

VŠB – Technická univerzita Ostrava

Fakulta stavební

Katedra konstrukcí

**Modelování pórovitých stavebních materiálů metodou  
konečných prvků**

Finite element modeling of porous building materials

Student :

Ing. Pavel Mec

Vedoucí diplomové práce:

doc. Ing. Jiří Brožovský, Ph.D.

Ostrava 2012

### **Prohlášení studenta**

Prohlašuji, že jsem celou diplomovou práci včetně příloh vypracoval samostatně pod vedením vedoucího diplomové práce a uvedl jsem všechny použité podklady a literaturu.

V Ostravě dne 30. listopadu 2012

.....

Podpis studenta

Prohlašuji, že

- byl jsem seznámen s tím, že na moji diplomovou práci se plně vztahuje zákon č. 121/2000 Sb. – autorský zákon, zejména § 35 – užití díla v rámci občanských a náboženských obřadů, v rámci školních představení a užití díla školního a § 60 – školní dílo.
- beru na vědomí, že Vysoká škola báňská – Technická univerzita Ostrava (dále jen VŠB-TUO) má právo nevydělečně ke své vnitřní potřebě diplomovou práci užít (§ 35 odst. 3).
- souhlasím s tím, že jeden výtisk diplomové práce bude uložen v Ústřední knihovně VŠB-TUO k prezenčnímu nahlédnutí a jeden výtisk bude uložen u vedoucího diplomové práce. Souhlasím s tím, že údaje o diplomové práci budou zveřejněny v informačním systému VŠB-TUO.
- bylo sjednáno, že s VŠB-TUO, v případě zájmu z její strany, uzavřu licenční smlouvu s oprávněním užít dílo v rozsahu § 12 odst. 4 autorského zákona.
- bylo sjednáno, že užít své dílo – diplomovou práci nebo poskytnout licenci k jejímu využití mohu jen se souhlasem VŠB-TUO, která je oprávněna v takovém případě ode mne požadovat přiměřený příspěvek na úhradu nákladů, které byly VŠB-TUO na vytvoření díla vynaloženy (až do jejich skutečné výše).
- beru na vědomí, že odevzdáním své práce souhlasím se zveřejněním své práce podle zákona č. 111/1998 Sb., o vysokých školách a o změně a doplnění dalších zákonů (zákon o vysokých školách), ve znění pozdějších předpisů, bez ohledu na výsledek její obhajoby.

V Ostravě dne 30. listopadu 2012

.....  
Podpis studenta

### **Poděkování**

Touto cestou bych chtěl poděkovat vedoucímu diplomové práce Doc. Ing. Jiřímu Brožovskému, Ph.D. za odbornou pomoc. Rád bych také vyjádřil svůj dík Ing. Janu Hurtovi z Laboratoře stavebních hmot FAST VŠB - TU Ostrava za ochotu a pomoc při experimentálních pracích v laboratoři. Poděkování také patří studentskému projektu SP2012/128 – Vysoce pórovité materiály a materiály s nízkou objemovou hmotností, díky jemuž bylo možno provést experimentální měření.

## **Anotace**

V současné době jsou ve stavebnictví ve velké míře využívány vysoce pórovité materiály. Díky jejich malé objemové hmotnosti dosahují velmi dobrých tepelně izolačních parametrů. Tyto materiály mají také své nevýhody. Vysoká pórovitost způsobuje výrazné snížení mechanických a odolnostních parametrů. Velmi nepříznivě působí na vlastnosti pórovitých materiálů také vlhkost, která může do pórového systému pronikat. Při navrhování a posuzování stavebních konstrukcí je potřeba tyto okolnosti zohlednit. Normy pro navrhování stavebních konstrukcí se však této problematice věnují velmi omezeně. Předložená diplomová práce se zabývá modelováním mechanického chování pórovitých materiálů. V numerických modelech je s pomocí experimentálních měření zohledněn vliv vlhkosti na mechanické parametry. S využitím komerčního, volně dostupného, ale i vlastního programového vybavení je využito několik podmínek plasticity zohledňujících pórovitost materiálů.

**Klíčová slova:** Metoda konečných prvků, pórovitost, plasticita, poroelasticita

## **Annotation**

Porous materials are widely used in building industry at present. Due to their low bulk density they have very good thermal insulation properties. These materials has also some disadvantages. High porosity causes significant reduction of mechanical and durability parameters. Very adverse effect causes moisture which can penetrate to pore system. In the design and assesment of building structures it is necessary to take account these circumstances. Standards for designing of building structures are very limited in this problematic. This diploma thesis is focused on modeling of mechanical behavior of porous materials. Numerical models with using of experimental data take into account effect of moisture on mechanical parameters. Some yield criterions for porous material from commercial, opens source and also custom software are used.

**Keywords:** Finitel element method, porosity, plasticity, poroelasticity

# Obsah

<b>1</b>	<b>Úvod</b>	<b>12</b>
<b>2</b>	<b>Problematika pórovitých materiálů</b>	<b>13</b>
2.1	Porovité materiály ve stavebnictví . . . . .	14
2.1.1	Konstrukční stavební materiály . . . . .	15
2.1.2	Izolační nenosné materiály . . . . .	17
2.2	Mechanické vlastnosti pórovitých materiálů . . . . .	17
2.3	Vlhkost pórovitých materiálů . . . . .	20
<b>3</b>	<b>Modelování pórovitých materiálů</b>	<b>22</b>
3.1	Poromechanika . . . . .	25
3.2	Poroelasticita . . . . .	26
3.3	Poroplasticita . . . . .	29
3.4	Podmínka plasticity Cam-Clay . . . . .	30
3.5	Podmínka plasticity MSDPu . . . . .	32
<b>4</b>	<b>Metoda konečných prvků</b>	<b>37</b>
4.1	Postup při řešení pomocí MKP . . . . .	38
4.2	Matice tuhosti konečného prvku . . . . .	39
4.3	Numerická integrace v MKP . . . . .	40
<b>5</b>	<b>Experimentální zkoušení pórobetonu</b>	<b>42</b>
5.1	Modul pružnosti . . . . .	44
5.2	Pevnost v tahu . . . . .	47
<b>6</b>	<b>Řešič MMFEM pro poroelasticitu pomocí MKP</b>	<b>48</b>
6.1	Implementace MMFEM . . . . .	48
6.2	Možnosti řešiče . . . . .	49
<b>7</b>	<b>Modelové příklady a vyhodnocení</b>	<b>51</b>
7.1	Jednoduchá stěna zatížená po celé délce . . . . .	51
7.2	Stěna s okny a meziokenním pilířem . . . . .	52
7.3	Materiálové parametry použité při modelování . . . . .	54

7.4	Jednoduchá stěna lokálně zatížená - výsledky . . . . .	55
7.5	Jednoduchá po celé délce zatížená stěna - výsledky . . . . .	59
7.6	Stěna s okenními otvory - výsledky . . . . .	63
7.7	Jednoduchá lokálně zatížená stěna - model Cam-Clay . . . . .	66
7.8	Jednoduchá po celé délce zatížená stěna - model Cam-Clay . . . . .	70
7.9	Stěna s okenními otvory - model Cam-Clay . . . . .	74
7.10	Jednoduchá lokálně zatížená stěna - model MSDPu a poroelasticita . . . .	76
7.11	Jednoduchá v celé délce zatížená stěna - model MSDPu a poroelasticita . .	80
7.12	Vyhodnocení výsledků . . . . .	82
<b>8</b>	<b>Závěr</b>	<b>84</b>
<b>9</b>	<b>Literatura</b>	<b>85</b>
	<b>Příloha 1 - Příklady zdrojových kódů programu MKP</b>	<b>91</b>

## Seznam zkratek

b Biotův koeficient

$f_c$  Pevnost v tlaku u regresních modelů

$f_{c0}$  Pevnost v tlaku při nulové pórovitosti

p Pórovitost u regresních modelů

n Pórovitost v poromechanice

**D** Matice tuhosti materiálu

E Modul pružnosti

G Modul pružnosti ve smyku

K Modul objemové stlačitelnosti

Q Materiálová konstanta (póromechanika)

R Materiálová konstanta (póromechanika)

X Objemové síly

**I** Invariant tenzoru napětí

**J** Invariant deviátoru napětí

$\sigma$  Napětí

$\sigma_{ij}$  Tenzor napětí

$\varepsilon$  Poměrné přetvoření

$\varepsilon_{kl}$  Tenzor deformace

$\phi$  Objemová pórovitost

$\nu$  Poissonův součinitel příčné kontrakce

$\partial$  Parciální derivace



# 1 Úvod

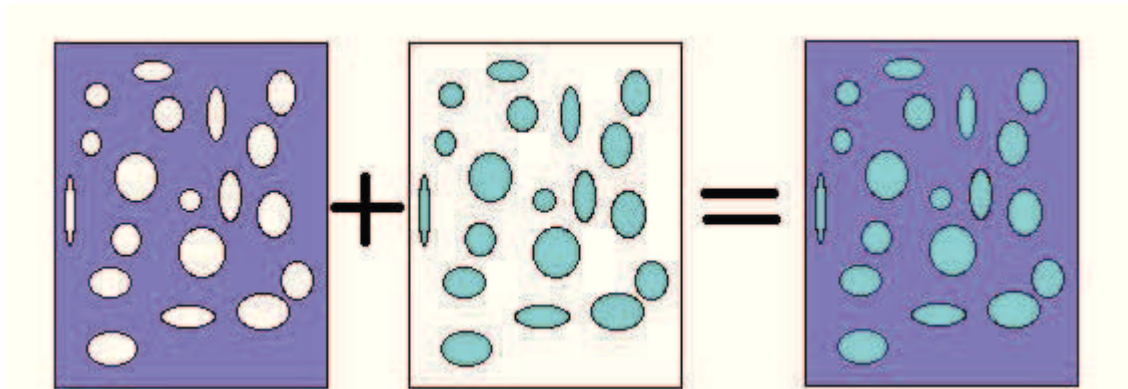
Na poli stavebních materiálů pro použití v nosných, ale i nenosných konstrukcích, se v současnosti nachází nepřeborné množství produktů. Jednotlivé materiály jsou definovány svými fyzikálními vlastnostmi, které je nutno znát před jejich vlastním využitím. Pro nosné stavební konstrukce jsou to především vlastnosti mechanické, které nabývají na důležitosti. Z toho důvodu se všechny tyto parametry s různou přesností stanovují u všech materiálů, které se ve stavebnictví využívají. V oblasti nosných stavebních konstrukcí, ať už malého či velkého rozsahu, je znalost mechanických vlastností důležitá proto, aby bylo možno konstrukci nadimenzovat na zatížení, kterým má po dobu své životnosti odolávat. Samotné parametry jsou však pouze základem pro možný návrh konstrukce. Při návrhu je nutno využívat modelů chování materiálu při zatížení. Použité modely mohou nabývat různé složitosti v závislosti na předpokládaném využití konstrukce, prostředí, ve kterém bude umístěna a především na typu použitého materiálu.

