parámetros irrestrictos

\*\* minimum  $S$  with  $q$  restricted —  $S$  mínima con  $q$  restricta

**TABLE 6.** Catch, effort, and catch per unit of effort for yellowfin tuna from the eastern Pacific Ocean during 1934 through 1967. The data from 1934 through 1965 were obtained from Bayliff (1967), except that the effort and catch per unit of effort for 1962 through 1965 were corrected for changes in efficiency of the fishing gear.

**TABLA 6.** Captura, esfuerzo y captura por unidad de esfuerzo para el atún aleta amarilla del Océano Pacífico oriental durante 1934 hasta 1967. Los datos de 1934 hasta 1965 fueron obtenidos de Bayliff (1967), excepto que el esfuerzo y la captura por unidad de esfuerzo para 1962 hasta 1965 fueron corregidos debido a los cambios en la eficiencia de las artes de pesca.

Year	Catch (thousands of pounds)	Effort (boat days)	Catch per unit of effort (pounds per boat day)
Año	Captura (miles de libras)	Esfuerzo (días/barco)	Captura por unidad de esfuerzo (libras diarias por barco)
1934	60,913	5,879	10,361
1935	72,294	6,295	11,484
1936	78,353	6,771	11,571
1937	91,522	8,233	11,116
1938	78,288	6,830	11,463
1939	110,418	10,488	10,528
1940	114,590	10,801	10,609
1941	76,841	9,584	8,018
1942	41,965	5,961	7,040
1943	50,058	5,930	8,441
1944	64,869	6,475	10,019
1945	89,194	9,377	9,512
1946	129,701	13,958	9,292
1947	160,151	20,383	7,857
1948	206,993	24,781	8,353
1949	200,070	23,923	8,363
1950	224,810	31,856	7,057
1951	186,015	18,403	10,108
1952	195,277	34,834	5,606
1953	140,042	36,356	3,852
1954	140,033	26,228	5,339
1955	140,865	17,198	8,191
1956	177,026	27,205	6,507
1957	163,020	26,768	6,090
1958	148,450	31,135	4,768
1959	140,484	28,198*	4,982*
1960	244,331	35,841	6,817
1961	230,886	41,646	5,544
1962	174,063	42,248	4,120
1963	145,469	33,303	4,368
1964	203,882	42,090	4,844
1965	180,086	43,228	4,166
1966	182,294	40,393	4,513
1967	178,944	33,814	5,292

\* These statistics differ from those in IATTC (1965, 1966) since they are based on catch rather than landings in 1959.

\* Estas estadísticas difieren de las de la CIAT (1965, 1966) ya que están basadas en la captura en vez de los desembarques de 1959.

**TABLE 7.** Computer program, GENPROD, output with symbology.

**TABLA 7.** Programa de cómputo GENPROD, producción con simbología.

Text Texto	Program output Producción del programa
$m$	M
$F_{opt}$	FOPT
$U_{max}$	UMAX
$q$	Q
$r$	P(0)/L
$C_{max}$	CMAX
$P_{opt}$	POPT
$P_{max}$	PMAX
$H$	H
$K$	K
$S$	SUM OF SQUARES
$R$	R
$\sum^n C_i$	TOTAL CATCH
$\sum^n \frac{1}{n} C_i$	AVERAGE CATCH
$t$	AT TIME
$P_i$	POPULATION SIZE
$E_i$	APPLIED EFFORT
$C_i$	OBSERVED CATCH
$\hat{C}_i$	EXPECTED CATCH
$U_i$	OBSERVED CATCH/EFFORT
$\hat{U}_i$	EXPECTED CATCH/EFFORT

# UN MODELO GENERALIZADO DE LA PRODUCCION DEL STOCK

por

Jerome J. Pella y Patrick K. Tomlinson<sup>1</sup>

## EXTRACTO

Se describe una generalización del modelo de Schaefer la cual permite la asimetría de la curva de producción del stock relacionando la producción con el tamaño de la población. Se desarrolla un esquema de ajustamiento mediante el cual se puede determinar la curva de producción del stock para una población explotada usando solamente los datos cronológicos de la captura y el esfuerzo de la pesquería. A causa de los extensos cálculos necesarios para realizar las estimaciones de los parámetros, se incluye un programa de cómputo para usarlo en los cálculos. Se proveen ejemplos los cuales demuestran la adaptabilidad del modelo para describir la dinámica de ciertas poblaciones de peces. Se analizan especialmente los datos cronológicos de la captura y el esfuerzo de la pesquería del atún aleta amarilla en el Océano Pacífico oriental.

## AGRADECIMIENTOS

Manifestamos nuestro agradecimiento al Sr. John A. Gulland, de la Organización de Alimentación y Agricultura de las Naciones Unidas, al Dr. James Joseph de la Comisión Interamericana del Atún Tropical y al Dr. M. B. Schaefer del Institute of Marine Resources de la Universidad de California por sus comentarios sobre el manuscrito. Tenemos una deuda especial de gratitud para con el Dr. G. J. Paulik, del College of Fisheries de la Universidad de Washington por su extensa y constructiva revisión del manuscrito.

## INTRODUCCION

Los modelos de la producción del stock representan el esfuerzo de los biólogos pesqueros para determinar directamente la relación que existe entre el rendimiento sostenible de un stock (o población) y el tamaño del stock. La primera aproximación analítica de este tipo se debe a Graham (1935), quien utilizó el modelo logístico para calcular el rendimiento que podía esperarse de los stocks de peces del Mar del Norte. Con el procedimiento de cálculo que adoptó, se necesita que la pesquería sea estable, por lo menos una vez en su historia.

Feller (1940) desarrolló una forma modificada del modelo logístico para describir el crecimiento de algunas colonias de Infusoria según los experimentos de Gause. En estos experimentos, según la descripción de Feller, se sacaban continuamente de los cultivos porciones de las colonias. Desarrolló estimaciones de los parámetros del modelo logístico, suponiendo

<sup>1</sup>Operations Research Branch, California Department of Fish and Game, Terminal Island, California.

que las tasas de remoción eran conocidas y que ocurrían periodos en los que las colonias de Infusoria estaban en equilibrio con las tasas de remoción.

Independientemente, Schaefer (1954) desarrolló esencialmente el mismo modelo de Feller (es común ahora referirse al modelo de Schaefer en aplicaciones de pesquerías) y describió un método para estimar los parámetros logísticos bajo condiciones de explotación que no estaban en equilibrio. La información necesaria es la referente a los datos cronológicos de la captura y el esfuerzo del stock, junto con una estimación independiente del coeficiente de capturabilidad. Schaefer (1957) extendió su esquema de estimación para que el coeficiente de capturabilidad pudiera también estimarse según los datos cronológicos de la captura y el esfuerzo.

La suposición logística se ha criticado con justicia, ya que conforme se encuentra relacionada al tamaño del stock, resulta en la curva del rendimiento de equilibrio (llamada en lo sucesivo curva de producción del stock) alcanzando su máximo exactamente a la mitad del tamaño teórico máximo del stock. Ricker (1958) y Schaefer y Beverton (1963), entre otros, han indicado que para muchas poblaciones de peces la curva puede muy bien ser asimétrica existiendo el máximo en el punto en que el tamaño del stock es menos que la mitad del tamaño máximo del stock. Estos autores han sugerido modelos que justificarían esta asimetría de la curva. Ninguna de las sugerencias va acompañada de un esquema de estimación que utilice solamente la historia de captura y esfuerzo como base de información. El modelo que proponemos ahora permite una asimetría positiva o negativa de la curva de producción del stock, y la técnica de estimación nos permite determinar la magnitud y dirección de la asimetría únicamente de la información de captura y esfuerzo.

### DESCRIPCION DEL MODELO

Presentamos la hipótesis que el stock o población bajo consideración tiene en cada nivel  $P$  (que puede medirse en términos ya sea de número o biomasa) un cierto potencial de crecimiento. Si al tiempo  $t$ , la población está de un tamaño  $P(t)$ , entonces suponemos que la tasa instantánea de crecimiento de la población al tiempo  $t$  es

$$\frac{dP(t)}{dt} = HP^m(t) - KP(t) \quad (1)$$

donde  $H$ ,  $K$ , y  $m$  son constantes.  $m \geq 0$ . Si la población está limitada en su crecimiento a un máximo absoluto, digamos  $P_{max}$ , es fácil demostrar que  $H$  y  $K$  deben ser negativas si  $m \geq 1$  y positiva si  $m < 1$ . Postergamos la discusión del caso momentáneamente cuando  $m = 1$ . La ecuación (1) es un caso especial de la ecuación de Bernoulli, y se ha discutido anteriormente en otro contexto (Richards 1959; Chapman 1960).

Si la población descrita por (1) se la permite aumentar sin interferencia externa entonces al integrar encontramos

$$P(t) = [P_{max}^{1-m} - (P_{max}^{1-m} - P(0)^{1-m}) e^{-K(1-m)t}]^{\frac{1}{1-m}} \quad (2)$$

donde

$P(0)$  es el tamaño de la población en el momento 0 y

$$P_{max} = \left(\frac{K}{H}\right)^{\frac{1}{m-1}}. \quad (3)$$

Por otra parte, si se sacan individuos de esta población durante el intervalo  $(0, t)$ , la tasa de crecimiento se alterará. Si una pesquería de  $f(t)$  unidades de esfuerzo opera en la población a tiempo  $t$ , la tasa instantánea de captura es

$$\frac{dC(t)}{dt} = qf(t)P(t) \quad (4)$$

estipulando que las unidades de esfuerzo operan independientemente. La constante  $q$  es llamada el coeficiente de capturabilidad en la literatura pesquera. En la presencia de una pesquería, la tasa instantánea de crecimiento de la población provista por (1) se reduce por la tasa instantánea de captura en (4), resultando en una tasa modificada de crecimiento.

$$\frac{dP(t)}{dt} = HP^m(t) - KP(t) - qf(t)P(t). \quad (5)$$

Deseamos indicar en esta oportunidad que con  $m = 2$ , (5) se convierte en el modelo de Schaefer

$$\frac{dP(t)}{dt} = k_1P(t) (L - P(t)) - k_2f(t)P(t) \quad (6)$$

(Schaefer 1954, 1957) donde se definen nuestros parámetros en términos de su anotación como

$$\begin{aligned} H &= -k_1 \\ K &= -k_1L \\ q &= k_2. \end{aligned}$$

Si el esfuerzo de pesca permanece constante durante el intervalo de tiempo  $(0, t)$  el tamaño de la población en el tiempo  $t$  se obtiene al integrar (5) de tal manera que se obtiene

$$P(t) = \left[\frac{H}{K+qf} - \left(\frac{H}{K+qf} - P(0)^{1-m}\right) e^{-(K+qf)(1-m)t}\right]^{\frac{1}{1-m}} \quad (7)$$

donde  $f$  es el esfuerzo constante. Si  $f = (HP(0)^{m-1} - K)/q$ , la población estará en equilibrio con la pesquería y  $P = P(0)$  en cualquier tiempo  $t$ . En adelante eliminaremos la variable tiempo, de la anotación a fin de dar énfasis a las condiciones de equilibrio cuando se presenten. Si  $f <$

$[(HP(0)^{m-1} - K)/q]$ , la población aumentará y dado un  $t$  suficientemente largo se restablece un nuevo equilibrio en

$$P = \left(\frac{qf + K}{H}\right)^{\frac{1}{m-1}}.$$

Si  $[(HP(0)^{m-1} - K)/q] < f < \infty$  y  $0 < m < 1$ , la población declinará y dado un  $t$  suficientemente largo, se restablecerá en equilibrio al tamaño positivo de población indicado en la ecuación anterior. Lo que significa en este caso es que la población no puede pescarse hasta su extinción. Si  $[(HP(0)^{m-1} - K)/q] < f < (-K/q)$ , y  $m > 1$ , se le da otra vez a la población suficiente tiempo, declinará a un tamaño de población de equilibrio positivo según lo indica la ecuación anterior, pero si  $f \geq (-K/q)$ , la población se pescará eventualmente hasta su extinción. Prácticamente hablando, tenemos poca confianza en pronósticos de supervivencia o extinción de una población bajo explotación extrema, pero esto no disminuye la utilidad del modelo.

Si la pesquería es de tal magnitud como para poder extraer exactamente la producción de la población, la captura equilibrada por unidad de tiempo, digamos 1 año es

$$C = HP^m - KP = qfP. \quad (8)$$

Observamos según (8) que la captura anual equilibrada,  $C$ , se obtiene por el esfuerzo equilibrado que mantiene la población en equilibrio al tamaño  $P$ .

Nuestro modelo generalizado de producción resulta en una familia de curvas de producción del stock, indicadas por el parámetro  $m$  (Figura 1). La objeción anterior al modelo de Schaefer sobre la base de asimetría de la curva de producción del stock se subsana fácilmente al permitir que  $m < 2$ .