Výraznou měrou jsou ve stavebnictví využívány látky obsahující póry v různém kvantitativním zastoupení. Porovitost může vznikat nemožností odstranění veškerých pórů z materiálu při výrobě, nebo v dnešní době často úmyslně. Pokud je porovitost vytvářena úmyslně, je to především kvůli zlepšení užitných vlastností materiálu. Pórovité materiály mají lepší tepelně technické parametry, díky tomu, že uzavřený vzduch bez možnosti proudění je dobrým izolantem. V některých případech jako je provzdušnění betonu vzniklé póry vytvářejí prostor pro krystalizační procesy například ledu a zvyšují tak odolnost proti mrazu. Samostatnou kapitolou je porovitost zemin, která hraje významnou roli v zakládání staveb.

Ve všech případech hraje množství pórů důležitou roli v mechanických vlastnostech materiálu, kde množství pórů výrazně ovlivňuje běžné parametry jako pevnost nebo modul pružnosti. Porovité materiály jsou také závislé na prostředí, ve kterém se nacházejí. Především oblast s vysokou vlhkostí, případně vodní prostředí, mohou výrazně měnit mechanické parametry, díky možnosti pronikání vody do pórů. Současné normy a postupy neposkytují nebo poskytují omezeně metody jak tuto problematiku při návrhu zohlednit. Tato práce se zabývá modely a materiálovými vlastnosti pórovitých materiálů se zaměřením především na pórobeton, jakožto intenzivně používaný materiál v současném stavitelství. Jsou porovnávány modely porušení a podmínky plasticity běžně dostupné v komečních programech s podmínkami zohledňujícími porovitost materiálu.

## 2 Problematika pórovitých materiálů

Pórovité látky jsou takové, které se jsou tvořeny strukturou složenou z pevné látky (matrice) a různého množství pórů. Póry mohou být v pevné látce uzavřené nebo otevřené. Vlastní póry mohou být vyplněny kapalinou nebo plynem, zjednodušeně tedy tekutinou. Všechny tyto členy dohromady tvoří pórovitý materiál. V závislosti na velikosti pórů a na velikosti elementu materiálu, kterým se zabýváme tak můžeme materiál považovat za heterogenní nebo homogenní. Z tohoto pohledu je důležitá velikost pórů. V materiálovém inženýrství se nejčastěji používá rozmezí velikosti  $<2\text{nm}$  pro mikropóry,  $2\text{-}50\text{nm}$  pro mezopóry a  $>50\text{nm}$  pro makropóry [6]. Tato stupnice však není pevně dána. V mechanice zemin se uvažují jako makropóry póry o velikosti  $>75\mu\text{m}$ . Obvykle se póry o velikosti větší než několik stovek mikrometrů považují za vzduchové bubliny. Při řešení dané problematiky je tedy čistě na uvážení v jaké úrovni se budeme pohybovat. Pokud se chceme zabývat materiálem jako celkem, je nutné zvolit dostatečně velký objemový element, který bude reprezentativní. Důležitým faktorem je také typ procesu, který na daném materiálu zkoumáme. Pokud se například zabýváme vlivem vlhkosti, jen obtížně budeme zahrnovat mikropóry. Pro molekuly vody je tento rozměr nedosažitelný. Oblast mikropórů je spíše v zájmu věd zkoumajících prostor na úrovni chemické struktury. Z pohledu stavebnictví je často nutné brát v potaz také to jakým způsobem byla pórovitost stanovena. V mnoha případech kdy se stanovuje tzv. zdánlivá pórovitost je tato hodnota mnohem nižší než hodnota stanovená například pomocí rtuťové nebo heliové porozimetrie. Tyto metody využívají principu vtlačování rtuti do vzorku za vysokých tlaků, nebo schopnost adsorpce hélia na porch póru. Při stanovení zdánlivé pórovitosti se využívá jako média vody za normálního atmosférického tlaku. Není tedy možné, aby byly změřeny póry do kterých může proniknout rtuť za zvýšených tlaku nebo adsorbovat hélium díky malé velikosti své molekuly. Voda také nemůže proniknout do uzavřených pórů materiálu. Ve většině prací zabývajících se stavebními materiály je tak často jako pórovitost označována hodnota stanovená pomocí vody, tedy zdánlivá pórovitost [15, 2]. Rozdíl je také zjevný například u běžného pórobetonu. Z literatury je možné zjistit, že dosahuje pórovitosti až 75% [18], avšak v reálu je jeho nasákavost rovna přibližně 35% objemově. Je sice rozdíl mezi šedým popílkovým a bílým vápencovým pórobetonem, maximálního vyplnění všech pórů vodou, ale není možno dosáhnout z důvodu jejich velikostního rozložení a uzavřenosti. Z pohledu vlhkosti tedy nelze brát v potaz celkovou pórovitost.



Obr. 1: Schématické zobrazení matrice, pórů a celého elementu materiálu

V reálných materiálech se nachází dva typy pórů. Jednou možností jsou póry uzavřené, takovouto možnost schématicky zobrazuje Obr. 1. Dalším případem jsou póry otevřené. V druhém případě může docházet k proudění tekutiny prostřednictvím jednotlivých pórů. Látky s otevřenými póry jsou především mezi přírodními materiály častěji se vyskytujícími. Do této kategorie spadají také látky sypké, i když nebudou v této práci probírány. Pokud se v látce nachází uzavřené póry ve větším množství, jedná se obvykle o materiály uměle připravené. Obvyklým případem jsou také póry uzavřené vzájemně propojené, které se často nazývají póry slepými [14]. Cílenou přípravou pórovitých materiálů je možno dosáhnout velkého množství uzavřených pórů, které mají přibližně stejný tvar a velikost. Tohoto procesu je využíváno při výrobě mnoha stavebních materiálů. Za zmínku stojí například keramické tvarovky, kde se do keramické hlíny přimíchávají materiály vyhořívající při výpalu. Nejvíce je však umělá příprava pórovitosti zřejmá při výrobě pórobetonu, která je popsána v následujících kapitolách.

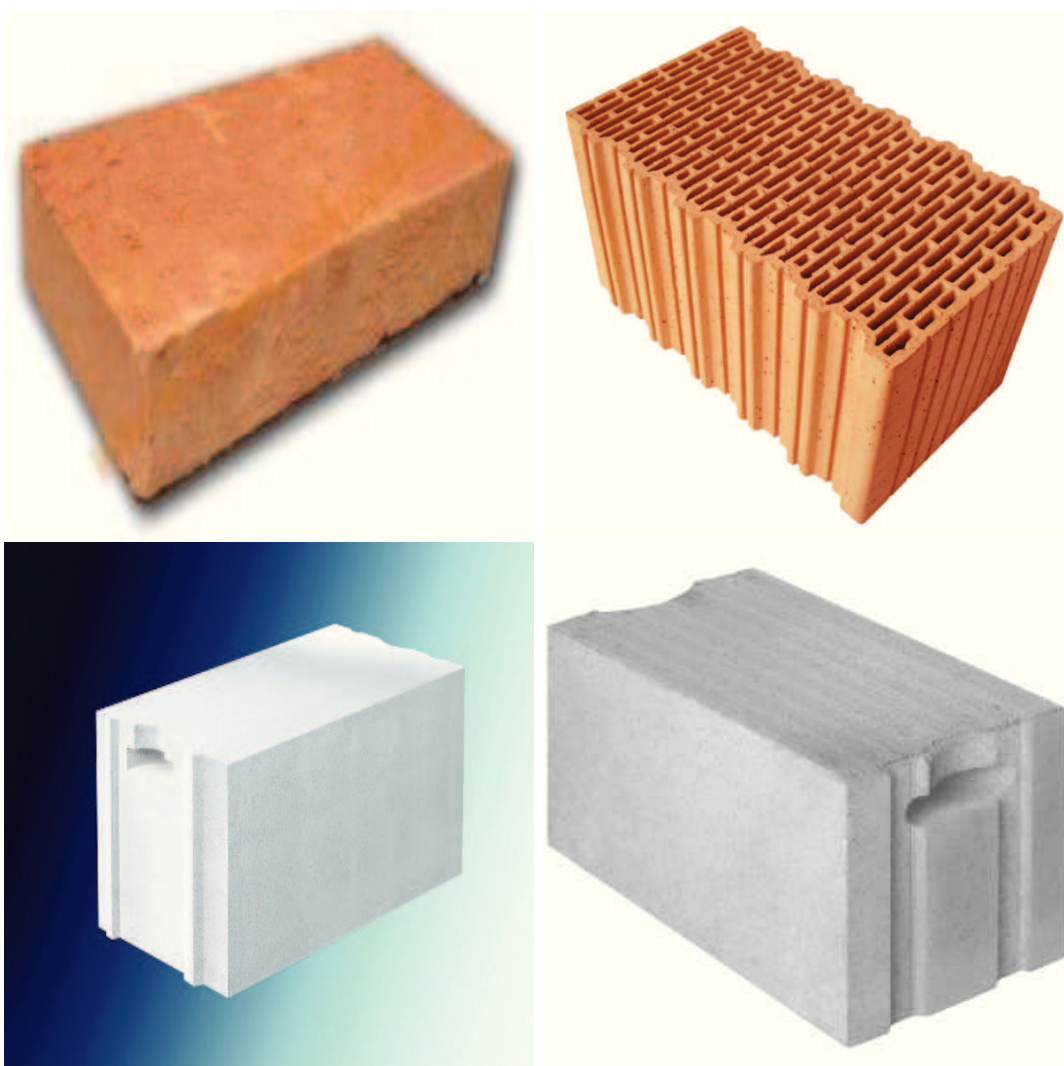
## 2.1 Pórovité materiály ve stavebnictví

Velké množství materiálů používaných ve stavebnictví je pórovitých. Jednak proto, že se velmi často používají přírodní materiály, především horniny, které jsou přirozeně pórovité. Některé horniny jako sopečné tufy či pemza mohou dosahovat velmi vysoké pórovitosti. Opačným případem jsou materiály s nízkou nebo téměř nulovou pórovitostí mezi něž patří například ocel, sklo nebo látky na bázi plastů. U těchto hmot se jedná spíše o záležitost mikropórovitosti na úrovni rozhraní molekul a krystalů. Dalším důležitým faktorem je umělé zvyšování obsahu pórů ve stavebních hmotnách, především z důvodu snahy o snížení objemové hmotnosti. Snížením objemové hmotnosti dosáhneme nízkého součinitele tepelné vodivosti. Růstoucí ceny energií nutí k využívání co nejlépe izolujících materi-

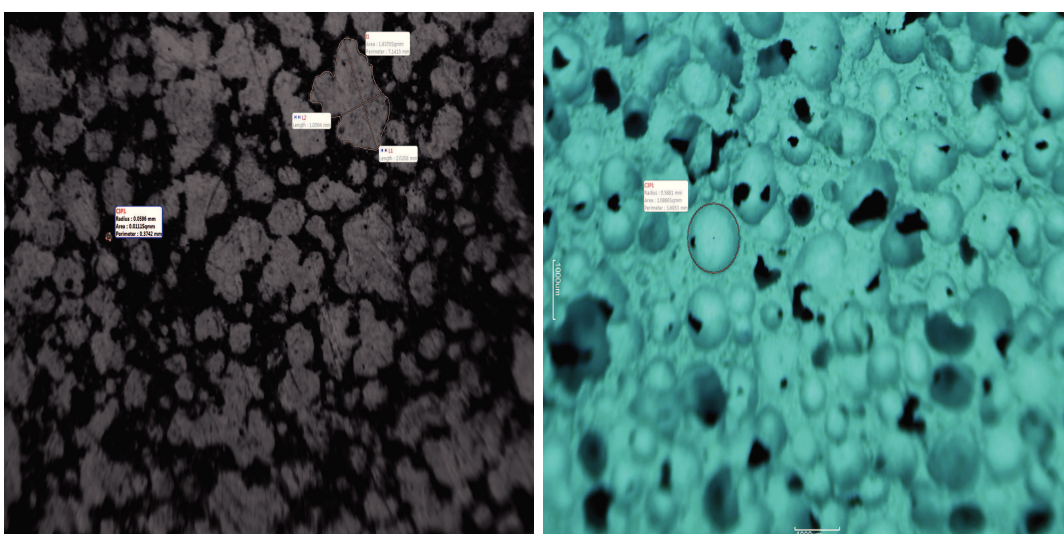
álů. Technické normy pro navrhování staveb v dnešní době vyžadují součinitele tepelného odporu konstrukcí v tak nízkých hodnotách, že použitím běžných materiálů jako je cihla nebo beton, téměř nelze tyto požadavky splnit. Konstrukce z těchto prvků by musely dosahovat velkých tlouštěk, aby požadavkům vyhověly. Na řadu tak přicházejí materiály s nízkou objemovou hmotností a vysokým tepelným odporem. Ty dokáží i při rozumných rozměrech splnit tepelně izolační parametry. Velmi nízká objemová hmotnost může být ve vyjímečných případech nevýhodou. Objemová hmotnost nižší než je hustota vody může například při povodních způsobit, že vztlaková síla překoná tíhu konstrukce a dojde k porušení nebo destrukci.

### **2.1.1 Konstrukční stavební materiály**

Přirozené rozdělení pórovitých stavebních materiálů tvoří způsob jejich využití, pro nosné konstrukce a ostatní používané pouze jako izolace. Nosné prvky musí kromě splnění požadavků na tepelný odpor splňovat také požadavky na únosnost. Pórovitost je tedy v případě mechanických vlastností spíše nevýhodou, jelikož s sebou přináší snížení mechanické odolnosti materiálu. Nejběžnějšími stavebními konstrukčními prvky, které obsahují poměrně vysoké procento pórů, jsou cihelné prvky a pórobeton. U cihelných prvků dochází k vytváření pórů záměrně, ale i přirozeně při fázi sušení. Do původní hmoty jsou vmíchávány dřevěné piliny, případně mleté plasty, které při výpalu vyhoří a vznikne tak prázdný prostor. Díky objemovým změnám při sušení a výpalu dochází také ke vzniku velkého množství otevřených kapilárních pórů. To je důvodem vysoké kapilární vzlínivosti u běžných cihelných prvků, která je důvodem častých poruch z důvodu vlhkosti při špatné izolaci zdiva. Pórobeton je materiál vyráběný téměř ze stejných surovin jako klasický beton, avšak při výrobě jsou přimíchávána plynotvorného činidla, díky kterým dochází k vytvoření velkého množství kulovitých pórů přibližně stejné velikosti a rovnoměrně rozložených v celém objemu materiálu [18]. Jednotlivé póry nejsou v tomto materiálu dokonale uzavřené i při kulovitém tvaru. Díky množství pórů se tyto vzájemně prolínají a nutnost uvolnění nahromaděného plynu vzniklého při reakci plynotvorného činidla také přispívá k tvorbě pórů otevřených. Díky velmi vysoké pórovitosti dosahuje takový materiál výrazně nízké objemové hmotnosti, což je důležité pro dosažení kvalitních tepelně izolačních parametrů. Velikost pórů, která ve velkém množství spíše odpovídá vzuchovým bublinám o velikosti až jeden milimetr také způsobuje mnohem menší kapilární vzlínivost než u pálených cihel.



Obr. 2: Komerčně dostupné stavební pórovité materiály (cihla plná, cihelný blok, šedý a bílý pórobeton)



Obr. 3: Zobrazení 20x zvětšeného pórobetonu na výbrusu a na zlomu

### 2.1.2 Izolační nenosné materiály

Obvykle se jedná o materiály s velmi nízkou objemovou hmotností. Používají se čistě jako izolační, případně slouží jako plnivo pro přípravu jiných hmot. Velkým rozdílem proti konstrukčním materiálům je také to, že materiály určené pro izolaci jsou často chemicky ošetřeny proti příjmu vlhkosti. Poté jsou označovány jako látky hydrofobizované. V některých případech jsou tvořeny pouze nepropustnými uzavřenými póry. Nejčastěji se připravují pomocí teplotních expanzí přírodních nebo umělých materiálů. Velmi používaným je v současnosti expandovaný polystyren. Svými tepelně izolačními vlastnostmi dosahuje téměř nejlepších možných parametrů. Jako nosný se dá použít pouze ve velkých plochách a objemech z důvodu velmi malé únosnosti. Tento materiál vzniká tepelnou expanzí polymerní látky zvané polystyren pomocí vodní páry. Jedná se tedy kompletně o látku uměle připravenou. Jiným příkladem může být například pěnové sklo. Tento materiál je vyroben teplotní expanzí skla. Díky tomu, že všechny póry jsou uzavřené a vlastní sklo je téměř nepropustné pro plyny a kapaliny, je tato hmota téměř nenasákavá. Na druhou stranu je poměrně dosti únosná a je tak vhodná jako částečně nosné tepelně izolační podklady.



Obr. 4: Pěnové sklo FORMGLASS, expandovaný polystyren

## 2.2 Mechanické vlastnosti pórovitých materiálů

Při zvyšování pórovitosti materiálu dochází ke snižování mechanických vlastností materiálu. Obecně však nelze tyto vlastnosti odvozovat pouze od množství pórů. U prakticky používaných materiálů jsou mechanické parametry závislé na parametrech matrice, je-

jím uspořádání a materiálové kvalitě. Není tedy možné na základě pórovitosti srovnávat například pevnosti klasického betonu s pórobetonem, případně keramikou nebo jiným materiálem.

Na základě experimentálně provedených zkoušek byly pro beton a také pro autoklávovaný pórobeton vytvořeny regresní vztahy vyjadřující závislost pevnosti na pórovitosti [15, 2]. Tyto vztahy však nejsou aplikovatelné obecně na každý materiál. Pro beton, případně pro hydratované cementové pasty, bylo vypracováno několik regresních vztahů pro závislost pevnosti v tlaku na pórovitosti. V závislosti na druhu použitého kameniva lze uvést vztahy

Balshina:

$$f_c = f_{c,0}(1 - p)^n \quad (1)$$

Ryskovitche

$$f_c = f_{c,0}e^{-k \cdot p} \quad (2)$$

Shillera

$$f_c = k_s \ln\left(\frac{p_0}{p}\right) \quad (3)$$

Hasselmana

$$f_c = f_{c,0} - k_{HP}p \quad (4)$$

Další autoři se snažili tyto vztahy upravit tak, odpovídaly experimentálně naměřeným výsledkům. Následující tabulka shrnuje výsledky různých autorů [15, 2].

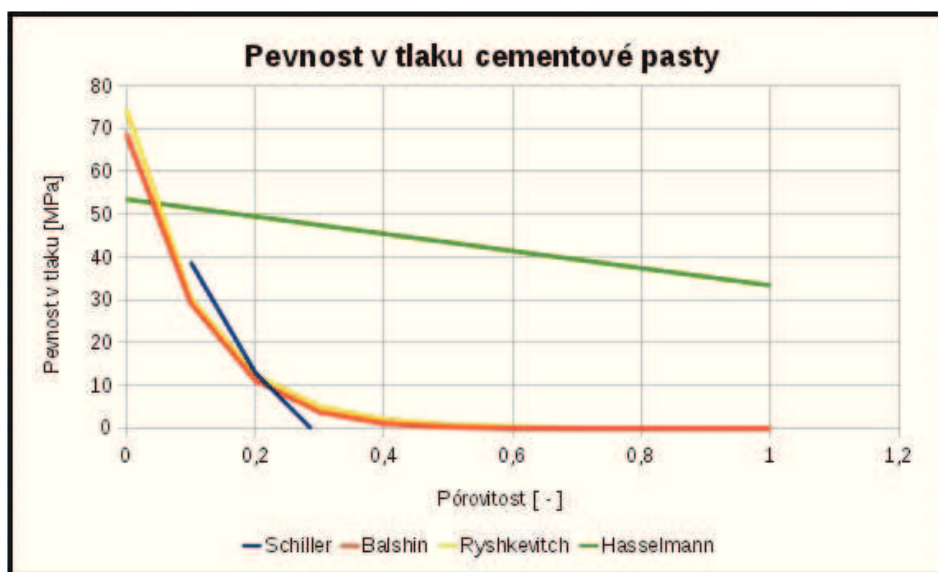
Tab. 1: Regresní vztahy získané pro běžný beton, cementovou pastu a pěnobeton

	Beton	Cementová pasta	Pěnobeton
Schiller	$\sigma = 37.1 \ln(0.284/p)$	$\sigma = 81.5 \ln(0.31/p)$	$\sigma = 109.5 \ln(0.66/p)$
Balshin	$\sigma = 68.74(1 - p)^{8.15}$	$\sigma = 540(1 - p)^{14.47}$	$\sigma = 321(1 - p)^{3.6}$
Ryshkevitch	$\sigma = 74.4e^{-8.96p}$	$\sigma = 636e^{-17.47p}$	$\sigma = 981e^{-7.43p}$
Hasselmann	$\sigma = 53.45 - 230.1p$	$\sigma = 158 - 601p$	$\sigma = 147 - 226p$