La Figura 1 incluye la curva para  $m = 1$ . La curva trazada allí se obtuvo mediante la interpolación entre las curvas de  $m = 0.999$  y  $m = 1.001$ , las cuales, bajo el punto de vista práctico, no se podían distinguir. Cuando  $m \rightarrow 1$  y  $P_{max}$  es finita se puede demostrar que (1) corresponde al modelo de crecimiento Gompertz (ver Richards 1959). Los coeficientes  $H$  y  $K$  en este caso se vuelven iguales e infinitamente grandes. Debe considerarse obvio según la discusión sobre el ajuste del modelo que esta dificultad ha sido allanada. Evidentemente no podemos permitir  $m = 1$  pero si  $m \rightarrow 1$ .

La relación entre el rendimiento de equilibrio y el esfuerzo de cualquier preferencia de  $m$  puede obtenerse de (8) y es

$$C = qf \left(\frac{qf + K}{H}\right)^{\frac{1}{m-1}} \quad (9)$$

Estas curvas son asimétricas en la misma dirección de las curvas de producción del stock para cualquier  $m$  (Figura 2). Si la curva de producción del stock es positivamente asimétrica, como se ha sugerido, la pesca más



allá del máximo de la curva de rendimiento en (9) resultará en una declinación menos pronunciada del rendimiento que lo que hubiera pronosticado el modelo de Schaefer o modelos con  $m > 2$ . Conforme desciende  $m$  a 1, las curvas intersecan la abscisa en  $f = 0$  y  $f = -K/q$ . Con  $0 < m < 1$  las curvas se levantan al máximo y luego declinan con esfuerzo creciente, volviéndose asintóticas con relación a la abscisa. Con  $0 < m < 1$  las curvas tienen un punto de inflección hacia la derecha del máximo en

$$f = \frac{2K(1 - m)}{qm}.$$

Cuando  $m = 0$ , la curva es asintótica con relación a la captura máxima de equilibrio.

La captura de equilibrio por unidad de esfuerzo, conforme se relaciona al esfuerzo, se obtiene de (9) al dividir por  $f$  para obtener

$$U = q\left(\frac{qf + K}{H}\right)^{\frac{1}{m-1}} \quad (10)$$

Estas curvas se grafican para una variedad de valores  $m$  (Figura 3). Algunos gráficos de captura por unidad de esfuerzo contra el esfuerzo, en la literatura de pesquerías (e.d. FAO, 1968) se parecen a estas curvas con  $m < 2$ . La curvatura de estas líneas, aún con valores de  $m$  considerablemente menores que 2, es poca aún sobre una serie amplia de valores de esfuerzo, de tal manera que es bastante difícil rechazar la suposición logística de estos gráficos mediante una prueba de relación lineal a menos que  $m$  sea muy diferente de 2, se ha observado el esfuerzo sobre un amplio rango de valores, o se ha dispuesto de gran cantidad de observaciones. Aún así, los diagramas sencillos de captura por unidad de esfuerzo contra esfuerzo no son realmente apropiados al tratar de discriminar entre diferentes valores de  $m$  y que las curvas en (10) están bajo condiciones de equilibrio. Generalmente no son satisfactorios los ensayos para ajustar los datos a las condiciones de equilibrio por razones que se demostrarán más adelante.

Varias características del modelo de población en (5) que son de particular interés en la administración de una pesquería, son el máximo de la curva del rendimiento equilibrado ( $C_{max}$ ), el tamaño de población en el que la captura se pueda realizar ( $P_{opt}$ ), y el esfuerzo de pesca requerido para mantener la población a este nivel ( $F_{opt}$ ). En términos de las constantes del modelo, estos parámetros son como sigue:

$$C_{max} = H\left(\frac{K}{mH}\right)^{\frac{m}{m-1}} - K\left(\frac{K}{mH}\right)^{\frac{1}{m-1}} \quad (11)$$

$$P_{opt} = \left(\frac{K}{mH}\right)^{\frac{1}{m-1}} \quad (12)$$

$$F_{opt} = \frac{K(1 - m)}{mq} \quad (13)$$

Antes de comenzar con la sección de las estimaciones, deseamos calificar las condiciones bajo las cuales (5) podría realmente aproximarse a la dinámica de una población explotada de peces. Algunas de estas discusiones se originan en comentarios anteriores de Schaefer (1957) y Schaefer y Beverton (1963).

## SUPOSICIONES

### Variación aleatoria en las tasas de producción y captura

Hemos demorado la discusión del problema de la variación aleatoria en las tasas de producción y captura en (5) hasta este momento. Actualmente hay poco que ofrecer respecto a la naturaleza estocástica de la población explotada. Reconocemos que el proceso no es determinista, como lo hemos presentado hasta ahora, así que tal vez una representación más real de (5), sería

$$\frac{dP(t)}{dt} = \eta_1(t) [HP^m(t) - KP(t)] - \eta_2(t) qf(t)P(t) \quad (14)$$

donde  $\eta_1(t)$  y  $\eta_2(t)$  son variables aleatorias de la variación en tiempo. La variable  $\eta_1$  representa la variación aleatoria en la tasa de producción del stock debido a cambios en reclutamiento, crecimiento y mortalidad natural, causados por el ambiente. La variación en la tasa de captura debido a cambios aleatorios en la accesibilidad y capturabilidad está representada por la variable  $\eta_2$ . Se supone que estas variables estén distribuidas de modo que (8), (9) y (10) representen curvas de regresión, y (5) describa la tasa de cambio de la población bajo condiciones promedio tanto ambiental como de pesca. Estas amplias suposiciones son necesarias debido a la dificultad en tratar de desarrollar análogas estocásticas de (1). Existen resultados completos solamente para el caso  $m = 0$ . En este caso, Ahuja y Nash (1965) han desarrollado una análoga estocástica de (1) en términos de un proceso de crecimiento de una población discreta, expresiones derivadas para la media y la varianza del proceso, y encontraron estimadores de máxima verosimilitud de los parámetros para la situación donde la población puede contarse en instantes de tiempo mientras crece hacia el máximo. Existen algunos estudios sobre análogas estocásticas del modelo logístico (Feller 1939; Kendall 1949; Bartlett 1957; y Leslie 1958). Estas investigaciones demuestran la dificultad de utilizar análogas de probabilidad de (1) con  $m \neq 0$  ya que no se pudo determinar ninguno de los momentos del proceso logístico, ni los estimadores probabilísticos de los parámetros. La situación no se simplificaría al añadir la explotación dinámica al problema.

### Tamaño equilibrado y estructura de la edad

Se supone que la población tiene tendencia a estabilizar su tamaño y distribución de edad en cada nivel del esfuerzo de pesca. De esta manera

en cada nivel de esfuerzo existe un tamaño equilibrado de la población asociado con una distribución correspondiente estable de la edad. Durante los períodos de transición entre los cambios en esfuerzo de pesca y los cambios concomitantes en el tamaño de la población, se supone que la estructura de la edad de la población se ajusta continuamente a la distribución estable de la edad correspondiente a los niveles de la población encontrada. Por lo tanto interpretamos la ecuación diferencial en (5) como si describiera el crecimiento de la población bajo el promedio de las condiciones ambientales y de pesca cuando la distribución de la edad asume continuamente la distribución estable de la edad con relación al tamaño variable de la población.

En realidad, durante los períodos de transición la distribución actual de la edad retrasará la distribución estable de la edad en tiempo según cambie el tamaño de la población, y por lo tanto (5) no describirá exactamente la tasa de cambio del tamaño poblacional bajo condiciones promedio. Sin embargo, si los cambios en la pesquería son graduales, la distribución transitoria de la edad en un momento dado no debe diferir grandemente de la distribución estable asociada de la edad, de modo que (5) dará una buena aproximación a la verdadera tasa de cambio. Los cambios grandes y rápidos del esfuerzo resultarán en (5) proporcionando una representación inferior a la verdadera tasa de cambio de la población. Las especies con ciclos relativamente cortos de generaciones, deben ajustarse más estrictamente a estas condiciones relativas al tamaño de la población y a la estructura de la edad.

### **Otros desfases cronológicos**

Se supone que el tamaño de la población en cualquier instante es el determinativo principal del potencial para el aumento de la población en dicho instante. Las poblaciones de tamaño reducido resultan favorables para un aumento, mientras que las de tamaño grande son menos favorables. A niveles bajos de la población se puede acelerar la tasa de crecimiento de los individuos y se puede también reducir la tasa de mortalidad natural mejorando tal vez el éxito de reproducción. A niveles altos, la competencia respecto a las cantidades limitadas de los nichos para la especie puede afectar algunos o todos estos componentes de la tasa de crecimiento de la población de tal modo que reduce el potencial de aumento. El modelo requiere que estos factores primordiales del crecimiento individual, mortalidad natural y reproducción respondan inmediatamente a los cambios en el tamaño de la población, mientras que en realidad estas reacciones pueden muy bien retrasarse. La reproducción, por ejemplo, se encuentra necesariamente retardada, y cualquiera que sea la relación que exista entre el tamaño de la población, distribución de edad y reproducción, para el stock, la reproducción durante los períodos de transición debe desviarse de aquella durante la estabilidad. Sin embargo, si los cambios son graduales, esta discrepancia disminuye.

### Población cerrada

La población debe ser una unidad precisa y autosuficiente. Los cambios significativos en el tamaño de la población causados por inmigración y/o emigración persistentes no relacionados con el tamaño de la población, no hacen posible el uso de este modelo para describir la dinámica de la población.

### Capturabilidad constante

Cada unidad de esfuerzo gastada, debe retirar en promedio, una fracción constante de la población. Cuando una porción variable de la población está sometida a explotación durante la historia pesquera, se violará esta suposición. Una pesquería en desarrollo, que se extiende en una área habitada por una población que se mezcla lentamente en toda su distribución, proporciona un ejemplo verosímil. Los cambios temporales en la eficiencia del equipo tales como los observados en la pesquería del atún aleta amarilla (Pella 1969) violan también la suposición a menos que el esfuerzo se ajuste a un nivel referido de eficiencia.

## ESTIMACION DE PARAMETROS

Presentamos en este estudio una técnica para la estimación de parámetros del modelo de producción de la historia de captura y esfuerzo del stock. Comenzamos por indicar la razón para nuestro método describiendo algunas técnicas basadas en un enfoque de linealización empleado actualmente para el caso especial del modelo de Schaefer. Después de indicar ciertas deficiencias de estos métodos, describimos nuestra técnica, que evita algunas de las dificultades en los métodos de linealización.

### Enfoque de linealización

Si siguiéramos el enfoque de Schaefer (1954, 1957) desarrollaríamos un modelo lineal de (5) mediante la integración a través de un intervalo de tiempo, digamos 1 año, para obtener

$$\Delta P = C_e - C \quad (15)$$

$$\Delta P = \int_{P(0)}^{P(1)} dP(t) \quad (16)$$

$$C_e = H \int_0^1 P^m(t) dt - K \int_0^1 P(t) dt \quad (17)$$

$$C = qf \int_0^1 P(t) dt. \quad (18)$$

Estamos trabajando en la suposición de que el esfuerzo de pesca permanece constante durante el año. La ecuación (15) es una formulación mate-

mática del hecho obvio que el cambio en el tamaño de la población durante el año,  $\Delta P$ , es la diferencia entre la captura de equilibrio,  $C_e$ , y  $C$ , la captura actual.

Avanzando el paralelismo del desarrollo de Schaefer fijáramos

$$C_e = H\bar{P}^m - K\bar{P} \tag{19}$$

donde

$$\bar{P} = \int_0^1 P(t) dt .$$

Puede presentarse aquí una objeción menor ya que la ecuación (19) es solamente una aproximación, dado que en general

$$\int_0^1 P^m(t) dt \neq \left[ \int_0^1 P(t) dt \right]^m . \tag{20}$$

Con  $m > 1$  puede demostrarse por medio de la desigualdad de Hölder que

$$\int_0^1 P^m(t) dt > \left[ \int_0^1 P(t) dt \right]^m \tag{21}$$

excepto cuando el stock está en equilibrio. Bajo condiciones de equilibrio los dos lados de la desigualdad en (21) son iguales.

Por lo tanto, para el modelo de Schaefer

$$\Delta P = C_e - C - B \tag{22}$$

donde  $C_e$  se proporciona en (19) con  $m = 2$  y  $B$ , la diferencia resultante entre la captura de equilibrio como se calcula en (19), menos aquella proporcionada por (17), no es negativa dependiendo su magnitud en  $H, K, q, f$ , y  $P(0)$ .

Regresamos luego a (4) integrando a través de un año para obtener la captura

$$C = qf\bar{P} \tag{23}$$

$$C = \int_0^1 dC(t) .$$

Dejamos  $\bar{U} = C/f = q\bar{P}$ .  $\bar{U}$  se denomina la captura anual por unidad de esfuerzo, y es directamente proporcional al tamaño promedio del stock durante el año.

Podemos entonces calcular  $\bar{P}$  por

$$\hat{\bar{P}} = \bar{U}/q \tag{24}$$

volviendo a formular (15) como

$$\Delta P = H(\bar{U}/q)^m - K(\bar{U}/q) - C \quad (25)$$

en la que las variables  $\bar{U}$  y  $C$  son observables. El cambio en el tamaño del stock en (25) queda por ser estimado.