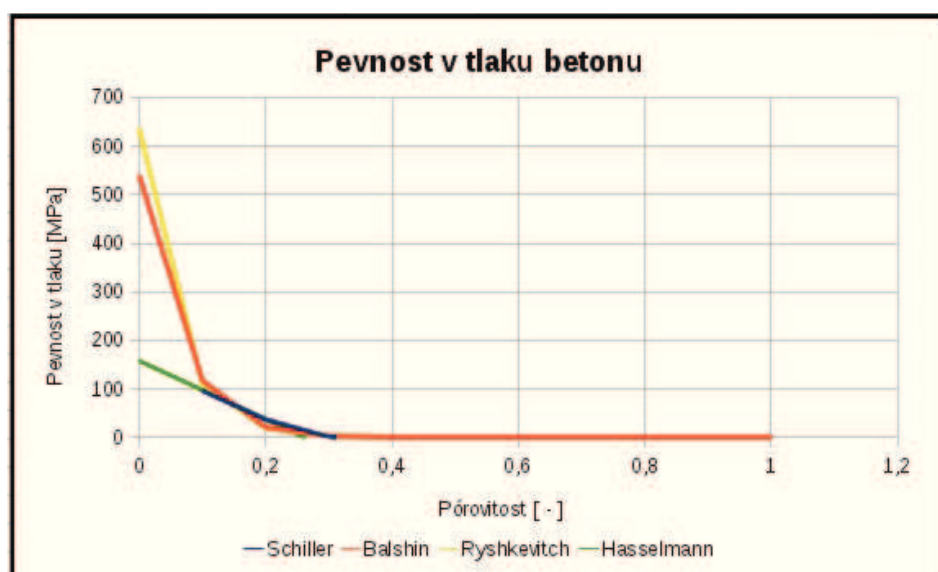
Uvedené vztahy jsou vytvořeny obecně pro pórovité látky různých typů, avšak reálně s použitými konstantami mohou aproximovat pouze jednotlivé typy materiálu. Pro každý materiál je nutno provést novou regresní analýzu pro získání koeficientů. Nevýhodou všech uvedených regresních vztahů je, že pro aproximaci dat látek s vysokou porozitou



dobře vystihují pevnosti pouze v omezeném rozsahu pórovitosti, při velmi nízké pórovitosti dostáváme nereálně vysoké pevnosti v tlaku. Naopak pokud pórovitost roste nad 60% pevnost klesá k nulové hodnotě. Z pohledu materiálového inženýrství jsou obě meze možné pouze teoreticky. Materiálům s nulovou pórovitostí se můžou blížit některé typy čistých krystalických látek nebo například sklo. Stejně tak nemůže existovat materiál se 100% pórů. Extrémní materiály jako je aerogel mohou obsahovat i přes 99% vzduchu [21], avšak u stavebních materiálů se můžeme přiblížit k hodnotám 70-80% jakých dosahuje například porobeton [18]. Tento problém ilustrují následující grafy na obrázcích Obr. 5 -7.

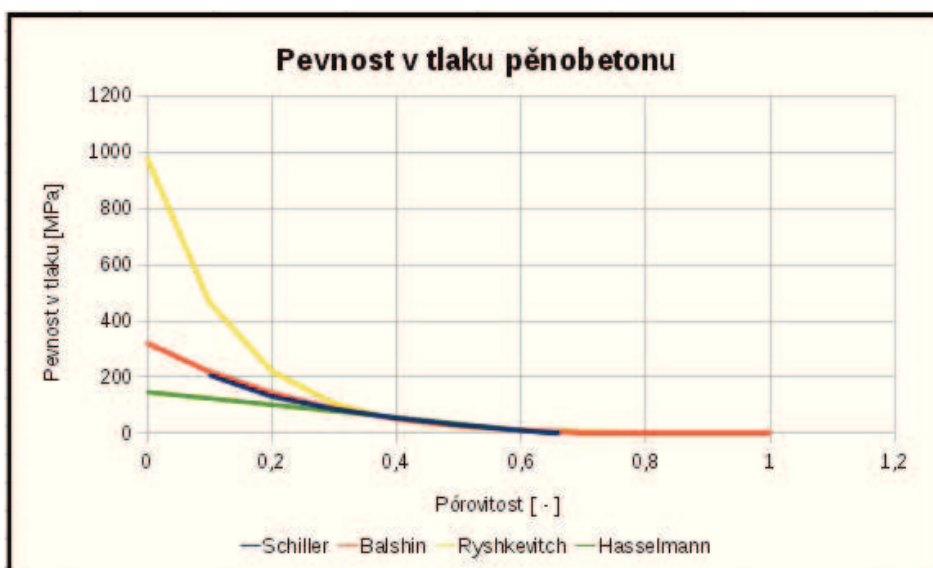


Obr. 5: Pevnost v tlaku cementové pasty závislosti na pórovitosti dle [15]



Obr. 6: Pevnost v tlaku betonu závislosti na pórovitosti dle [2]





Obr. 7: Pevnost v tlaku pěnobetonu závislosti na pórovitosti dle [2]

Všechny uvedené vztahy shodně využívají jako jednu ze vstupních konstant pevnost při nulovém objemu pórů v popisovaném materiálu. Jak je výše ukázáno nemusí však tato hodnota být v některých případech smysluplná.

### 2.3 Vlhkost pórovitých materiálů

Voda hraje v oblasti vlastností stavebních materiálů významnou roli. Většina fyzikálních vlastností je vodou výrazně ovlivňována. Přijímání vlhkosti a její vazba na materiálovou matici může probíhat několika způsoby. Především je to přímým pronikáním kapalné vody množstvím otevřených pórů a jejich vyplnění. Vzdušná vlhkost může naopak do materiálu pronikat nejen prouděním vzduchu, ale i difuzí. Vzdušná vlhkost také obvykle póry zcela nevyplní, ale ulpívá na stěnách, případně chemicky reaguje s pevnou látkou za vzniku nových produktů. Tímto způsobem dochází také ke karbonataci betonu. Ke karbonataci dochází pouze v jisté oblasti vlhkosti. Při dokonale suchém ani dokonale navlhlem betonu karbonatace nevzniká [11]. Zvláštním případem je kapilární vzlínavost kapalné vody. V tomto případě dochází k pronikání vlhkosti do materiálu díky povrchovému napětí na hladině vody. Pokud jsou otevřené póry dostatečně úzké, díky povrchovému napětí jimi může voda vystoupat vysoko nad původní hladinu. Tento problém je často pozorovatelný u starších objektů převážně z cihelného zdiva, které je špatně izolované od podloží. Kapilární vzlínavost zde může vytvořit vlhkostní mapy dosahující desítky centimetrů nad základy objektu.



Obr. 8: Vlké zdivo z důvodu vzlínivosti od podloží

Obsah vlhkosti v pórech není v čase konstantní. Mění se v závislosti na okolních podmínkách a tím se také neustále mění vlastnosti materiálu. Takovéto cykly obvykle materiálům neschválně a způsobují degradační procesy. Vlhké prostředí je příznivé pro biologické procesy a množení plísní a hub [11]. V předchozím textu byla také zmíněna destrukce vlivem mrazu. Rozpínavost ledu způsobuje napětí vznikající v pórovém prostoru. Samostatnou kapitolou je pak změna tepelně izolačních vlastností. Voda má přibližně 25x větší součinitel tepelné vodivosti než suchý vzduch. Vysoce nasáklý materiál tak má zcela jiný tepelný odpor. V případě mechaniky zemin se je ve většině případů nutné zabývat prouděním tekutiny v zemině [7]. Tato práce se však problematikou proudění tekutin pórovitou látkou nezabývá.

### 3 Modelování pórovitých materiálů

Nahlížíme-li na pórovité látky jako na homogenní, můžeme pro jejich modelování využít prostředků klasické teorie pružnosti. Metody teorie pružnosti vycházejí ze vztahů popisujících pružné přetváření tělesa, pokud je vystaveno působení vnějších nebo vnitřních sil. Nejčastěji využívaná teorie lineární pružnosti se omezuje pouze na takové procesy, při kterých dochází k velmi malým vratným přetvořením [19]. Taková přetvoření jsou zanedbatelná vzhledem k rozměrům celého řešeného prvku. Nevyužívá se nelineárních členů výpočtu poměrných přetvoření. Základním vztahem pro pružné přetváření materiálů je tzv. Hookův zákon, popisující vztah mezi napětím ( $\sigma$  [Pa]) a poměrným přetvořením ( $\varepsilon$  [-]) v lineární oblasti. Řešíme-li jednorozměrnou úlohu s předpokladem isotropního materiálů, lze tento zákon zapsat rovnicí.

$$\sigma = E \cdot \varepsilon \quad (5)$$

Konstantou v tomto vztahu je tzv. Youngův modul pružnosti ( $E$  [Pa]) udávající odpor materiálu proti přetvoření. V některých případech se může materiál chovat pružně, avšak nelineárně. V takovém případě pak modul pružnosti není konstantou, ale funkcí poměrných přetvoření. Tato práce se však takovými případy nezabývá.

$$\sigma = E(\varepsilon)\varepsilon \quad (6)$$

Pokud chceme vztah mezi napětím a přetvořením zobecnit na prostorové těleso a případně anisotropní materiál je vhodnější přejít k tenzorovému zápisu mechaniky kontinua [8].

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl} \cdot \varepsilon_{kl} \quad (7)$$

V tomto případě má tenzor napětí shodně devět složek jako tenzor deformace. Tenzor tuhosti pro anisotropní materiál má 81 členů. Díky symetrii se počet prvků redukuje na 21 nezávislých členů. I v tomto případě by však rozepisování jednotlivých rovnic bylo komplikované oproti tenzorovému zápisu. V reálných materiálech se však vyskytují maximálně tři nezávislé směry, ve kterých získáváme konstanty tuhosti materiálu. Pokud je materiál homogenní a isotropní redukuje se nám počet celkových konstant na dvě nezávislé, zmíněný modul pružnosti a Poissonův součinitel příčné roztažnosti ( $\nu$  [-]). Fyzikální rovnice pak získávají jednodušší tvar, který je snadněji zapsatelný v inverzním vztahu pro vyjádření poměrných přetvoření.

$$\begin{aligned}
\varepsilon_x &= \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)] \\
\varepsilon_y &= \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)] \\
\varepsilon_z &= \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_y + \sigma_x)] \\
\gamma_{xy} &= \frac{E}{2(1 + \nu)}\tau_{xy} \\
\gamma_{yz} &= \frac{E}{2(1 + \nu)}\tau_{yz} \\
\gamma_{xz} &= \frac{E}{2(1 + \nu)}\tau_{xz}
\end{aligned} \tag{8}$$

Pro případy teoretické analýzy a pro zápisy například podmínek plasticity se často využívají tzv. invarianty tenzoru napětí nebo deviátoru napětí [8]. Jejich odvození není náplní této práce a je možné odkázat na literaturu [8, 19, 20], která se touto problematikou zabývá. Zde jsou pouze uvedeny významy jednotlivých invariantů. Pro invarianty napětí platí:

$$\begin{aligned}
\mathbf{I}_1 &= \sigma_{11} + \sigma_{22} + \sigma_{33} \\
\mathbf{I}_2 &= \sigma_{11}\sigma_{22} + \sigma_{22}\sigma_{33} + \sigma_{33}\sigma_{11} - \sigma_{12}^2 - \sigma_{23}^2 - \sigma_{13}^2 \\
\mathbf{I}_3 &= \sigma_{11}\sigma_{22}\sigma_{33} + 2\sigma_{12}\sigma_{23}\sigma_{13} - \sigma_{12}^2\sigma_{33} - \sigma_{23}^2\sigma_{22} - \sigma_{13}^2\sigma_{11}
\end{aligned} \tag{9}$$