Schaefer sugirió que el tamaño del stock a principios del año  $i$ , digamos  $P_i(0)$ , podría estimarse mediante la interpolación lineal entre los tamaños promedios del stock en los años  $i - 1$  e  $i$ , a saber,

$$\hat{P}_i(0) = (\bar{P}_{i-1} + \bar{P}_i)/2 . \quad (26)$$

El tamaño del stock a fin de año sería estimado por

$$\hat{P}_i(1) = (\bar{P}_i + \bar{P}_{i+1})/2 . \quad (27)$$

La diferencia entre estas dos estimaciones podría usarse para estimar el cambio en el tamaño del stock durante el año

$$\Delta \hat{P}_i = (\bar{P}_{i+1} - \bar{P}_{i-1})/2 . \quad (28)$$

En términos de la captura observable por esfuerzo en estos años, estimaríamos el cambio en tamaño del stock como

$$\Delta \hat{P}_i = (\bar{U}_{i+1} - \bar{U}_{i-1})/2q = \Delta U_i/q . \quad (29)$$

La sustitución de esta última expresión en (25) para el cambio en el tamaño del stock, de subíndices apropiados para identificar el año, y con algunas manipulaciones podemos llegar al modelo lineal

$$\Delta U_i = \frac{H}{q^{m-1}} \bar{U}_i^m - K\bar{U}_i - qC_i . \quad (30)$$

Hasta esta fase del desarrollo en esta sección, hemos mantenido la suposición implícita que el proceso de crecimiento de la población así como el de captura son determinísticos. La versión más factible del modelo en (14) requiere que cuando formemos la expresión lineal en (15) incluyamos un término errado

$$\gamma = \int_0^1 [\eta_1(t) - 1] [HP^m(t) - KP(t)] dt - \int_0^1 [\eta_2(t) - 1] qfP(t) dt .$$

El error adicional en la expresión (30) se debe a las suposiciones en (19) y (29). Representaremos todas estas fuentes, algunas aleatorias y otras no aleatorias, mediante un solo término de error  $\epsilon$  y escribiremos (30) como

$$\Delta U_i = \frac{H}{q^{m-1}} \bar{U}_i^m - K\bar{U}_i - qC_i + \epsilon_i . \quad (31)$$

La ecuación (31) puede ahora utilizarse para desarrollar una variedad de esquemas estimativos para  $m$  fija. La primera técnica que uno utilizaría

sería la de los mínimos cuadrados. El modelo es lineal, de modo que podrían utilizarse métodos de regresión convencionales para estimar los coeficientes, ejemplo, si dejamos

$$\begin{aligned} Y_i &= \Delta U_i \\ X_{1i} &= \bar{U}_i^m & \beta_1 &= H/q^{m-1} \\ X_{2i} &= \bar{U}_i & \beta_2 &= -K \\ X_{3i} &= C_i & \beta_3 &= -q \end{aligned}$$

entonces se podría escribir (31) de una forma más familiar

$$Y_i = \beta_1 X_{1i} + \beta_2 X_{2i} + \beta_3 X_{3i} + \epsilon_i \quad (32)$$

Conociendo los cálculos de  $\beta_i$ ,  $i = 1, 2, 3$ , y  $m$ , podemos obtener las estimaciones correspondientes de  $H$ ,  $K$ , y  $q$ .

Por otra parte, podríamos continuar el desarrollo de Schaefer al dividir (31) por  $\bar{U}_i$  para obtener

$$\frac{\Delta U_i}{\bar{U}_i} = \frac{H}{q^{m-1}} \bar{U}_i^{m-1} - K - qf_i + \epsilon'_i \quad (33)$$

Si nuestra información consiste de capturas anuales y esfuerzos observados para una serie de años  $n$ , podríamos dividir nuestras observaciones en dos subseries, colocando la información para los primeros años  $n^*$  en una subserie y las observaciones restantes en la otra. Schaefer, que nosotros sepamos, nunca ha sugerido un criterio para dividir observaciones y por lo tanto el proyecto carece de originalidad en el sentido que dos individuos que analicen la misma serie de información, pueden dividir las observaciones en diferente forma obteniendo por lo tanto diferentes estimaciones para los parámetros.

Como indicamos en la secuela, la información debe dividirse en subseries correspondientes a intervalos de años en los que se crea haya sido grande el cambio en la población.

Una vez que se divida la información se puede formular un sistema de tres ecuaciones lineales en tres incógnitas:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n^*} \frac{\Delta U_i}{\bar{U}_i} &= \frac{H}{q^{m-1}} \sum_{i=1}^{n^*} \bar{U}_i^{m-1} - n^*K - q \sum_{i=1}^{n^*} f_i \\ \sum_{i=n^*+1}^n \frac{\Delta U_i}{\bar{U}_i} &= \frac{H}{q^{m-1}} \sum_{i=n^*+1}^n \bar{U}_i^{m-1} - (n - n^*)K - q \sum_{i=n^*+1}^n f_i \end{aligned} \quad (34)$$

$$\sum_{i=1}^n \left| \frac{\Delta U_i}{\bar{U}_i} \right| = \sum_{[i:\Delta U_i > 0]} \left[ \frac{H}{q^{m-1}} \bar{U}_i^{m-1} - K - qf_i \right] -$$

$$\sum_{[i:\Delta U_i < 0]} \left[ \frac{H}{q^{m-1}} \bar{U}_i^{m-1} - K - qf_i \right]$$

donde hemos indicado arbitrariamente

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{n^*} \epsilon'_i &= \sum_{i=n^*+1}^n \epsilon'_i = 0 \\ \sum_{[i:\Delta U_i > 0]} \epsilon'_i &- \sum_{[i:\Delta U_i < 0]} \epsilon'_i = 0 \end{aligned}$$

que pueden ser aproximaciones razonables. El sistema se resuelve fácilmente para  $m$  fija y las estimaciones de  $H$ ,  $K$ , y  $q$  se obtienen de nuevo con facilidad.

Hasta este momento se han descrito dos esquemas que podrían utilizarse para estimar los parámetros de nuestro modelo para  $m$  fija. De aquí se puede desarrollar otros basados en este plan de linealización, pero estos serán suficientes.

Además de nuestras críticas anteriores de menor importancia, el enfoque de linealización como se presenta aquí depende de las estimaciones de los cambios en los tamaños del stock que puede demostrarse están en grave error bajo el sistema asumido de un stock bajo explotación como se define en (5). Si aproximamos la ecuación diferencial en (5) por medio de una ecuación diferencial finita, podemos computar el tamaño del stock en instantes discretos por

$$P(t + \Delta t) = P(t) + [HP^m(t) - KP(t) - qf(t)P(t)]\Delta t \quad (35)$$

y la captura que resulte de la pesca entre  $t$  y  $t + \Delta t$  por

$$C(t, t + \Delta t) = qf(t)P(t)\Delta t. \quad (36)$$

Conociendo los valores para  $H$ ,  $K$ ,  $m$ ,  $q$ , el tamaño inicial de la población  $P(0)$ , y la función del esfuerzo  $f(t)$ , se puede computar una historia de captura utilizando estas dos ecuaciones. Pella (1967) ha computado tal historia de captura para el modelo de Schaefer. Determinó

$$\begin{aligned} m &= 2 \\ H &= -8.814 \times 10^{-3} \\ K &= -2.600 \\ q &= 3.8 \times 10^{-2} \\ P(0) &= 295 \\ \Delta t &= 0.1 \end{aligned}$$

Estos parámetros, con la excepción de  $\Delta t$ , se escogieron para que correspondieran a las estimaciones obtenidas para el modelo de Schaefer para la pesca del atún aleta amarilla en el Océano Pacífico oriental (Schaefer



1957). El stock se avalúa en millones de libras y el esfuerzo en miles de días por barcos (standardizado a barcos de carnada de 201 y 300 toneladas cortas de capacidad). La aproximación por la ecuación finita de diferencia puede demostrar ser excelente mediante su comparación con las análogas integradas de (35) y (36). En general, no es posible obtener la forma integrada correspondiente a (36). La función de esfuerzo se tomó como una función escalonada, cambiando anualmente pero permaneciendo constante dentro de los años. El esfuerzo utilizado fue el observado en la pesca del atún aleta amarilla desde 1935 hasta 1964 (Tabla 6). Las estadísticas producidas por esta simulación se presentan en la Tabla 1. El punto interesante aquí es la comparación entre los cambios observados en el tamaño de la población y las estimaciones obtenidas por la interpolación lineal con el coeficiente de capturabilidad conocido (Tabla 1; Figura 4). Es evidente que las estimaciones en la situación descrita son pobres ya que generalmente subestiman los cambios reales. Generalmente los valores

Hasta esta fase del desarrollo en esta sección hemos mantenido la absolutos de los errores son solamente algo menores que los valores absolutos correspondientes a los cambios del stock en sí. Es fácil demostrar gráficamente como ocurren estos errores (Figura 5). Este plan ilustra el tamaño del stock bajo una historia del esfuerzo de pesca caracterizada por la sobrepesca, seguida por una subpesca para luego continuar con una sobrepesca. Por sobrepesca y subpesca queremos simplemente indicar que el nivel del esfuerzo de pesca es tal que el stock disminuye y aumenta respectivamente. Observamos que mediante una interpolación lineal entre  $\bar{P}_1$  y  $\bar{P}_2$  tenemos una estimación de  $P(1)$  con un gran error positivo. La interpolación entre  $\bar{P}_2$  y  $\bar{P}_3$  resulta en una estimación de  $P(2)$  con un gran negativo. Estimariamos  $P(2) - P(1)$ , un gran cambio positivo por  $\hat{P}(2) - \hat{P}(1)$ , un pequeño cambio negativo. El modelo opuesto de pesca—subpesca, sobrepesca, subpesca—produce el mismo resultado.

La historia de la captura y esfuerzo de la pesca del atún aleta amarilla verifica nuestra teoría que la fórmula de interpolación lineal no estima satisfactoriamente los cambios de la población en esta pesquería. Llegamos a esta conclusión, basados en los siguientes puntos que serán demostrados inmediatamente para la pesquería del atún aleta amarilla, de datos recopilados desde 1934 hasta 1965 (Tabla 6): (1) el modelo de regresión lineal (31) explica poco de la variabilidad en  $\Delta U$  (o estimaciones de los cambios de la población, escalados en una forma equivalente); (2) el modelo de Schaefer con los parámetros estimados por el método Schaefer (34) explica más del 80 por ciento de la variación en las capturas; y (3) el método Schaefer trae consigo mucha cancelación en errores de las estimaciones de los cambios de la población.

Cuando ajustamos la ecuación de regresión lineal (31) por mínimos cuadrados a la información de captura y esfuerzo de la pesca de atún aleta

amarilla, digamos desde 1934 hasta 1965, encontramos que el modelo da cuenta de menos del 11 por ciento de la suma total de cuadrados. El ajuste es tan inferior que se podría objetar con razón que el modelo logístico es inapropiado. (Ciertas estimaciones de los parámetros obtenidas por este ajuste de los mínimos cuadrados con  $m = 2$  se presentan en la Tabla 2). Sin embargo, es patente que los errores en la estimación de cambios del stock contribuyen grandemente a los errores residuales del modelo ajustado. Ya que si suponemos que el tamaño inicial del stock a principios de 1934 fue aproximadamente proporcional a la captura por unidad de esfuerzo durante ese año, hacemos que las constantes del modelo de Schaefer coincidan con las estimaciones obtenidas utilizando el método de Schaefer (Tabla 2) para esta pesquería, y computamos las capturas pronosticadas por el modelo como se hizo al computar las estadísticas de la Tabla 1, encontramos que el modelo da razón de más del 80 por ciento de la variación en las capturas, ej.,

$$R = \frac{\sum_i (C_i - \bar{C})^2 - \sum_i (C_i - \hat{C}_i)^2}{\sum_i (C_i - \bar{C})^2} > .80 \quad (37)$$

donde  $\hat{C}_i$  = captura pronosticada para el año  $i$

$C_i$  = captura actual para el año  $i$

y el total se extiende desde 1935 hasta 1964. Computamos  $R$  desde 1935 hasta 1964 en lugar de 1934 hasta 1965 ya que la técnica de mínimos cuadrados se ajusta a estos años, e.d., se pierden los dos años de los extremos al estimar el cambio de tamaño de la población por medio de la fórmula de interpolación.

La estadística  $R$  aquí es una análoga del coeficiente de correlación de la teoría de regresión. Es una medida de la mejora en el ajuste de la historia de captura por medio del modelo de Schaefer con respecto a la media aritmética. De manera que si el modelo de Schaefer no se ajusta a las capturas mejor que la media,  $R = 0$ . Si el modelo se ajusta perfectamente a las capturas,  $R = 1$ . Si la media proporciona un mejor ajuste,  $R < 0$ . Por cierto el modelo de Schaefer se ajusta a la historia de captura de la pesca del atún aleta amarilla notablemente bien cuando se observa bajo este aspecto.

El esquema de la estimación de Schaefer evita parcialmente los errores al estimar los cambios en el tamaño de la población durante años individuales, por la formación de sumas de estimaciones ponderadas de los cambios de la población a través de períodos de años, o sea, a través de  $n^*$  y  $n-n^*$  años en (34). Una gran cantidad de cancelaciones ocurre en este proceso de sumas. Si formamos una suma inponderada de estimaciones de

cambio de la población a través de  $k$  años para estimar el cambio total a través de esos años,  $\Delta P$  total ( $k$ ), tenemos

$$\hat{\Delta P} \text{ total } (k) = \sum_{i=1}^k \hat{\Delta P}_i = \left( \frac{\bar{U}_k + \bar{U}_{k+1}}{2q} \right) - \left( \frac{U_0 + U_1}{2q} \right) \quad (38)$$

donde todos los términos intermedios se cancelan. Por lo tanto estimamos el cambio en tamaño del stock a través de  $k$  años por la diferencia de las medias de las estimaciones de los tamaños medios de la población durante los últimos 2 años y los primeros 2 años de  $k + 2$  años de datos. Si el cambio es grande a través de  $k$  años, el error al estimar el cambio del stock como se indica arriba será relativamente pequeño en comparación al cambio actual del stock, mientras que los errores relativos respecto a los cambios más erráticos y menores durante años individuales pueden ser mucho más grandes. Un rápido examen de la información del atún aleta amarilla indica que un gran cambio en el tamaño de la población ha ocurrido desde 1934, pero que la declinación se ha visto interrumpida en repetidas oportunidades por períodos de crecimiento. Las ponderaciones por la inversión de la captura por esfuerzo usadas por Schaefer tornan menos convincente nuestro argumento de cancelación de errores pero indudablemente se cancela mucho del error de las estimaciones individuales. Los términos que se cancelan en (38) están separados por un término individual. En la estimación ponderada los denominadores de los términos correspondientes son las capturas por esfuerzo en años alternativos. Siempre que la captura por unidad de esfuerzo en estos años no sea muy diferente, debe producirse la cancelación.

Hasta el momento nuestros resultados son convincentes de la superioridad del método de Schaefer con respecto a la técnica de mínimos cuadrados. Por cierto sugeriríamos a cualquiera que deseara utilizar esta técnica que la información se divida en puntos de tiempo entre los cuales se crea que hayan ocurrido grandes cambios del stock. Si fuera posible esta división, debería eliminar las estimaciones absurdas registradas por Pella (1967) utilizando el método de Schaefer y por Southward (1968) quien utilizó una ligera variación del método.

Pella (1967) desarrolló algunas técnicas adicionales como variantes del enfoque de linealización. Al computar las estimaciones de los parámetros para la pesca del atún aleta amarilla utilizando la información de 1934 hasta 1965, obtuvo valores para los parámetros clasificándolos entre aquellos de la Tabla 2. Algunas de las estimaciones no pudieron considerarse como inferiores a aquellas obtenidas por el método de Schaefer por ser irreales, como se hizo con las estimaciones de los mínimos cuadrados. De esta manera, es posible obtener varias estimaciones de cualquier grupo de información de captura y esfuerzo mediante el enfoque de linealización.

Proponemos ahora un criterio mediante el cual se puedan comparar las estimaciones de los parámetros por medio de diferentes técnicas, para la bondad del ajuste de los datos de captura y esfuerzo, y desarrollamos un esquema para determinar las mejores estimaciones de los parámetros según nuestro criterio. La técnica de estimación nos permitirá además estimar  $m$ , que hasta ahora se ha supuesto fija por el investigador. Con una estimación de  $m$  tendremos una idea del grado y dirección de la asimetría de la curva de producción del stock.

### Criterio del mínimo de S

Proponemos ahora una medida razonable de la bondad del ajuste de nuestro modelo de producción a un grupo de datos de captura y esfuerzo basados en las mismas observaciones de captura y esfuerzo. Se ha evitado la introducción del error extrínseco a las observaciones al estimar los cambios del stock. Supondremos que la pesquería ha estado bajo observación durante algún tiempo en el cual la captura y esfuerzo son conocidos en cada uno de los subintervalos  $n$  de duración,  $\Delta t_i, i = 1, \dots, n$ . Los subintervalos, claro está no necesitan ser iguales. Supongamos que la secuencia del esfuerzo  $[E] = (E_1, E_2, \dots, E_n)$  es observada durante el estudio. Aquí  $E_i$  es el número actual de las unidades del esfuerzo gastado durante el intervalo de tiempo  $i^{avo}$ . Nuestra discusión anterior trataba de intervalos de longitud unitaria, pero ahora para permitir intervalos variables de tiempo introducimos la anotación  $E$ . Suponiendo que el esfuerzo permanece constante durante el intervalo  $i^{avo}$ , lo convertiríamos a la medida anterior del esfuerzo mediante el escalamiento de  $E_i$  por la inversa de  $\Delta t_i$ , o sea,  $f_i = E_i/\Delta t_i$ . Dejemos que  $[C] = (C_1, C_2, \dots, C_n)$  sea la secuencia correspondiente de las capturas observadas. Dejemos que  $[\hat{C}(H, K, q, m, P(0))] = (\hat{C}_1, \hat{C}_2, \dots, \hat{C}_n)$  sea la secuencia pronosticada de las capturas por la integración de la ecuación diferencial (4) con  $P(t)$  dado por (7) utilizando los parámetros  $H, K, q$ , y  $m$  cuando el tamaño inicial del stock al principio del primer intervalo de tiempo era  $P(0)$  y la secuencia de esfuerzo era  $[E]$ . Dejemos  $\beta = [(H, K, q, m, P(0))]$ . Si

$$S(H, K, q, m, P(0)) = \sum_{i=1}^n (C_i - \hat{C}_i)^2 \quad (39)$$

entonces  $(\hat{H}, \hat{K}, \hat{q}, \hat{m}, P(\hat{0}))$  se define aquí como la mejor estimación de los parámetros del modelo generalizado de producción, siempre y cuando que para todos los puntos factibles en  $\beta$ ,  $S$  sea mínima en  $(\hat{H}, \hat{K}, \hat{q}, \hat{m}, P(\hat{0}))$ . Indicamos de paso que

$$R = \frac{\sum_{i=1}^n (C_i - \bar{C})^2 - \sum_{i=1}^n (C_i - \hat{C}_i)^2}{\sum_{i=1}^n (C_i - \bar{C})^2} \quad (40)$$

se lleva al máximo en la mejor estimación. Por lo tanto, hemos escogido como la mejor estimación de los parámetros del modelo generalizado de producción aquel punto en el espacio paramétrico por el cual la proporción máxima de la variación en las capturas se explica por el modelo en nuestro sentido especialmente definido.

La superficie  $S$  en el espacio  $\beta$  no puede en general expresarse en forma algebraica, ya que, como mencionamos anteriormente, una expresión explícita para la integral de (4) conociendo  $P(t)$  según (7), no puede encontrarse generalmente. Podemos, como demostraremos a continuación, obtener una buena aproximación numérica de la integral. Por lo tanto, a fin de obtener la mejor estimación de los parámetros del modelo debemos llevar a cabo una búsqueda en la superficie  $S$  en el espacio  $\beta$  aproximando numéricamente  $S$  a puntos seleccionados de tal manera que nos lleven al punto que reduce al mínimo cada parámetro. La rutina de exploración que describimos a continuación está sujeta a los riesgos usuales al examinar porciones de una superficie para localizar un extremo. La rutina puede completar su exploración en un mínimo relativo si la superficie tiene mínimas relativas además del mínimo absoluto. Por lo tanto, las estimaciones producidas por el procedimiento deben tratarse con reserva. En nuestra experiencia con varias series de datos pesqueros, la superficie funcionó bien con un mínimo evidente y sin mínimo relativo.

**Rutina exploratoria**

Las computaciones requeridas para la exploración a través de  $S$  son tan extensas que el método se vuelve impráctico si no se cuenta con un computador electrónico de alta velocidad. Procedemos ahora a describir un programa de cómputo, que se llamará en adelante GENPROD, que localizará el punto mínimo, para la  $m$  fija, en un subespacio de  $\beta$ ,  $\beta^* = [(H, K, q, P(0))]$ , con la precisión que se desee. El programa de cómputo permite al investigador variar  $m$  a través de una amplitud verosímil de valores y a su vez encontrar  $\hat{m}$  con tanta precisión como el investigador crea necesario, encontrando así la mejor estimación en  $\beta$ .

Hemos escrito en realidad el programa para explorar en una transformación de  $\beta^*$ ,  $\beta^{**} = [(F_{opt}, q, r, U_{max})]$ , para la  $m$  fija. La transformación de  $\beta^*$  a  $\beta^{**}$  se define como sigue:

$$F_{opt} = \frac{K(1 - m)}{mq}$$

$$\begin{aligned}
 q &= q \\
 r &= P(0)/P_{max} = P(0)/(K/H)^{\frac{1}{m-1}} \\
 U_{max} &= q(K/H)^{\frac{1}{m-1}} .
 \end{aligned}
 \tag{41}$$

Aquí  $F_{opt}$ , según se define anteriormente, es el esfuerzo requerido para mantener la población a su tamaño óptimo y para obtener el rendimiento máximo sostenible. El parámetro  $q$  es por supuesto el coeficiente de capturabilidad. El parámetro  $r$  es la razón del tamaño del stock en el momento cuando la pesquería se observa por primera vez en relación al tamaño máximo del stock.  $U_{max}$  es la captura máxima por unidad de esfuerzo que se observaría cuando el stock está en su máximo. La transformación inversa es como sigue:

$$\begin{aligned}
 H &= \left(\frac{m}{1-m}\right) \left(\frac{q}{U_{max}}\right)^{m-1} qF_{opt} \\
 K &= \left(\frac{m}{1-m}\right) qF_{opt} \\
 q &= q \\
 P(0) &= rU_{max}/q.
 \end{aligned}
 \tag{42}$$

La transformación es uno-a-uno si solamente se permiten los valores factibles de los parámetros. Evidentemente, explorando a través de  $\beta^*$  o  $\beta^{**}$  para el mínimo de  $S$  para la  $m$  fija, es equivalente en el sentido que una vez que se localiza el punto mínimo en cualquiera de los subespacios, el punto mínimo en el otro se determina por la transformación apropiada. Nuestro propósito al hacer la transformación es facilitar la conjetura de los valores iniciales de los parámetros del modelo que se requiere para iniciar la exploración. La intuición del investigador se inclinará fuertemente sin duda a  $\beta^{**}$  en lugar de  $\beta^*$ .

El programa GENPROD se inicia al computar  $H$ ,  $K$ , y  $P(0)$  según las conjeturas de  $F_{opt}$ ,  $q$ ,  $r$ , y  $U_{max}$  para una  $m$  determinada. El programa computa luego las capturas pronosticadas  $[\hat{C}]$ , mediante la aproximación de la integración de la ecuación (4) con  $P(t)$  dado por (7). Cada uno de los intervalos de tiempo  $n$  se divide en subintervalos  $N$  (la longitud de los subintervalos en el intervalo de tiempo  $i^{avo}$  es  $\Delta t_i/N$ ). La persona que lo utiliza especifica el valor de  $N$ . La captura pronosticada durante el intervalo  $i^{avo}$  es aproximada por

$$\hat{C}_i = \int_{t_{i-1}}^{t_i} qf_i P(t) dt \cong qf_i \sum_{j=1}^N \frac{1}{2}(P_{ij} + P_{i(j+1)}) \frac{\Delta t_i}{N}$$

donde  $P_{ij}$  es el tamaño pronosticado de la población al principio del subintervalo  $j^{avo}$  en el intervalo de tiempo  $i^{avo}$  y  $f_i = E_i/\Delta t_i$  es el esfuerzo de

pesca por unidad de tiempo. Los  $P_{ij}$  se computan por la ecuación (7). Las  $f_i$  se computan internamente en GENPROD. *La persona que utiliza GENPROD proporciona las capturas observadas [C] los esfuerzos observados [E], y la duración de los períodos de tiempo [ $\Delta t$ ].* En la mayor parte de las situaciones, el cambio en el tamaño de la población durante cualquier intervalo de tiempo puede representarse razonablemente con una línea recta y  $N$  se ajusta de modo que sea igual a 1. Se reduce el error de estimación aumentando  $N$ .

GENPROD comienza ahora a modificar las conjeturas y explora las mejores estimaciones en  $\beta^{**}$ . Cada vez que se modifican las conjeturas, se vuelve a calcular  $[\hat{C}]$  hasta que se encuentre el mínimo de  $S$ . La persona que lo utiliza necesita proporcionar uno o más valores de  $m$  y las conjeturas iniciales de  $F_{opt}$ ,  $q$ ,  $r$ , y  $U_{max}$  cuando usa GENPROD. Asimismo, GENPROD exige que la persona que lo utiliza proporcione intervalos escalonados para  $F_{opt}$ ,  $q$ ,  $r$ , y  $U_{max}$  que se designan aquí como  $\Delta F$ ,  $\Delta qm$ ,  $\Delta r$ , y  $\Delta U$ , respectivamente, y la persona que lo utiliza debe proporcionar límites inferiores y superiores para cada uno de los cuatro parámetros. Los intervalos escalonados se usan en la exploración a través de la amplitud de posibles soluciones para cada parámetro como se describe a continuación.