V předchozí rovnici je použito tenzorové značení pro napětí  $\sigma_{11} = \sigma_{xx}$ , pro smyková napětí  $\sigma_{12} = \sigma_{xy}$ . Invarianty deviátoru napětí je pak možné pro zjednodušení zápisu popsat pomocí invariantů napětí:

$$\begin{aligned}
\mathbf{J}_1 &= 0 \\
\mathbf{J}_2 &= \frac{1}{3}\mathbf{I}_1^2 - \mathbf{I}_2 \\
\mathbf{J}_3 &= \frac{2}{27}\mathbf{I}_1^3 - \frac{1}{3}\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2 + \mathbf{I}_3
\end{aligned} \tag{10}$$

Při řešení problémů teorie pružnosti je však znalost předchozích vztahů nedostačující. Problematika teorie pružnosti a její matematický popis vychází rovnováhy napětí odvozené na diferenciálním elementu spojitého (hmotou dokonale vyplněného prostoru) kontinua a předpokládá, že při deformaci zůstává těleso spojitě. Výše uvedené rovnice jsou pouze jednou ze tří systémů rovnic využívaných při řešení úloh pružnosti a to rovnicemi fyzikálními. Dalším systémem jsou rovnice geometrické. Ty popisují vztahy mezi posuny v

bodech tělesa a poměrným přetvořením.

$$\varepsilon = \partial \mathbf{u} \quad (11)$$

Často je také možno vidět tenzorový zápis vyjádření poměrných přetvoření pomocí posunů [8]. Obě vyjádření jsou lineární a předpokládají vzájemnost smykových napětí. V tenzorovém zápise je tato věta vyjádřená symetrií tohoto tenzoru.

$$\varepsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right\} \quad (12)$$

Rovnice popisující rovnovážný stav na elementu se nazývají též Cauchyho [19]. Jsou odvozeny z podmínek rovnováhy napětí na diferenciálním elementu. Vyjadřují rovnováhu napětí.

$$\partial \sigma + X = 0 \quad (13)$$

Rovnice (6), (7), (8) kompletně popisují problematiku lineární pružnosti tělesa v prostoru. Tyto rovnice však společně vytvářejí systém, ve kterém se dohromady nachází 15 proměnných. Řešením tedy je najít hodnoty pro jednotlivé proměnné pro daný problém a okrajové podmínky. Pro zjednodušení se těchto 15 proměnných často zapisuje vektorově.

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \{u, v, w\} \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \{\varepsilon_x, \varepsilon_y, \varepsilon_z, \gamma_{xy}, \gamma_{yz}, \gamma_{xz}\}^T \\ \boldsymbol{\sigma} &= \{\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_{xy}, \tau_{yz}, \tau_{xz}\}^T \end{aligned} \quad (14)$$

Pro řešení se používají především dva principy, deformační nebo silový. Častější je deformační varianta řešení především díky snadnější formulaci jak problému tak okrajových podmínek [19, 20]. V tomto principu je základem nalezení jednotlivých posunů v řešené oblasti. Pokud nalezneme posuny, jsem schopni přes základní vztahy teorie lineární pružnosti vypočítat složky poměrných přetvoření a napětí. Základní rovnicí pro nalezení posunutí je tzv. Lamého rovnice.

$$\partial D \partial^T u + X = 0 \quad (15)$$

Nevýhodou této rovnice, stejně jako u většiny parciálních diferenciálních rovnic je složitost nalezení řešení. Řešení lze nalézt přímými metodami pouze ve velmi jednoduchých případech. Při většině reálných problémů je nutné využít některé s nepřímých numerických metod. Jednou z takových metod je například metoda konečných prvků [3, 19, 10], která je velmi efektivní a v dnešní době široce využívaná. Informace o této metodě budou uvedeny v dalších kapitolách této práce.

### 3.1 Poromechanika

Poromechanika je oblast popisující metodami mechaniky kontinua statiku, kinematiku a dynamiku pórovité látky. Tato oblast mechaniky není příliš inženýrsky využívána ačkoliv se nejedná o mladý obor. Základy poromechaniky položil již v padesátých letech Biot [], který se zabýval popisem mechaniky pórovitých zemin a jejich konsolidace. Pórovitý materiál je v poromechanice brán jako složený z pevné látky a tekutinou vyplněných pórů, otevřených i uzavřených. I když základem jsou dvě rozdílná prostředí v jednom materiálu, pro celkový popis je bráno, že vlastnosti celku jsou superpozicí těchto dvou prostředí a jejich vlastností [12]. V některých případech je snahou řešit problematiku na mikroúrovni, samostatně pevnou látku a látku tekutou. Takovéto řešení je však matematicky velice složité. Nestačí vyřešit pouze chování jednotlivých složek, ale také jejich vzájemnou interakci. Vzhledem ke složitosti nelze tuto problematiku obvykle vyřešit exaktními matematickými postupy a je nutno přistoupit v numerickým metodám. Avšak i při použití numerických metod nelze vyřešit tímto způsobem větší celky, jelikož by byly nutné velmi výkonné výpočetní prostředky. Jiným přístupem je snaha daný materiál metodami matematické analýzy homogenizovat. Vytvořit tedy jednotný popis celku vycházející z popisu vlastností jednotlivých složek. Takový přístup však vyžaduje analýzu na úrovni diferenciálních rovnic a jejich řešení například pomocí nekonečných řad. Tento postup je v současné době využíván výjimečně ve výzkumných materiálových oblastech nebo ve složitých aplikacích. Základem je popis deformace pevné látky pomocí známých rovnic z mechaniky kontinua. Tedy pomocí složek posunutí vzhledem k počáteční konfiguraci systému [19].

$$\begin{aligned}\bar{x} &= x + u(x, y, z) \\ \bar{y} &= x + v(x, y, z) \\ \bar{z} &= z + w(x, y, z)\end{aligned}\tag{16}$$

Funkce  $u, v, w$  jsou jednotlivými složkami posunutí. Rovnice (16) tedy popisují změnu polohy bodu tělesa. Nejde však pouze o změnu polohy tělesa, ale také o změnu tvaru, která nastává díky deformaci. K tomu použijeme analýzu pomocí dvou bodů v tělese. Postupnou analýzou a linearizací vztahů se postupně dostaneme k rovnici (7). Podrobný výklad problematiky je možno najít například v literatuře [19].

Popis pevné části látky se tedy neliší od popisu známého z teorie pružnosti. Pro začlenění pórů do matematického popisu se využívá pórovitosti, tedy pojmu známého z nauky o

materiálu. Pórovitost vyjadřuje objem dutin a pórů vzhledem k celkovému objemu látky. Pro potřeby mechaniky se vyjadřuje jako bezrozměrné číslo na rozdíl od materiálových věd kde se používá procentuální vyjádření. Pokud tedy máme objem  $V$  a pórovitost  $n$ , můžeme vyjádřit objem pórů jako:

$$V_p = n \cdot V \quad (17)$$

V některých případech je výhodné použít takzvané číslo pórovitosti, které udává poměr objemů pórů k objemu pevné látky.

$$e = \frac{n}{(1 - n)} \quad (18)$$

Pokud si definujeme hustotu pevné látky  $\rho_s$  a hustotu tekutiny vyplňující póry  $\rho_f$  je možné popsat zachování hmotnosti pevné látky a tekutiny v diferenciálním objemu látky  $d\Omega$  při změnách v čase. Rovnice tedy vyjadřují zákon zachování hmoty v celém zkoumaném objemu při deformaci v čase.

$$\frac{d^s}{dt} \int_{\Omega} \rho_s (1 - n) d\Omega = 0 \quad (19)$$

$$\frac{d^f}{dt} \int_{\Omega} \rho_f n d\Omega = 0 \quad (20)$$

Pro vyjádření momentové podmínky rovnováhy celého objemu zkoumaného tělesa  $\Omega$  s hranicí  $\partial\Omega$  je potřeba definovat vnější objemové síly (např. gravitační)  $\mathbf{f}(\mathbf{x})$  a vnější povrchové síly (zatížení)  $\mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{n})$ . působící na toto těleso.

$$\frac{d^s}{dt} \int_{\Omega} \rho_s (1 - n) V^s d\Omega + \frac{d^f}{dt} \int_{\Omega} \rho_f n V^f d\Omega = \int_{\Omega} \rho \mathbf{f}(\mathbf{x}) d\Omega + \int_{\partial\Omega} \mathbf{T}(\mathbf{x}, \mathbf{n}) dS \quad (21)$$

## 3.2 Poroelasticita

Poroelasticita je rozšířením elasticity neboli pružnosti na pórovité látky. Takto rozšířená teorie je aplikovatelná v širokém spektru oborů, například v oblasti hornin a materiálů saturovaných vodou nebo ropnými látkami, zeminy téměř všeobecně, jelikož se povětšinou jedná o zrnité a vysoce pórovité systémy, různé typy pěn a ve zvláštních případech tkaninové systémy. Teorie v padesátých letech odvozena Biotem je určena především pro zeminy a jejich konsolidaci [4]. Teorie slouží především pro popis materiálů s množstvím otevřených pórů a předpokladem je, že uzavřené póry jsou součástí pevné složky. Další autoři však tuto teorii zobecnili jako poromechaniku, případně poroelasticitu, která se snaží obecně pokrýt oblast pórovitých látek, v jejich pórech může být nějaký druh tekutiny [12].