La técnica de exploración fue programada originalmente por Beisinger y Bell (1963). La conjetura inicial provista por la persona que lo utiliza se toma como punto base  $(F_{opt}, q, r, U_{max})$ , para la exploración, y la rutina inicia una fase exploratoria. Evalúa  $S$  en el punto  $(F_{opt} + \Delta F, q, r, U_{max})$ , y si  $S$  en  $(F_{opt} + \Delta F, q, r, U_{max})$  es menos que  $S$  en  $(F_{opt}, q, r, U_{max})$ , entonces  $(F_{opt} + \Delta F, q, r, U_{max})$  se toma como un nuevo punto básico y la rutina explora en la dirección de  $q$ . Por otra parte, si  $S$  es inferior en el punto inicial básico, la rutina prueba el punto  $(F_{opt} - \Delta F, q, r, U_{max})$ , y si  $S$  es inferior en esta preferencia que en  $(F_{opt}, q, r, U_{max})$ , entonces  $(F_{opt} - \Delta F, q, r, U_{max})$  se toma como un nuevo punto básico; si no, retiene el antiguo punto básico, y en cualquiera de los casos, comienza a explorar en la dirección  $q$ . De una manera semejante cada uno de los ejes restantes del espacio del parámetro correspondiente a  $r$  y  $U_{max}$  se explora y al finalizar esta exploración se hace una verificación para ver si el punto básico ha cambiado. Si el punto hubiera cambiado, se inicia una fase basada en una pauta predeterminada; de otra manera, la rutina entra nuevamente en la fase exploratoria con los intervalos escalonados divididos por 10 para cada parámetro. En la fase basada en una pauta predeterminada la rutina ensaya un escalón de una pauta predeterminada que es una combinación de todos los movimientos satisfactorios en la fase exploratoria anterior. Este escalón de una pauta predeterminada se repite hasta que ya no resulte en una disminución en el valor de la función  $S$ , a cuyo tiempo la rutina regresa a la fase exploratoria con los intervalos escalonados inmutables para los parámetros. La rutina se detiene cuando la fase exploratoria, con los intervalos designados divididos por  $10^{KK}$  ( $KK$  debe ser especificado por la

persona que lo utiliza) no alcanza a cambiar el punto básico más reciente. Durante todo el proceso, se puede percibir mediante una prueba el punto básico más reciente. Durante todo el proceso se puede percibir mediante una prueba las veces que una fase se mueva fuera de los límites inferiores o superiores especificados por la persona que lo utiliza, y el punto de prueba retorna nuevamente al límite. Las mejores estimaciones de los parámetros en  $\beta^{**}$  son aquellas que corresponden al valor mínimo que se pueda encontrar de  $S$ .

Ya que se requieren conjeturas al utilizar GENPROD, es apropiado mencionar algunas indicaciones para su evaluación. La situación general se presenta como una en la que los datos (de captura y esfuerzo) se distribuyen a través de una amplitud de tamaños del stock, incluyendo el óptimo. La técnica sugerida es escoger  $F_{opt}$  igual a la media del esfuerzo observado; escójase  $U_{max}$  igual a la captura máxima observada por unidad de esfuerzo; escójase  $P_{max}$  igual a 4 veces la captura máxima observada; y ajústese  $q$  igual a  $U_{max}$  dividida por  $P_{max}$ ; escójase  $r$  igual a 0.8. Los límites inferiores de  $F_{opt}$  y  $U_{max}$  se ajustan en 1/10 de las conjeturas y los límites superiores se ajustan a 10 veces las conjeturas. Los límites de  $q$  deben ser más liberales, digamos 1/100 y 100 veces. Los límites de  $r$  son evidentemente 0 y 1. Los valores para los intervalos escalonados se ajustan simplemente para que sean equivalentes a las conjeturas. Estas conjeturas se basan en la suposición de que todos los  $\Delta t_i = 1$ .

Realmente, si se sabe que los datos de captura-esfuerzo fueron obtenidos de una sección de la amplitud de tamaño del stock o de algunos  $\Delta t_i \neq 1$ , entonces el proceso de conjetura debe modificarse. Si existieran serias dudas, uno debe hacer conjeturas de acuerdo a lo sugerido ajustando al mismo tiempo límites muy amplios, utilizando intervalos escalonados relativamente grandes para una rápida exploración a través de la amplitud. Si cualquiera de las estimaciones finales son iguales a un límite, los datos deben ser analizados nuevamente con límites más amplios si la persona que los utiliza no considera impracticable las soluciones más allá de los límites. Respecto a los valores de  $m$ , es apropiado comenzar la búsqueda escogiendo una amplitud de distribución mayor que 0 de los valores pero menor que 4 ( $m = 1$  debe excluirse). Si se conoce poco acerca de la forma de la curva de producción, trátase 0.4, 0.8, 1.2, 1.6, 2.0, 2.4, 2.8, y 3.2 para una primera pasada, luego trátase valores adicionales cuando se determine la amplitud aproximada examinando los valores de  $S$ .

Varios factores influirán en la cantidad de tiempo necesaria en el computador para hallar una solución. Los dos más importantes son los valores de  $N$  y  $KK$ , ya que cada uno de estos aumenta automáticamente la cantidad de cómputo según llegan a ser más grandes. Al duplicar  $N$  se duplicará aproximadamente la computación. Al incrementar  $KK$  se reduce la tasa en la que ocurre la búsqueda y a menos que la misma se acerque a la estimación, la convergencia puede ser muy lenta. Sería aconsejable en las



pasadas iniciales, ajustar  $N = 1$ ,  $KK = 2$ , utilizando valores de los intervalos escalonados que efectuarán la búsqueda a través de toda la amplitud con pocos escalones. Se debe subrayar que si existe información independiente respecto a uno o más de los parámetros, ésta puede incorporarse estableciendo límites muy estrechos. Esto acelerará el tiempo de cómputo. Una computadora CDC 1604 utilizó un tiempo de ejecución de 2 minutos, 14 segundos con  $N = 1$ ,  $KK = 3$ , y  $n = 34$  para seis valores de  $m$ .

Las instrucciones para arreglar las tarjetas de los datos de entrada se indican en el Apéndice. El resultado de GENPROD se indica en la Tabla 7, que relaciona la terminología del programa a la terminología de este estudio. El resultado debe explicarse a sí mismo, excepto que los períodos (AL MOMENTO = AT TIME en inglés) dados son los períodos al final del intervalo y los tamaños de la población dados son aquellos que corresponden al final de cada intervalo. El esfuerzo y la captura son aquellos durante el intervalo.

#### Datos para el ajuste

Suponiendo que el modelo sea apropiado para una especie determinada, los únicos datos necesarios para estimar los parámetros son la captura, esfuerzo y tiempo. Para una captura total determinada a través de cierto período de tiempo, los datos deben presentarse en términos de intervalos de tiempo. El caso corriente sería captura por año durante algunos años. En cada intervalo de tiempo debe disponerse del número de las unidades de tiempo ( $\Delta t_i$ ), de la captura ( $C_i$ ) y del esfuerzo ( $E_i$ ). Los valores de  $C_i$  y  $E_i$  pueden ser cero, tal como en el caso de temporadas de veda. En aplicaciones de pesquerías, la suposición corriente sería que el crecimiento en biomasa del stock podría ser aproximado por el modelo. Por lo tanto la captura debería considerarse en términos de peso. La unidad de esfuerzo es arbitraria, pero debe standardizarse para conformar con la conjetura que  $q$  es constante. Como el modelo tiene cinco parámetros, por lo menos deben estar representados seis diferentes tamaños de población en los datos captura-esfuerzo. Claro está que si uno está dispuesto a suponer un valor de  $m$ , los números de los parámetros y los puntos requeridos de los datos se reducen por uno.

En algunos casos, no se encuentran directamente disponibles la captura y esfuerzo para cada intervalo de tiempo, pero pueden calcularse según otras fuentes de información. Se puede estimar de una manera directa el esfuerzo ( $E_i$ ) si se conocen las capturas ( $C_i$ ) y la captura promedio por unidad de esfuerzo ( $\bar{U}_i$ ). Para algunas pesquerías, la mortalidad instantánea de pesca puede estimarse sin conocer el esfuerzo o captura por unidad de esfuerzo (ej. Murphy 1966). Los esfuerzos se estiman como proporcionales a las mortalidades instantáneas de pesca.

### EJEMPLOS DE PROBLEMAS

Se ha explorado la utilidad de GENPROD mediante su aplicación a dos especies de peces. El primer ejemplo se presenta según los experimentos en la explotación de gambusinos (*Lebistes reticulatus*) por Silliman y Gutsell (1958). Los datos sobre los gambusinos son particularmente útiles para exponer las deficiencias del modelo y demostrar la utilidad del esquema de ajustamiento. El segundo ejemplo proviene de las estadísticas de captura (Bayliff 1967) de atún aleta amarilla (*Thunnus albacares*) en el Océano Pacífico Oriental. Se intentará en el caso mencionado establecer últimamente porqué las capturas pronosticadas varían a veces considerablemente con relación a las capturas observadas.

#### Gambusinos

Silliman y Gutsell (1958) mantuvieron cuatro poblaciones de gambusinos bajo condiciones ecológicas similares; excepto dos de las mismas (A y B) fueron sometidas a diferentes tasas de pesca mientras que las otras dos (C y D) no se pescaron. La técnica de pesca utilizada en los gambusinos incluye la remoción sistemática de cada pez  $n^{\text{avo}}$  en puntos de tiempo separados por intervalos de 3 semanas, dependiendo  $n$  de la tasa de pesca. Las tasas de remoción para cantidades de peces fueron 10, 25, 50 y 75 por ciento, cada período de 3 semanas. El esquema de captura implicaría que cada pez explotable tuvo una oportunidad igual de estar en la captura en el momento que se efectuaron las remociones y por lo tanto aproximadamente cada gramo  $n^{\text{avo}}$  de la población debió haber entrado en la captura.

Silliman y Gutsell construyeron artificialmente una cronología del esfuerzo para los experimentos de gambusinos suponiendo que los porcentajes de remociones en cada período de 3 semanas eran proporcionales a las medidas del esfuerzo. Igualaron la tasa del 10 por ciento a 1 unidad de esfuerzo, la del 25 por ciento a 2.5 unidades de esfuerzo, la del 50 por ciento a 5 unidades de esfuerzo, y la del 75 por ciento a 7.5 unidades de esfuerzo. Esto significa que  $q = 0.1$ . Como decidimos ajustar el modelo en términos de la biomasa en lugar de números, computamos los porcentajes de remociones actuales en peso para cada período de tiempo. Los valores del esfuerzo se construyeron de acuerdo a Silliman y Gutsell escalando el porcentaje de remociones en peso, por un décimo, indicando nuevamente que  $q = 0.1$ . Por lo tanto las capturas (C) que utilizamos correspondían exactamente a aquellas anotadas en la Tabla 8 de Silliman y Gutsell. Los esfuerzos (E) que utilizamos correspondían muy de cerca a aquellos indicados en esa misma tabla, aunque nosotros en realidad los computamos según su Tabla 4.

Como las remociones se hicieron en puntos discretos de tiempo separados por intervalos de 3 semanas, hemos tratado de afectar el proceso de captura dividiendo cada intervalo de tiempo en períodos de pesca libres y de veda. Supusimos que los gambusinos estuvieron expuestos a la pesca

solamente durante el último centésimo de cada período de 3 semanas. Durante el período de veda en cada intervalo de 3 semanas la captura y esfuerzo se ajustaron para que fueran equivalentes a 0. Las capturas ( $c$ ) actualmente usadas en el ajuste del modelo, consistieron por lo tanto de aquellas anotadas por Silliman y Gutsell, habiéndose precedido cada una por una captura de 0. Asimismo existe un aumento similar de la cronología del esfuerzo ( $E$ ). Un ajuste más exacto de la información sobre los gambusinos necesariamente consideraría las remociones como verdaderas remociones puntuales. Nuestro propósito en este estudio, sin embargo, es demostrar tanto la utilidad del modelo general de producción como del programa de ajuste GENPROD. Además dudamos que un tratamiento más refinado de esta información al ajustar el modelo, alteraría de una manera significativa las estimaciones de los parámetros que vamos a presentar. Realmente, la mayor parte del ajustamiento que vamos a describir se efectuó por segunda vez en la suposición que se realizó una pesca continua durante los períodos de 3 semanas. Las estimaciones de los parámetros que resultaron de estos ajustes coincidieron satisfactoriamente con aquellos que estamos anotando los que fueron computados bajo el patrón más realista de pesca discontinua que hemos adoptado.

Algunos resultados del ajuste inicial de información sobre las poblaciones de gambusinos A y B se han ilustrado por medio de las Figuras 6 y 7. La parte inferior de las figuras 6 y 7 muestran la relación entre la cronología observada de captura de cada población y la cronología pronosticada del ajuste. Los tamaños observados y pronosticados de población, producidos por estos ajustes se presentan en la parte superior de las Figuras 6 y 7. A pesar de los ajustes obviamente excelentes de la información de captura para ambas poblaciones, se sobreestimó la biomasa de la población en ambos casos, especialmente durante los dos primeros tercios del experimento. Las tendencias en la historia actual del tamaño poblacional fueron descritas adecuadamente por el modelo.

Al tratar de explicar la sobreestimación de la biomasa de población, se observó la subestimación de  $q$ . (Tabla 3; parámetros sin restricción y mínima  $S$ ). Luego restringimos  $q$  a 0.1 (los límites inferiores y superiores de  $q$  se establecieron como iguales a 0.1) y volvimos a calcular los parámetros restantes para la población A (Tabla 3;  $q$  restringida). Los resultados de este nuevo ajuste (Fig. 8) indican una mejora considerable en la relación entre las cronologías pronosticadas y observadas del tamaño de la población para el caso A.

El máximo de biomasa estimado ( $P_{max}$ ) de 40 a 50 gramos con  $q$  irrestricta es una sobreestimación de estas poblaciones de gambusinos bajo las condiciones experimentales. Las dos poblaciones de control inexplotadas parecieron oscilar alrededor de un valor entre los 30 a 36 gramos. De esta manera parece correcta la estimación de  $P_{max}$  para la población A con  $q$  restringida.

Las estimaciones de  $C_{max}$  y  $F_{opt}$  de los diferentes ajustes son relativamente constantes. Las estimaciones de  $C_{max}$  se comparan ventajosamente con la conclusión empírica de Silliman y Gutsell (véase su Figura 14), pero las estimaciones de  $F_{opt}$  son inferiores a las sugeridas por las Figuras 12 y 13 de Silliman y Gutsell.

La evidencia empírica de la información combinada para las poblaciones A y B (Figura 14 de Silliman y Gutsell) sugiere una curva asimétrica hacia la derecha de la producción del stock. El ajuste de la población A indicó la asimetría de esta curva hacia la derecha, pero la población B pareció tener una curva simétrica de la producción del stock por lo menos al nivel de precisión ( $1.9 < m < 2.1$ ) que escogimos. Es particularmente digno de notarse que en el caso de la población A, cuya curva es aparentemente asimétrica, si suponemos que la curva es simétrica esto no altera seriamente las estimaciones de los importantes parámetros,  $C_{max}$  y  $F_{opt}$  (Tabla 3; población A, parámetros ya sea restringidos o irrestrictos,  $m = 2$ ).

El proceso de ajuste parece ser lo más sensible para estimar  $C_{max}$ ,  $F_{opt}$ , y  $U_{max}$ , mientras que su sensibilidad es mínima al estimar  $m$ ,  $q$ , y  $P_{max}$ . Es casi seguro que la sobreestimación de la biomasa de la población en la parte superior de las Figuras 6 y 7 fue causada por una pobre estimación de  $q$ . Pero aún restringiendo  $q$ , es aparente que el modelo no presenta exactamente los cambios de la población aunque creemos que la representación es muy buena. Hay ocasiones (Figura 8, parte superior) en que la población no responde tan rápidamente como lo pronostica el modelo (lo que resulta en la sobreestimación de las capturas) y ocasiones en que la población responde mejor que lo pronosticado (lo que resulta en la subestimación de las capturas). Las poblaciones explotadas de gambusinos no parecían tener una distribución estable de edad en ninguna de las tasas de pesca, y esto podría ser la causa para que la tasa de crecimiento no reaccionara según el pronóstico.

Como un ejercicio final con la información sobre los gambusinos, la información para la población A fue dividida en dos partes. La primera parte contenía datos de captura para los períodos en el que el tamaño de la población era siempre mayor que  $P_{opt}$  (la semana 40 a la semana 109) y la segunda parte contenía capturas para los períodos cuando el tamaño de la población fue generalmente menor que  $P_{opt}$  (semana 110 a semana 172). Es curioso anotar que los ajustes a las mitades de la información sugirieron que la curva de producción del stock era asimétrica o simétrica en dirección opuesta de aquella computada por el ajuste correspondiente a todos los datos (Tabla 4). Al ajustar solamente la mitad de la información a un tiempo, se tomaron observaciones principalmente ya sea de la pierna ascendente izquierda o de la pierna descendente derecha de la curva de producción del stock. Se necesita aparentemente hacer observaciones de ambas piernas si se quiere determinar con exactitud el parámetro asi-

métrico  $m$ . En cualquier caso, ninguno de los ajustes de las mitades indicaron que la curva tenía una asimetría pronunciada.

Ambos ajustes de las mitades de la información produjeron estimaciones mayores de  $F_{opt}$  y menores de  $P_{max}$  que las estimaciones correspondientes de la información completa, con parámetros irrestrictos. Parecería, considerando el ajuste de la información completa y las conclusiones empíricas de Silliman y Gutsell, que  $F_{opt}$ ,  $C_{max}$ ,  $P_{max}$ , y  $q$  se estimaron mejor según la primera mitad de la información que de la segunda. Como explicación parcial, se anotó anteriormente que la población que no está cambiando muy rápidamente es generalmente mejor fuente de información. La población A sufrió un cambio rápido durante el período representado por la segunda mitad de la información.

### **Atún aleta amarilla del Océano Pacífico oriental**

La información del atún aleta amarilla desde 1934 hasta 1967 (Tabla 6) fue ajustada según una amplitud de valores  $m$  con parámetros irrestrictos (Tabla 5). La cronología de captura observada y pronosticada para  $m = 1.4$ , la mejor estimación del parámetro asimétrico, se ilustra en la Figura 9. Las curvas de la captura equilibrada, comparadas con el esfuerzo se obtuvieron de (9) para  $m = 2$  y  $m = 1.4$  utilizando las estimaciones de los parámetros de la Tabla 5 (Figura 10). Aunque parece que la curva de producción del stock para el atún aleta amarilla fuera asimétrica, la suposición que el modelo de Schaefer con su curva simétrica es apropiado, no cambia apreciablemente ni las estimaciones del rendimiento máximo sostenible ni el esfuerzo óptimo de pesca. Si la curva es asimétrica, se esperaría que la sobrepesca no produciría una declinación en la captura por unidad de esfuerzo tan notable como lo pronosticaría el modelo de Schaefer.

Los ajustes de la información de atún aleta amarilla con el coeficiente irrestricto de capturabilidad, resultaron en estimaciones inmoderadamente altas de ese parámetro. Luego restringimos el coeficiente de capturabilidad a una amplitud más realista de valores, pero hallamos muy poca diferencia tanto en la calidad del ajuste como en las estimaciones de los otros parámetros (Tabla 5).

Evidentemente el ajuste de la información del atún aleta amarilla no es de la calidad del de los gambusinos, pero esperábamos esto en nuestros estudios. Hay fuentes de variación inherente en la dinámica de la población del atún aleta amarilla que no se hallan o son de menor influencia en los experimentos con gambusinos. Los gambusinos se mantuvieron en un ambiente relativamente homogéneo donde las variaciones en la reproducción, el crecimiento de los individuos o supervivencia, inducidas por las perturbaciones ambientales, deben tener menos importancia que en el caso del atún aleta amarilla. En segundo lugar desarrollamos una medida de esfuerzo que satisface perfectamente la suposición de un coeficiente con-

stante de capturabilidad. No sería posible el desarrollo de tal medida perfecta de esfuerzo para una pesquería comercial actual tan compleja como aquella del atún aleta amarilla.

A continuación discutiremos brevemente el ajuste de la cronología de captura. En la Figura 9 observamos que hay dos períodos de subestimación significativos (1948 a 1951 y 1960 a 1961) y dos períodos de sobreestimación continua y considerable (1952 a 1954 y 1956 a 1959). Estas discrepancias entre la cronología de las capturas observadas y pronosticadas pueden haber sido causadas por la reproducción inusitada favorable o desfavorable, ya que cada clase anual ejerce su influencia sobre la captura por varios años consecutivos. Alternativamente puede ser que se correlacionan en el tiempo las características ambientales que favorecían o reducían la producción del stock. En cualquier caso, los períodos constantes de sobreestimación y subestimación en la historia de la captura no son inesperados.

El resto del dispersamiento alrededor de la cronología pronosticada de la captura podría deberse a varias causas. Naturalmente la productividad del stock en diferentes años podría estar sujeta a alguna variación causada por cambios ambientales y por lo tanto inexplicables por medio del modelo. Además una causa podría ser la variación en el coeficiente de capturabilidad. La composición de edad de la población ha variado a través de estos años, y como algunas edades son más susceptibles de captura que otras (Davidoff 1969), el coeficiente de capturabilidad debe haber variado. Una variación adicional en el coeficiente de capturabilidad podría resultar de los cambios en la disponibilidad del atún debido, digamos, a características ambientales (ej. Broadhead y Barrett 1964).

Estos comentarios han indicado algunas de las causas probables de las discrepancias entre las cronologías de las capturas observadas y ajustadas. Considerando las innumerables fuentes potenciales de variación que no se han considerado en el modelo, así como la alta proporción de la variación en las capturas, explicada por el modelo ( $R > 0.80$ ), parece ser notablemente apropiado para describir la dinámica del atún aleta amarilla en el Océano Pacífico oriental.

Como nota final indicaremos que las capturas de atún aleta amarilla generalmente provinieron de tamaños de stock mayores que  $P_{opt}$ . Se deja a la especulación si las estimaciones del parámetro cambiarían o no si los datos se produjeran al permitir que la población baje a un nivel inferior de  $P_{opt}$ , pero no es probable que se produzca mucha información adicional si la población entra más o menos en equilibrio bajo la regulación actual.

## CONCLUSION

El problema investigado en este estudio es la determinación del rendimiento sostenible que se puede esperar de los stocks de peces bajo diferentes niveles de explotación mediante un examen de solo la información crono-

lógica de la captura y el esfuerzo. Los pronósticos de rendimiento del modelo estudiado deben ser relativamente exactos si las técnicas de captura son las mismas que aquellas usadas para producir los datos básicos de los cuales se obtienen las estimaciones del parámetro. Un cambio en selección de tamaño por la pesquería o en la época del año en que ocurre la pesca (ej. acortamiento de las temporadas de pesca debido a restricciones de captura) podría modificar la curva de producción del stock. Aún en estos casos el análisis de la información de captura y esfuerzo sobre la base del modelo generalizado de producción debe proporcionar una referencia de la cual pueden hacerse estimaciones de refinamiento del rendimiento sobre la base de estudios más detallados de la dinámica del stock.

Hemos tratado estrictamente con el rendimiento físico del stock. Las formulaciones sugerirían que se debería tratar de mantener el tamaño de la población mediante restricciones de captura o de esfuerzo, en algún nivel intermedio ( $P_{opt}$ ) entre el tamaño máximo de la población y la extinción. En este nivel la población sería muy productiva, generando en promedio, una captura máxima sostenible anual ( $C_{max}$ ). Como han señalado una serie de autores (Scott 1954; Crutchfield y Zellner 1962; Turvey 1964; y Smith 1968, entre otros) tal estrategia administrativa basada únicamente en rendimiento físico e ignorando la economía puede ser falta de perspicacia. Estos autores sugieren que el objetivo de la administración pesquera debe ser el de llevar hasta el máximo las ganancias. En el caso que se escogiera la ganancia como el criterio, se necesitará información adicional sobre gastos de pesca para determinar la tasa óptima de explotación. Ya sea que se escoja el rendimiento físico o la ganancia máxima como objetivo, resulta esencial determinar el rendimiento físico con relación al tamaño de la población y el esfuerzo de pesca al efectuar decisiones administrativas. Enfocado desde este punto de vista, este estudio es fundamental para la administración de pesquerías y, esperamos que sea de valor para los individuos a cargo de las decisiones en el futuro.