Rozšířením klasické pružnosti (elasticity) na poroelasticitu je tedy zahrnutí mechanických vlastností tekutiny a její interakce s pevnou částí celkového objemu látky. Při řešení isotropního homogenního materiálu v oboru lineární pružnosti využíváme pouze dvě nezávislé materiálové konstanty, a to modul pružnosti  $\mathbf{E}$  a Poissonův součinitel příčné kontrakce  $\nu$ . Ostatní konstanty je možno odvodit z fyzikálních rovnic. Nejčastěji je potřeba modul pružnosti ve smyku daný vztahem

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (22)$$

V případě poroelastivity je nutné rozšířit základní fyzikální rovnice (7) o příspěvek, který vzniká od působení tekutiny v pórech. Při tomto rozšíření nám však do rovnic vstupují další materiálové konstanty. Jednou z nich je modul stlačitelnosti udávající chování při trojosém zatížení. S využitím pórovitosti lze definovat napětí vzniklé v tekutině. Toto napětí vzniká z pórových tlaků vzniklých v tekutině uzavřené v pórech.

$$\sigma^F = -np = Q\varepsilon_{kk} + R\varepsilon_{kk} \quad (23)$$

V předchozí rovnici jsou  $Q$  a  $R$  materiálové konstanty používané v původní teorii [4]. Tekutiny obecně jsou schopné přenášet pouze normálová napětí, na napětí smyková nemají žádný vliv. Běžný tenzor napětí je tedy možné rozšířit o složku z rovnice (20), která rozšiřuje běžná normálová napětí o napětí v tekutině.

$$\left\{ \begin{array}{ccc} \sigma_x + \sigma^F & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_y + \sigma^F & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_z + \sigma^F \end{array} \right\}$$

Napětí v pevné části látky je vyjádřeno obdobně jako v běžné teorii pružnosti s tím rozdílem, že se započítává napětí při všesměrném tlaku, které je vyjádřeno pomocí modulu stlačitelnosti  $K$ .

$$\sigma_{ij}^S = 2G\varepsilon_{ij}^S + \left( K - \frac{2}{3}G + \frac{Q^2}{R} \right) \varepsilon_{kk}^S + Q\varepsilon_{kk}^S \delta_{ij} \quad (24)$$

Zavedením Biotova koeficientu  $\alpha$  a sečtením rovnic (20),(21) s využitím rovnice (19) dostáváme celkové napětí ve zkoumaném elementu materiálu.

$$\sigma_{ij} = 2G\varepsilon_{ij}^S + \left( K - \frac{2}{3}G \right) \varepsilon_{kk}^S \delta_{ij} - \alpha \delta_{ij} p \quad (25)$$

Kde Biotův koeficient  $\alpha$  je dán vztahem.

$$\alpha = \left( 1 + \frac{Q}{R} \right) \quad (26)$$



Je tedy zřejmé, že v případě nulové pórovitosti nevzniká žádný pórový tlak a rovnice degeneruje v klasickou rovnici známou z teorie pružnosti. Jednotlivé materiálové konstanty, včetně modulu stlačitelnosti jsou závislé na tom zda se jedná o vysušený nebo nevysušený stav materiálu. V geotechnice jsou známějšími termíny odvodněný a neodvodněný materiál. V případě vysušeného materiálu se v pórech nenachází žádná kapalina a nevzniká tak pórový tlak. V aplikačních záležitostech je výhodné konstitutivní vztahy zjednodušit nebo upravit tak, aby co nejvíce odpovídaly známým vztahům teorie pružnosti. Není pak potřeba výrazně přepracovávat systémy pro jejich řešení. V tomto případě je výhodné využít vyjádření Poissonovy konstanty pomocí modulu stlačitelnosti a modulu pružnosti ve smyku.

$$\nu = \frac{3K - 2G}{2(3K + G)} \quad (27)$$

S touto definicí je pak možno použít známé konstitutivní vztahy z teorie pružnosti inverzní k rovnicím popsaným vztahem (7). Například pro napětí v ose x.

$$\sigma_x = 2G \left( \varepsilon_x + \frac{\nu}{1 - 2\nu} e \right) \quad (28)$$

kde označíme pro rovnici (22) a (25)

$$\varepsilon_{kk} = e = \varepsilon_x + \varepsilon_y + \varepsilon_z \quad (29)$$

V celé zkoumané oblasti musí platit rovnovážný stav mezi napětím a vnějšími silami na oblast působícími.

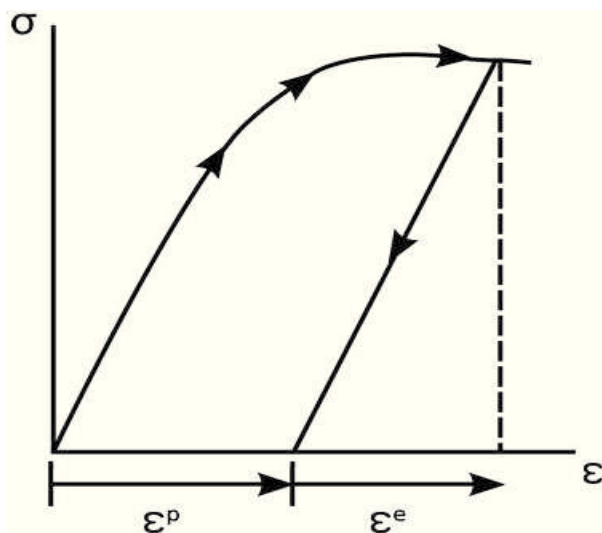
$$\sigma_{ij} = -F_i \quad (30)$$

$F_i$  jsou obecně označeny vnější povrchové síly působící na zkoumanou oblast. Nejvýhodnější je pro řešení dané problematiky hledat v systému pole posunutí, ze kterého je možné pomocí konstitutivních vztahů odvodit napětí. Postupným dosazením do rovnice (27) z rovnice (22), do které je dosazeno za tenzor deformace (9) dostaneme parciální diferenciální rovnici pro pole posunutí v pórovitém materiálu.

$$-G\nabla^2 u - \frac{G}{1 - 2\nu} \nabla(\nabla \cdot u) + \alpha \nabla p = -F \quad (31)$$

### 3.3 Poroplasticita

Poroplasticita stejně jako běžná nauka o plasticitě popisuje chování materiálu po překročení meze kluzu, případně se snaží popsat mez křehkého porušení, kdy vznikají trvalé a nevratné deformace. Narozdíl od klasické nauky však u poroplasticity dochází také k nevratným změnám v pórovitosti a objemu tekutiny obsažené v materiálu. Celková přetvoření jsou součtem přetvoření pružných a plastických.



Obr. 9: Pružno-plastické chování materiálu

$$\varepsilon = \varepsilon^e + \varepsilon^p \quad (32)$$

Nejinak je tomu u porovistosti materiálu.

$$n = n^e + n^p \quad (33)$$

Jelikož proces plastického přetváření materiálu je často výrazně nelineární a v mnoha případech časově závislý, je výhodné předchozí rovnice zapsat v přírůstkovém tvaru. Například pro poměrná přetvoření dostaneme:

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p \quad (34)$$

Celková přetvoření definované rovnicí (29) jsou pak integrálním součtem těchto jednotlivých přírůstků. Po definování přetvoření je možné sestavit konstitutivní vztah pro napětí v pružno-plastickém materiálu. Pro zjednodušení zapsaný v tenzorovém zápise, kde  $b_{ij}$  je tenzor Biotových koeficientů.

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}(\varepsilon_{kl}^e - \varepsilon_{kl}^p) - b_{ij}p \quad (35)$$

Při daném napětí  $\sigma_{ij}$  a porovém tlaku  $p$  v materiálu mohou nastat (pokud se jedná o pružnoplastický materiál) dva stavy chování materiálu. V případě kdy vznikají pouze vratná přetvoření se jedná o chování čistě pružné. Pokud je dosaženo meze kluzu (či meze plasticity) nastává nevratné přetvoření. Materiál pak po překročení meze kluzu může vykazovat různé typy zpevnění, případně změkčení. V ideálních případech dochází k plastickému tečení, tedy přetváření za konstantního napětí. V případě velmi křehkého materiálu dochází k okamžité destrukci, a tedy mez plasticity může být použita jako mez konečného porušení a udává maximální možné přetvoření. To v jaké oblasti se daný materiál při zatížení nachází je možné definovat pomocí funkce nebo podmínky popisující mez kluzu materiálu. V poroplasticitě se jedná o funkci minimálně dvou proměnných, napětí a pórového tlaku[12].

$$f(\sigma_{ij}, p) = 0 \quad (36)$$

Pokud se materiál v průběhu zatěžování nachází v pružné oblasti je tato podmínka definována jako

$$f(\sigma_{ij}, p) < 0 \quad (37)$$

Nevýhodou všech podmínek z oblasti poroplasticity je fakt, že z běžné zkoušky pevnosti v tlaku nebo v tahu nelze získat všechny parametry potřebné pro její aplikaci. Především pórové tlaky je nutno měřit při triaxiálním zatížení s možností ovlivnění těchto tlaků uvnitř vzorku. Z naměřených dat je pak možno stanovovat například Biotovy koeficienty nebo modul stalčitelnosti. Pokud nemáme tato data k dispozici je nutné přistoupit k náhodnému testování parametrů a pokusit se co nejlíže přiblížit k reálu, především co se týče napětí a deformace na mezi plasticity.

### 3.4 Podmínka plasticity Cam-Clay

Tento model plasticity byl původně vytvořen v šedesátých letech minulého století pro problematiku konsolidace jílu satureovaných vodou. Běžné podmínky plasticity jsou obvykle koncipovány pro materiály s vnitřní soudržností a třením. Měkké horniny a jíly obvykle nejsou schopny přenášet jakékoliv tahové zatížení nebo vysoké tlaky. Díky zkoumání chování jílu z řeky Cam byl na univerzitě v Cambridge odvozen vztah pro popis plastického chování Cam-Clay. Později byl různě modifikován a je využíván pro zeminy, jíly a často

také měkké horniny. V trojrozměrném prostoru je tato podmínka definována jako [12]:

$$2f(p', q, p_{co}) = \left(p' - \frac{1}{2}p_{co}\right) + \frac{q^2}{M^2} - \frac{1}{4}p_{co}^2 \quad (38)$$

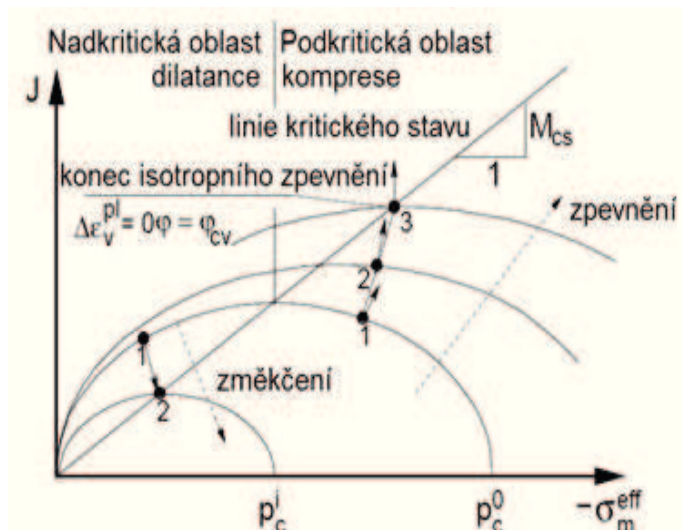
kde

$$p' = -\sigma' \quad (39)$$

$-\sigma'$  je takzvané efektivní napětí. Tedy totální napětí snížené o pórové tlaky. Dále deviatorický tlak:

$$q = \tau\sqrt{3} = |\sigma_I - \sigma_{III}| \quad (40)$$

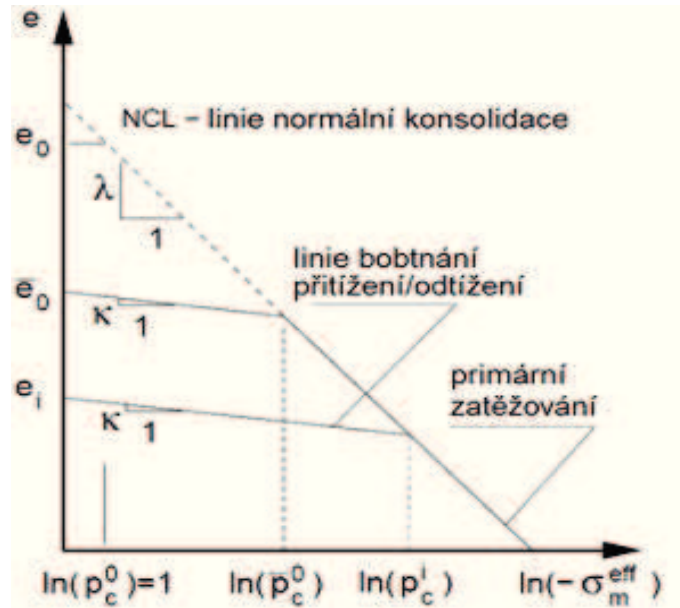
Parametr  $M$  označuje materiálovou konstantu a  $p_{co}$  je efektivní konsolidační tlak. Jak je vidět z vlastností, na kterých daná podmínka plasticity závisí není příliš vhodná pro materiály, které nejsou schopné přílišné konsolidace tedy snížení pórovitosti vlivem deformace při zatížení. U většiny materiálů s dostatečně tuhou maticí dojde dříve ke zborcení pórů a poškození struktury. Podmínka je však vhodná jako srovnávací s jinými a také proto, že jako jedna z mála zahrnuje při své aplikaci pórovitost materiálu. Při vykreslení podmínky v rovině  $(p', q)$  dostáváme zatěžovací křivku, která má tvar elipsy. Implementace modifikované podmínky Cam-Clay je například v programovém balíku Code-Aster, který vyvíjí francouzská energetická společnost EDF [22].



Obr. 10: Cam-Clay podmínka v zatěžovací deviatorické rovině

Pro použití podmínky je potřeba několik materiálových konstant a parametrů modelu. V první řadě jsou to samozřejmě modul pružnosti  $E$  a poissonova konstanta příčné kontrakce  $\nu$ . Dále je to modul objemové stlačitelnosti  $K$  a modul pružnosti ve smyku  $G$ . Mezi těmito čtyřmi konstantami existují vzájemné vztahy, takže je možné pomocí dvou známých konstant dopočítat zbývající. Dalšími parametry jsou  $\lambda$  respektive  $\kappa$  což jsou směrnice

pro normální konsolidaci respektive směrnice bobtnání Obr.11. Důležitým parametrem je samozřejmě pórovitost materiálu. Vnitřní promennou v implementaci balíku Code-Aster je ještě kritický tlak, který je roven polovině konsolidačního tlaku. Především konsolidační proměnné se těžko získávají. Pokud nejsou známy je nutné provést inverzní analýzu, náhodně testovat a hledat takové parametry kdy dojde k porušení modelu shodným s porušením zkoušeným při zatěžovacích zkouškách.



Obr. 11: Chování materiálu při isotropním stlačování

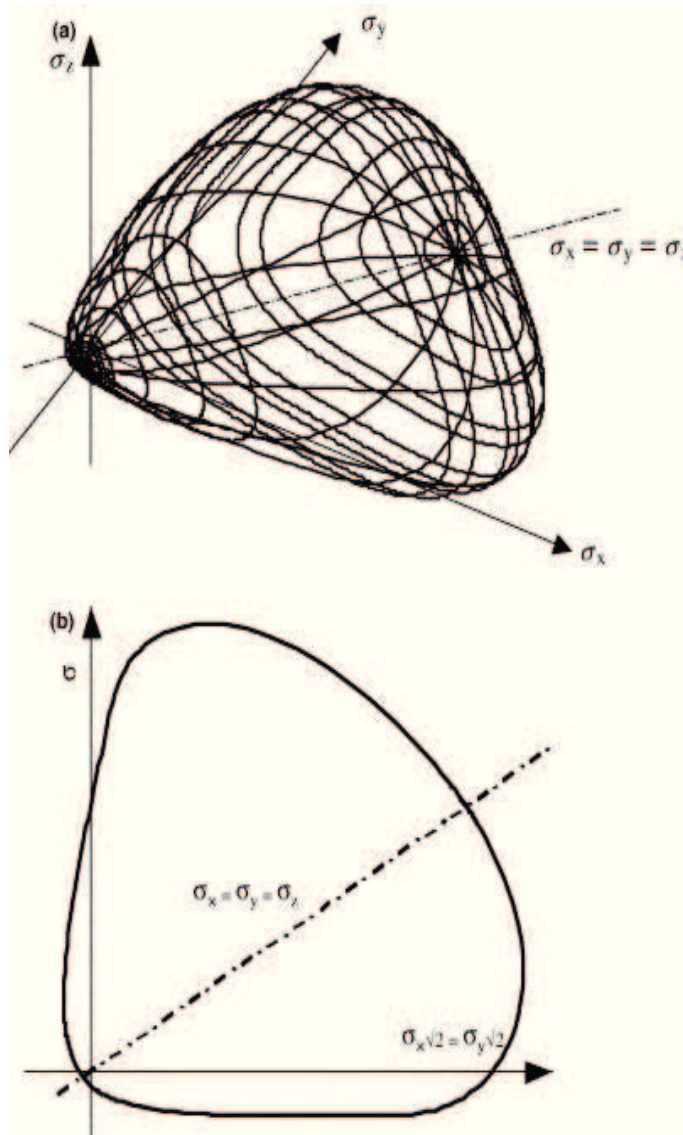
### 3.5 Podmínka plasticity MSDPu

Podmínka plasticity pro pórovité materiály nazvaná MSDPu je jednou mladších podmínek. Poprvé byla definována autory Aubertinem a Simonem a Li na konci devadesátých let a byla zavedena pro popis chování tvrdých hornin a podobných křehkých materiálů s nízkou pórovitostí. Tato podmínka ačkoliv zahrnuje pórovitost nevychází z poromechaniky, ale zavádí materiálové parametry na pórovitosti závislé. Ve zjednodušeném zápise pomocí invariantu deviátoru napětí má podmínka poměrně jednoduchý zápis.

$$F = \sqrt{(J_2)} - F_0 F_\pi = 0 \quad (41)$$

Ilustraci plochy plasticity a její řez v rovině kolmé na rovinu oktaedrického napětí poskytuje následující obrázek[13].

Jednotlivé složky pro popis chování v rovině invariantu napětí  $I_i$  a invariantu deviátoru



Obr. 12: Podmínka MSDPu v prostoru a řezu [13]

$\sqrt{(J_2)}$  definované v podmínice jako  $F_O$  a v rovině oktaedrického napětí  $F_\pi$  dávají této podmínice celkově značnou složitost. První člen je definován jako:

$$F_0 = [\alpha^2(I_1^2 - 2a_1I_1) + a_2^2 - a_3\langle I_1 - I_c \rangle^2]^{1/2} \quad (42)$$

kde prvky  $a_1$ ,  $a_2$ ,  $a_3$  a  $I_c$  jsou materiálové charakteristiky získané ze základní vlastností, především pevností v tahu a tlaku. Závorky  $\langle \rangle$  jsou nazvány MacCauleyho a mají definici

$$\langle x \rangle = \left( \frac{x + |x|}{2} \right) \quad (43)$$

Druhý člen popisující chování materiálu v rovině oktaedrického napětí je zapsána jako:

$$F_\pi = \left( \frac{b}{[b^2 + (1 - b^2)\sin^2(45^\circ - 1.5\theta)]^{1/2}} \right)^v \quad (44)$$

Parametr  $\alpha$  je definován jako:

$$\alpha = \frac{2\sin\phi}{\sqrt{3}(3 - \sin\phi)} \quad (45)$$

Tento parametr je převzat z podmínky Drucker-Prager a je definován pomocí úhlu vnitřního tření materiálu  $\phi$ . Ostatní materiálové charakteristiky jsou definovány na základě pevností nebo empirických konstant. Postupně tedy:

$$a_1 = \left( \frac{\sigma_c - \sigma_t}{2} \right) - \left( \frac{\sigma_c^2 - (\sigma_t/b)^2}{6\alpha^2(\sigma_c + \sigma_t)} \right) \quad (46)$$

$$a_2 = \left\{ \left( \frac{\sigma_c + (\sigma_t/b)^2}{3(\sigma_c + \sigma_t)} - \alpha^2 \right) \sigma_c \sigma_t \right\}^{1/2} \quad (47)$$

V předchozích vzorcích je  $\sigma_c$  a  $\sigma_t$  označení pro pevnost v tlaku a pevnost v tahu. Parametry  $a_3$  a  $I_c$  zohledňují chování materiálu při vysokém hydrostatickém tlaku. Pro materiály s velmi vysokou pórovitostí dosahuje parametr velmi nízkých hodnot. Parametr  $a_3$  je definován na základě předchozích parametrů a invariantů napětí.

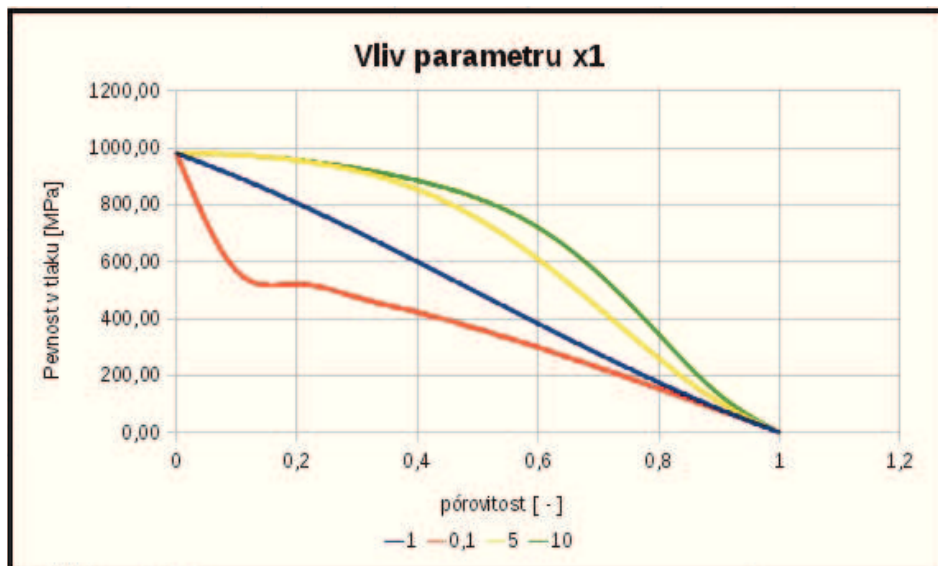
$$a_3 = \frac{\alpha^2(I_1 - 2a_1I_1) + a_2^2}{(I_1 - I_c)^2} \quad (48)$$

Ostatní materiálové parametry jsou empiricky získané konstanty na základě experimentálních zkoušek materiálů. Otázkou tedy zůstává jakým způsobem je do podmínky zavedena pórovitost materiálů. Autoři podmínky zavedli vztah pro výpočet pevnosti v jednoosém tahu a tlaku závislý na pórovitosti. Tento vztah má podobný význam jako vztahy definované v kapitole 2. Opět je snahou vytvořit regresní křivku pro závislost pevnosti na pórovitosti. Tento vztah je definován