**LITERATURE CITED — BIBLIOGRAFIA CITADA**

- Ahuja, J. C., and S. W. Nash. 1965. Stochastic analogue of the modified exponential law of growth. *Biometrics*, **21**(3): p. 767.
- Bartlett, M. S. 1957. On theoretical models for competitive and predatory biological systems. *Biometrika*, **44**(1-2): 27-42.
- Bayliff, W. H. 1967. Procedures for estimating the parameters of the Schaefer yield model for yellowfin tuna. *Inter-Amer. Trop. Tuna Comm., Int. Rep.* 3: 20 p.
- Beisinger, Z., and S. Bell. 1963. COOP ID: H2 SAND MIN. Univ. Calif. San Diego, unpublished: 3 p.
- Broadhead, G. C., and I. Barrett. 1964. Some factors affecting the distribution and apparent abundance of yellowfin and skipjack tuna in the eastern Pacific Ocean [in English and Spanish]. *Inter-Amer. Trop. Tuna Comm., Bull.*, **8**(8): 417-473.
- Chapman, D. G. 1960. Statistical problems in dynamics of exploited fisheries populations. *Proc. Berkeley Math. Symp. Stat. Prob.*, 4: 153-168.
- Crutchfield, J. A. and A. Zellner. 1962. Economic aspects of the Pacific halibut fishery. *Fish. Indus. Res.*, **1**(1): 1-173.
- Davidoff, Edwin B. 1969. Variations in year-class strength and estimates of the catchability coefficient of yellowfin tuna, *Thunnus albacares*, in the eastern Pacific Ocean [in English and Spanish]. *Inter-Amer. Trop. Tuna Comm., Bull.*, in press.
- FAO. 1968. Report of the meeting of a group of experts on tuna stock assessment. *FAO Fish. Rep.*, 61: IV + 45 p.
- Feller, W. 1939. Die Grundlagen der Volterraschen Theorie des Kampfes ums Dasein in wahrscheinlichkeits-theoretischer Behandlung. *Acta Biotheoretica*, Ser. A, 5: 11-40.
- \_\_\_\_\_. 1940. On the logistic law of growth and its empirical verifications in biology. *Acta Biotheoretica*, Ser. A, 5: 51-66.
- Graham, M. 1935. Modern theory of exploiting a fishery, and application to North Sea trawling. *Jour. Conseil Perm. Inter. Explor. Mer*, **10**(3): 264-274.
- Gulland, J. A. 1968. The concept of the maximum sustainable yield and fishery management. *Fish. Tech. Pap. FAO*, 70: i + 13 p.
- Inter-American Tropical Tuna Commission. 1965. Report of the Inter-American Tropical Tuna Commission for the year 1964 [in English and Spanish]. *Inter-Amer. Trop. Tuna Comm., Ann. Rep. for 1964*, pp. 1-98.
- \_\_\_\_\_. 1966. Report of the Inter-American Tropical Tuna Commission for the year 1965 [in English and Spanish]. *Ibid.*, *Ann. Rep. for 1965*, pp. 1-106.



- Kendall, D. G. 1949. Stochastic processes and population growth, *J. Roy. Stat. Soc., Ser. B*, **11**(2): 230-264.
- Leslie, P. H. 1958. A stochastic model for studying the properties of certain biological systems by numerical methods, *Biometrika*, **45**(1-2): 16-31.
- Murphy, G. I. 1966. Population biology of the Pacific sardine (*Sardinops caerulea*). *Proc. Calif. Acad. of Sci., Ser. 4*, **34**(1): 1-84.
- Pella, J. J. 1967. A study of methods to estimate the Schaefer model parameters with special reference to the yellowfin tuna fishery in the eastern tropical Pacific Ocean. Ph. D. dissertation, Univ. of Washington: IX + 155 p.
- . 1969. A stochastic model for purse seining in a two-species fishery, *J. Theor. Biol.*, **22**: 209-226.
- Richards, F. J. 1959. A flexible growth function for empirical use. *J. Exp. Botany*, **10**(29): 290-300.
- Ricker, W. E. 1958. Handbook of computations for biological statistics of fish populations. *Bull. Fish. Res. Bd. Canada*, 117: 300 p.
- Schaefer, M. B. 1954. Some aspects of the dynamics of populations important to the management of the commercial marine fisheries. *Inter-Amer. Trop. Tuna Comm., Bull.*, **1**(2): 25-56.
- . 1957. A study of the dynamics of the fishery for yellowfin tuna in the eastern tropical Pacific Ocean [in English and Spanish]. *Ibid.*, **2**(6): 245-285.
- and R. J. H. Beverton. 1963. Fishery dynamics—their analysis and interpretation. p. 464-483. *In* M. N. Hill (editor), *The Sea—Ideas and Observations on Progress in the Study of the Seas*, Vol. 2, the Composition of Sea-Water, Comparative and Descriptive Oceanography. Interscience Publishers, New York: XV + 554 p.
- Scott, A. 1955. The fishery: the objectives of sole ownership, *J. Pol. Econ.*, **43**(2): 116-124.
- Silliman, R. P. and J. S. Gutsell. 1958. Experimental exploitation of fish populations. *Fish. Bull. U. S. Fish Wild. Serv.*, **58**(133): 215-252.
- Smith, V. L. 1968. Economics of production from natural resources. *Amer. Econ. Rev.*, **58**(3): 409-431.
- Southward, G. M. 1968. A simulation of management strategies in the Pacific halibut fishery. *Rep. Int. Pac. Halibut Comm.*, 47: 70 p.
- Turvey, R. 1964. Optimization and suboptimization in fishery regulation. *Amer. Econ. Rev.*, **54**(2): 64-76.

## APPENDIX

### Program GENPROD FORTRAN 63

This program consists of a main program (GENPROD), a subroutine (MIN), and a function (FOX). One library function is used (EXPF). The statement "IF (EOF, 50) 8, 9" is used to end the run by checking for end-of-file on the standard input tape.

The cards supplied by the user with this program are defined in terms of sets:

Set No. 1	1 card	FORMAT (10A8)
	Col. 1:	Numeral 1 (carriage control).
	Cols. 2-80:	Alphabetic title information such as species name, type of effort units, and type of catch units. Center on column 40.
Set No. 2	1 card	FORMAT (3I4, 4F10.0)
	Cols. 1-4:	Number of catch intervals (ND) Right justify with no decimal.
	Cols. 5-8:	Numeral 4 punched in column 8.
	Cols. 9-12:	Number of times (KK) the step intervals (DEL) are divided by 10. The larger this value, the greater execution time, but the answers contain more significant digits. If in doubt, try 2. Right justify with no decimal.
	Cols. 13-22*	Starting step (DEL(1)) for $X(1) = F_{opt}$ . If in doubt leave blank. Left justified with decimal.
	Cols. 23-32*	Starting step (DEL(2)) for $X(2) = q$ . If in doubt leave blank. Left justified with decimal.
	Cols. 33-42*	Starting step (DEL(3)) for $X(3) = r$ . If in doubt leave blank. Left justified with decimal.
	Cols. 43-52*	Starting step (DEL(4)) for $X(4) = U_{max}$ . If in doubt leave blank. Left justified with decimal.
		*If columns 13-52 are left blank, each DEL will be set equal to its respective guess (GUESS)
Set No. 3	$1 \leq \text{cards} \leq 125$	FORMAT (8F10.0)
	Cols. 1-80:	Each card has 8 fields, with each field containing 10 columns. The catches, $C(I)$ , are punched with $C(1)$ in field 1, $C(2)$ in field 2,

- ... ,  $C(ND)$  in field  $ND$ . Punch 8 catches to a card with each catch left justified in its field with a decimal.
- Set No. 4  $1 \leq \text{cards} \leq 125$  FORMAT (8F10.0)  
 Cols. 1-80: Like set No. 3, only each field contains the effort,  $E(I)$ , used to make its respective catch.
- Set No. 5  $1 \leq \text{cards} \leq 125$  FORMAT (8F10.0)  
 Cols. 1-80: Like set No. 3, only each field contains the length of time,  $T(I)$ , associated with its respective catch.
- Set No. 6 1 card FORMAT (4F10.0)  
 Cols. 1-10: Lower limit,  $A(1)$ , of  $F_{opt}$ . Left justify with decimal.  
 Cols. 11-20: Lower limit,  $A(2)$ , of  $q$ . Left justify with decimal.  
 Cols. 21-30: Lower limit,  $A(3)$ , of  $r$ . Left justify with decimal.  
 Cols. 31-40: Lower limit,  $A(4)$ , of  $U_{max}$ . Left justify with decimal.
- Set No. 7 1 card FORMAT (4F10.0)  
 Cols. 1-40: Like set No. 6, only these four fields contain the upper limits,  $A(5)$ ,  $A(6)$ ,  $A(7)$  and  $A(8)$  of  $F_{opt}$ ,  $q$ ,  $r$ , and  $U_{max}$  respectively.
- Set No. 8 1 card FORMAT (4F10.0)  
 Cols. 1-10: Best guess of  $F_{opt}$ . Left justify with decimal.  
 Cols. 11-20: Best guess of  $q$ . Left justify with decimal.  
 Cols. 21-30: Best guess of  $r$ . Left justify with decimal.  
 Cols. 31-40: Best guess of  $U_{max}$ . Left justify with decimal.
- Set No. 9 1 card FORMAT (2I4)  
 Cols. 1-4: Number of trial values ( $NM$ ) of  $m$  to be read in. Right justify with no decimal.  
 Cols. 5-8: Number of subintervals ( $N$ ) each time interval is to be divided into. If in doubt, try 1. Right justify without decimal.
- Set No. 10  $1 \leq \text{cards} \leq 3$  FORMAT (8F10.0)  
 Cols. 1-80: Each card has 8 fields, with each field containing 10 columns. The trial values of  $m$  ( $XM(I)$ ) are punched with  $XM(1)$  in field 1,

$XM(2)$  in field 2, . . . ,  $XM(NM)$  in field  $NM$ .  
Punch 8 values per card with each left justified in its field with a decimal.

\*Repeat all sets for additional jobs.

Error messages:

Power function errors can occur without destroying the iteration process.

Storage requirements:

About 4000 for  $ND \leq 1000$ .

**APENDICE**

**Programa GENPROD**

**FORTRAN 63**

Este programa consiste de un programa principal (GENPROD), una subrutina (MIN) y una función (FOX). Se utiliza una función bibliotecaria (EXPF). La declaración "IF (EOF, 50) 8, 9" se utiliza para finalizar la pasada verificando el fin de grabación de la cinta standard magnética de entrada.

Las tarjetas proporcionadas por la persona que utiliza este programa se denominan series, como sigue:

Serie No. 1	1 tarjeta Col. 1: Cols. 2-80	FORMAT (10A8) Numeral 1 (control de carro) Información alfabética de encabezamientos tal como nombre de la especie, tipo de unidades de esfuerzo y tipo de unidades de captura. Centralice en la Columna 40
Serie No. 2	1 tarjeta Cols. 1-4  Cols. 5-8 Cols. 9-12   Cols. 13-22*  Cols. 23-32*  Cols. 33-42*  Cols. 43-52*	FORMAT (3I4, 4F10.0) Número de intervalos de captura (ND) Justifique a la derecha sin decimal. Número 4 perforado en la columna 8 Número de veces (KK) en que se dividen los intervalos escalonados (DEL) entre 10. Mientras mayor sea este valor, se gastará más tiempo en la ejecución, pero las respuestas contienen más dígitos significativos. Cuando exista duda, ensáyese el 2. Justifique a la derecha, sin decimal. Etapa inicial (DEL(1)) para $X(1) = F_{opt}$ . Si existe duda déjese en blanco. Justifique a la izquierda, con decimal. Etapa inicial para $X(2) = q$ . Si existe duda déjese en blanco. Justifique a la izquierda, con decimal. Etapa inicial para $X(3) = r$ . Si existe duda déjese en blanco. Justifique a la izquierda, con decimal. Etapa inicial para $X(4) = U_{max}$ . Si existe duda déjese en blanco. Justifique a la izquierda, con decimal.

\*Si las columnas 13-52 se dejan en blanco, cada DEL se ajustará igual a su respectiva hipótesis (GUESS).

Serie No. 3	$1 \leq \text{tarjetas} \leq 125$ Cols. 1-80	FORMAT (8F10.0) Cada tarjeta tiene 8 grupos, y cada grupo contiene 10 columnas. Las capturas $C(I)$ , se perforan con $C(1)$ en el grupo 1, $C(2)$ en el grupo 2, . . . , $C(ND)$ en el grupo ND. Perfórense 8 capturas por cada tarjeta con cada captura justificada hacia la izquierda en su grupo, con un decimal.
Serie No. 4	$1 \leq \text{tarjetas} \leq 125$ Cols. 1-80	FORMAT (8F10.0) Similar a la serie No. 3, pero cada grupo contiene el esfuerzo, $E(I)$ , utilizado para realizar su correspondiente captura.
Serie No. 5	$1 \leq \text{tarjetas} \leq 125$ Cols. 1-80	FORMAT (8F10.0) Similar a la serie No. 3 con la diferencia que cada grupo contiene la duración de tiempo $T(I)$ que se asocia con su respectiva captura.
Serie No. 6	1 tarjeta Cols. 1-10  Cols. 11-20  Cols. 21-30:  Cols. 31-40	FORMAT (4F10.0) Límite inferior, $A(1)$ , de $F_{opt}$ . Justifique a la izquierda, con decimal. Límite inferior, $A(2)$ de $q$ . Justifique a la izquierda, con decimal. Límite inferior, $A(3)$ , de $r$ . Justifique a la izquierda, con decimal. Límite inferior, $A(4)$ , de $U_{max}$ . Justifique a la izquierda, con decimal.
Serie No. 7	1 tarjeta Cols. 1-40	FORMAT (4F10.0) Similar al juego No. 6 con la diferencia que estos cuatro grupos contienen los límites superiores, $A(5)$ , $A(6)$ , $A(7)$ , y $A(8)$ de $F_{opt}$ , $q$ , $r$ , y $U_{max}$ respectivamente.
Serie No. 8	1 tarjeta Cols. 1-10:  Cols. 21-30	FORMAT (4F10.0) Mejor suposición de $q$ . Justifique a la izquierda, con decimal. Mejor suposición de $r$ . Justifique a la izquierda, con decimal.