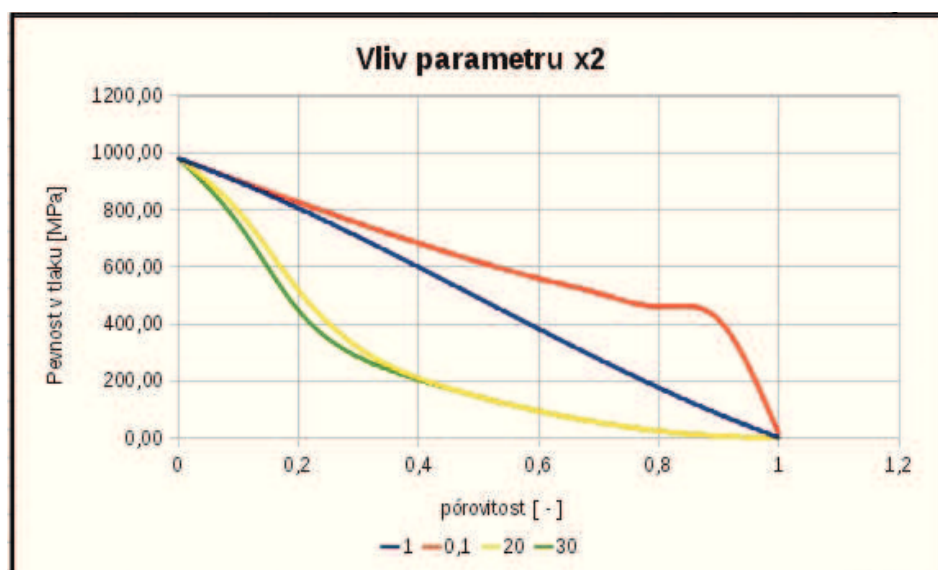
$$\sigma_{un} = \left\{ \sigma_{u0} \left( 1 - \sin^{x_1} \left( \frac{\pi \cdot n}{2n_c} \right) \right) + \langle \sigma_{u0} \rangle \cos^{x_2} \left( \frac{\pi \cdot n}{2n_c} \right) \right\} \left\{ 1 - \frac{\langle \sigma_{u0} \rangle}{2\sigma_{u0}} \right\} \quad (49)$$

Tato rovnice je použitelná jak pro pevnosti v tlaku tak v tahu. Záleží na tom jaké parametry dosadíme za pevnost označenou jako  $\sigma_{u0}$ , která vyjadřuje pevnost na teoretické úrovni nulové pórovitosti. Stejně jako parametr  $n_c$  označován jako kritická pórovitost kdy se již pevnost stává zanedbatelnou. Pro jednoduché případy lze tuto hodnotu vzít jako  $n_c = 1$ . Výrazy  $x_1$  a  $x_2$  popisují tvar regresní křivky aproximující experimentálně získaná data. Pomocí vhodně zvolených konstant a pevnosti je možné vytvořit křivku shodnou

například s Balshinovou křivkou upravenou pro pěnobeton. V tomto případě jsou konstanty zvoleny přibližně  $x_1 = 0,15$  a  $x_2 = 26$ . Jejich vliv na tvar aproximační křivky je vyobrazen v následujících grafech Obr. 13 a 14.



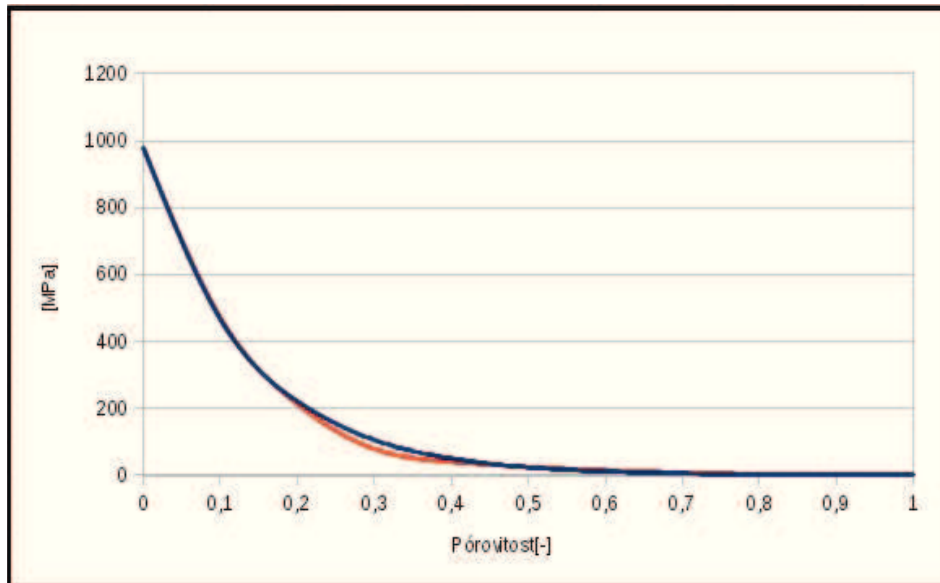
Obr. 13: Vliv parametru  $x_1$  na tvar křivky



Obr. 14: Vliv parametru  $x_2$  na tvar křivky

Použitím některé z numerických metod např. metody nejmenších čtverců by bylo možné najít konstanty přesněji. Jako pevnost pro nulovou porositu byla zvolena hodnota 981MPa, která vychází z Balshinovy rovnice. Následující obrázek Obr. 15. ukazuje dané srovnání.





Obr. 15: Srovnání křivek Balshinovy a MSDPu

Na obrázku je vidět, že se správně zvolenými parametry může křivka určená pro podmínku MSDPu aproximovat téměř jakákoliv data.

## 4 Metoda konečných prvků

Metoda konečných prvků (MKP) je velmi aktivně používaná numerická metoda využívaná k přibližnému řešení fyzikálních problémů, které je možno popsat parciálními diferenciálními rovnicemi. Z matematického hlediska se jedná o variační metodu avšak od klasických variačních metod vytvořených Ritzem nebo Galerkinem má zásadní odlišnost. Rozdíl tkví především v tom, že tato metoda nehledá řešení pro celou zkoumanou oblast avšak rozděljuje ji na jednoduché podooblasti nazývané konečné prvky[3]. Na tyto konečné prvky je aplikována tzv. tvarová funkce, která je aproximací hledaných veličin na prvku. Vhodné zvolení tvarové funkce má velký vliv na přesnost a stabilitu numerického řešení. Přesnost výsledného řešení lze mnohými způsoby zlepšit. Příkladem může být zhuštění sítě prvků v problematické oblasti, nebo využití složitějšího aproximačního polynomu [9, 10]. Při rozdělování oblasti na konečné prvky je zcela na osobě zpracovávající zadání výpočtu, jakým počtem prvků a jakým způsobem zkoumanou oblast rozdělí. Obecně by se dalo říci, že hustší rozdělení by mělo více konvergovat k řešení přesnému, avšak omezení plynou nejen z velikosti soustavy rovnic, kterou je pak nutné řešit, ale také ze stability výpočtu plynoucí z toho, že na počítačových systémech je možno využívat pouze omezené množství desetinných míst. Při velkém počtu desetinných míst pak také snadněji dochází k zaokrouhlovacím chybám, vzniklým při výpočtu. Volba kvalitní sítě konečných prvků je tak ovlivněna zkušeností. Zřejmou výhodou oproti klasickým variačním metodám je výhodnější možnost aproximovat i složité geometrie pomocí poměrně jednoduchých funkcí. Pro jednotlivé prvky je nutno definovat jejich vzájemné spojení, které ve většině případů vychází ze spojitosti v uzlových bodech. Pro zvolené funkce pak tedy hledáme konstanty, kterými dané funkce vynásobíme tak aby se co nejvíce blížily skutečnému řešení. Důležité je, kterou veličinu v dané oblasti aproximujeme, z toho také vychází zda se jedná o deformační nebo silovou variantu MKP. Při deformační variantě v dané oblasti aproximujeme uzlová posunutí, při variantě silové aproximujeme napětí. Deformační varianta se využívá častěji především díky jednoduššímu způsobu zavádění okrajových podmínek[20]. Jak už bylo výše uvedeno existuje různé množství různě složitých konečných prvků. Tyto prvky se odvíjejí od toho jakou oblast řeší, a také jaké vlastnosti jsou očekávány. V inženýrské praxi stavebních konstrukcí jde především o to zda řešíme konstrukci prutovou tedy jednorozměrnou, plošnou nebo prostorovou. Základní volba je tedy dimenze prvku. Na každém uzlu prvku pak aproximujeme tolik hodnot kolik jich existuje v řešeném problému.

V případě trojrozměrné úlohy pružnosti se jedná o tři uzlová posunutí.

## 4.1 Postup při řešení pomocí MKP

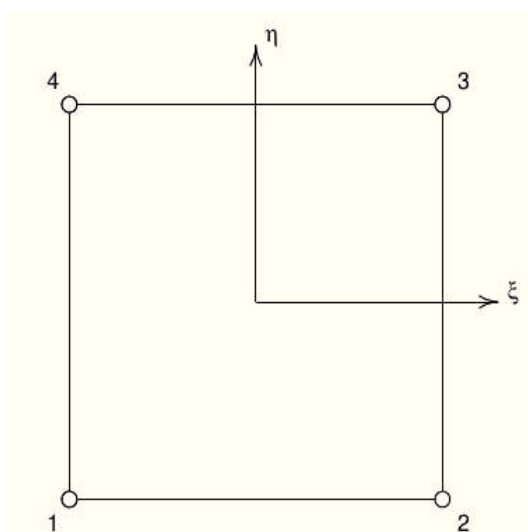
Při řešení pomocí metody konečných prvků je tedy pomocí aproximačních funkcí převedena úloha nalezení řešení parciální diferenciální rovnice na úlohu vyřešení soustavy rovnic. Jako aproximační funkce nejčastěji volíme polynomy, především kvůli jejich snadné diferencovatelnosti [3, 20, 9]. Můžeme zvolit polynom jakéhokoli řádu, obecně zapsáno jako:

$$u(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4x^2 + a_5xy + a_6y^2 + \dots + x_ny^m \quad (50)$$

Nejčastěji však využíváme polynomy do třetího nebo čtvrtého řádu, v závislosti na tom, jakou úroveň přesnosti vyžadujeme. Dále máme definován vektor uzlových posunutí. Uvažujeme rovinný problém se dvěma posuny v každém uzlu.

$$\{r\} = \{u_1, v_1, \dots, u_n, v_n\} \quad (51)$$

V řešených problémech teorie pružnosti se velké množství případů převádí na rovinnou úlohu. Především pro zjednodušení a snížení dimenze. V této práci jsou také porovnávány modelové příklady z pohledu využití 2D nebo 3D modelu zkoumané oblasti. Pro tuto problematiku je vhodné používat