	Cols. 31-40:	Mejor suposición de $U_{\max}$ . Justifique a la izquierda, con decimal.
Serie No. 9	1 tarjeta	FORMAT (2I4)
	Cols. 1-4:	Número de valores de prueba (NM) de m a ser registrados. Justifique a la derecha, sin decimal.
	Cols. 5-8	Número de subintervalos (N) en que se debe dividir cada intervalo de tiempo. Si existe duda, trátase 1. Justifique a la derecha, sin decimal.
Serie No. 10	$1 \leq$ tarjetas $\leq 3$	FORMAT (8F10.0)
	Cols. 1-80	Cada tarjeta tiene 8 grupos, conteniendo cada uno de ellos 10 columnas. Los valores de prueba m ( $XM(I)$ ) se perforan con XM(1) en el grupo 1, XM(2) en el grupo 2, . . . , XM(NM) en el grupo NM. Perfórense 8 valores por tarjeta con cada posición justificada a la izquierda en su grupo con un decimal.

\*Repítanse todas las series para trabajos adicionales.

Mensaje de errores: Errores de la función de potencia pueden ocurrir sin que se destruya el proceso de iteración.

Necesidad de almacenamiento: Cerca de 4000 para  $N \leq 1000$ .

```

PROGRAM GENPROD
DIMENSION E(1000),C(1000),A(8),X(4),D(4),G(4),T(1000),XM(24),
1SP(20)
COMMON/STOT/C,E,T,ND,XM,I,N
5 READ 11, (SP(J),J=1,20)
IF(EOF,50)8,9
9 READ 2, ND,NV,KK,(D(I),I=1,4)
READ 6, (C(I),I=1,ND)
READ 6, (E(I),I=1,ND)
READ 6, (T(I),I=1,ND)
READ 6, (A(I),I=1,4)
READ 6, (A(I),I=5,8)
READ 6, (G(I),I=1,4)
READ 2, NM,N
FN=N
SQ=0.
SUM=0.
FND=ND
DO 40 I=1,ND
SUM=SUM+C(I)
IF(T(I)) 40,40,13
13 E(I)=E(I)/T(I)
40 T(I)=T(I)/FN
AV=SUM/FND
DO 42 I=1,ND
42 SQ=SQ+(C(I)-AV)**2
T(ND+1)=1.
READ 6, (XM(I),I=1,NM)
DO 20 K=1,NM
I=K
Z=1./(XM(I)-1.)
CALL MIN(NV,KK,D,A,G,X,S)
R=(SQ-S)/SQ
PRINT 11, (SP(J),J=1,20)
POPT=X(4)/(XM(I)**Z*X(2))
XK=XM(I)*X(1)*X(2)/(1.-XM(I))
XH=X(2)**(XM(I)-1.)*X(4)**(1.-XM(I))*XK
CMAX=X(1)*X(2)*POPT
PMAX=(XK/XH)**(1./(XM(I)-1.))
PO=X(3)*PMAX
PRINT 10, XM(I)
10 FORMAT(1H0,30X,33HGENERALIZED PRODUCTION MODEL M= ,F5.2)
PRINT 12
PRINT 4, X(1),X(4),X(2),X(3),CMAX,POPT,PMAX,XH,XK,S,R,SUM,AV
PRINT 31
TT=T(1)*FN
DO 20 J=1,ND
PCAT=0.
DO 3 L=1,N
P1=XH/(XK+X(2)*E(J))+ (PO**(1.-XM(I))-XH/
1 (XK+X(2)*E(J)))*EXP(-XK+X(2)*E(J))*(1.-XM(I))
2 *T(J))**(1./(1.-XM(I)))
PCAT=PCAT+X(2)*E(J)*T(J)*(PO+P1)/2.
3 PO=P1
E(J)=E(J)*T(J)*FN
IF(E(J)) 15,15,14
14 U=C(J)/E(J)
EU=PCAT/E(J)
GOTO 16
15 U=0.
EU=0.
16 PRINT 30, TT,P1,E(J),C(J),PCAT,U,EU
IF(T(J)) 18,18,17
17 E(J)=E(J)/(T(J)*FN)
18 TT=TT+T(J+1)*FN
20 CONTINUE
GO TO 5

```



```

8 STOP
2 FORMAT(3I4,4F10.0)
4 FORMAT(1H0, 14HOPTIMUM EFFORT,5X17HMAX. CATCH/EFFORT,5X19HCATCHABI
1LITY COEFF.,8X22HINITIAL POP./MAX. POP./1H ,4X6H(FOPT),14X6H(UMAX)
2,19X4H(Q),21X11H(P(O)/P(MAX)/1H0,E14.7,4XE17.8,4XE19.8,7XE22.8/1H0,
3100(1H*)/1H0,20HMAXIMUM EQUIL. CATCH,5X18HOPTIMUM POPULATION,5X15H
4MAX. POPULATION,5X8HCONSTANT,5X8HCONSTANT/1H ,7X6H(CMAX),18X6H(POP
5T),15X6H(PMAX),13X3H(H),10X3H(K)/1H0E18.8,6XE18.8,6XE15.8,3XE12.4,
63X, E12.4/1H0,100(1H*)/1H0,10X,14HSUM OF SQUARES,10X,1HR,12X,11HTO
7TAL CATCH,8X,13HAVERAGE CATCH/1H0,9X,E15.8,5X,E11.4,6X,E14.7,6X,E1
84.7/1H0,100(1H*))
6 FORMAT(8F10.0)
11 FORMAT(20A4)
12 FORMAT(1H0,100(1H*))
30 FORMAT(1H0,F7.2,3X,6(4XE14.7))
31 FORMAT(7H0 AT,10X10HPOPULATION,11X7HAPPLIED,10X8HOBSERVED,10X8H
1EXPECTED,10X8HOBSERVED,10X8HEXPECTED/1H ,3X4HTIME,12X4HSIZE,15X6HE
2FFORT,12X5HCATCH,12X5HCATCH,11X12HCATCH/EFFORT,6X12HCATCH/EFFORT)
END

```

```

FUNCTION FOX(X)
COMMON/STOT/C,E,T,ND,XM,I,N
DIMENSION E(1000),C(1000),X(4),T(1000),XM(24)
FOX=0.
FN=N
PO=X(3)*X(4)/X(2)
XK=XM(I)*X(1)*X(2)/(1.-XM(I))
XH=X(2)**(XM(I)-1.)*X(4)**(1.-XM(I))*XK
DO 5 J=1,ND
PCAT=0.
DO 3 K=1,N
IF(PO-0.) 6,6,7
7 A=ABSF(-(XK+X(2)*E(J))*(1.-XM(I))*T(J))
IF(A-87.) 9,9,6
9 P1=(XH/(XK+X(2)*E(J)))+(PO**(1.-XM(I))-XH/
1 (XK+X(2)*E(J)))*EXPF(-(XK+X(2)*E(J))*(1.-XM(I))*T(J)))
IF(P1) 4,6,4
4 P1=P1**(1./(1.-XM(I)))
PCAT=PCAT+X(2)*E(J)*T(J)*(PO+P1)/2.
3 PO=P1
5 FOX=FOX+(PCAT-C(J))**2
RETURN
6 FOX=1.E+38
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE MIN(NV, KK, DEL, A, GUESS, X, FOFX)
DIMENSION A(8), GUESS(4), XNEW(50), XNOW(50), X(4),DEL(4)
DIMENSION DELTA(50)
NK = KK+1
NX = NV
DO 5 I = 1, NX
XNOW(I) = GUESS(I)
XNEW(I) = XNOW(I)
5 DELTA(I)=DEL(I)
DO 14 J=1,NX

```

```
IF(DELTA(J)) 11,11,14
11 DELTA(J)=GUESS(J)
14 CONTINUE
20 FNOW = FOX(XNOW)
201 FOLD = FNOW
200 DO 40 I = 1, NX
  XNEW(I) = XNEW(I) + DELTA(I)
  NA = NX+I
  IF(XNEW(I) - A(NA)) 22, 22, 21
21 XNEW(I) = A(NA)
22 FNEW = FOX(XNEW)
  IF(FNEW - FNOW) 25, 26, 26
25 FNOW = FNEW
  GO TO 40
26 XNEW(I) = XNOW(I) - DELTA(I)
  IF(XNEW(I) - A(I)) 28, 30, 30
28 XNEW(I) = A(I)
30 FNEW = FOX(XNEW)
  IF(FNEW - FNOW) 25, 34, 34
34 XNEW(I) = XNOW(I)
40 CONTINUE
  IF(FNOW - FOLD) 50, 45, 45
45 NK = NK - 1
  IF(NK) 46, 46, 47
47 DO 48 J=1,NX
48 DELTA(J)=DELTA(J)*.1
  GO TO 200
50 DO 60 I = 1, NX
  T = XNOW(I)
  XNOW(I) = XNEW(I)
  XNEW(I) = 2.*XNEW(I) - T
  NA = NX+I
  IF(XNEW(I) - A(NA)) 52, 60, 51
51 XNEW(I) = A(NA)
  GO TO 60
52 IF(XNEW(I) - A(I)) 53, 60, 60
53 XNEW(I) = A(I)
60 CONTINUE
  FNEW = FOX(XNEW)
  IF(FNEW - FNOW) 65, 70, 70
65 FNOW = FNEW
  GO TO 50
70 DO 71 I = 1, NX
71 XNEW(I) = XNOW(I)
  GO TO 201
46 FOFX = FNOW
  DO 80 I = 1, NX
80 X(I) = XNOW(I)
  RETURN
  END
```

An important phase of the scientific work of the **Inter-American Tropical Tuna Commission** is the publication of research results. The Commission publishes studies by its staff and by cooperating scientists in its *Bulletin series*, in both English and Spanish.

The Commission also publishes, in these languages, the Annual Report of the Inter-American Tropical Tuna Commission. In the Annual Report are reported the actions of the Commission, a review of the year's work carried out under the direction of the Commission, a roster of scientific staff, and a listing of all publications issued during the preceding calendar year.

Bulletins, Annual Reports, and papers published by the staff in other journals are distributed on an exchange basis to a selected international list of governmental organizations, official libraries and laboratories. Other organizations or persons may purchase Commission publications at the prices indicated. Remittances must be in advance, payable in U. S. funds to the order of the Inter-American Tropical Tuna Commission. Requests for these publications, as well as for a listing of all publications, may be directed to The Editor.

Some recent publications in the *Bulletin series* are:

Vol. 12, No. 7 — \$1.00

Distribution of skipjack in the Pacific Ocean, based on records of incidental catches by the Japanese longline tuna fishery, *by* Makoto Peter Miyake. La Jolla, 1968.

Distribución del barrilete en el Océano Pacífico, basada en los registros de la pesca japonesa palangrera de atunes, según las capturas incidentales, *por* Makoto Peter Miyake. La Jolla, 1968.

Vol. 13, No. 1 — \$4.00

Population dynamics of the skipjack tuna (*Katsuwonus pelamis*) of the eastern Pacific Ocean, *by* James Joseph and Thomas P. Calkins. La Jolla, 1969.

Dinámica de las poblaciones del barrilete (*Katsuwonus pelamis*) del Océano Pacífico oriental, *por* James Joseph y Thomas P. Calkins. La Jolla, 1969.

Vol. 13, No. 2 — \$2.00

The Japanese longline fishery for tunas and billfishes in the eastern Pacific Ocean east of 130°W, 1964-1966, *by* Susumu Kume and James Joseph. La Jolla, 1969.

La pesca japonesa con palangre de atunes y peces espada en el Océano Pacífico oriental al este de los 130°W, 1964-1966, *por* Susumu Kume y James Joseph. La Jolla, 1969.

*Editor:*

CLIFFORD L. PETERSON

Inter-American Tropical Tuna Commission  
Comisión Interamericana del Atún Tropical  
c/o Scripps Institution of Oceanography  
La Jolla, California, U. S. A.

Price per copy — \$1.00 — Precio por copia

Una fase importante del trabajo científico de la **Comisión Interamericana del Atún Tropical** es la publicación de los resultados de sus investigaciones. La Comisión publica tanto en inglés como en español, los estudios efectuados por su personal y por científicos que cooperan en su serie de *Boletines*.

La Comisión también publica en estos idiomas, el Informe Anual de la Comisión Interamericana del Atún Tropical. En el Informe Anual, se participa sobre las acciones de la Comisión; una revisión del trabajo llevado a cabo durante el año bajo la dirección de la Comisión; un registro del personal científico y una lista de todas las publicaciones editadas durante el año calendario anterior.

Los Boletines, Informes Anuales y artículos publicados por el personal en otras revistas, se distribuyen, a base de intercambio, a una lista internacional escogida de organizaciones gubernamentales, bibliotecas oficiales y laboratorios. Otras organizaciones o personas pueden comprar las publicaciones de la Comisión a los precios indicados. La remesa debe hacerse por adelantado en dólares a nombre de la Comisión Interamericana del Atún Tropical. Los pedidos para estas publicaciones, lo mismo que de la lista de todas las ediciones, deben ser dirigidos al Editor.

Las publicaciones recientes en la serie de *Boletines* son: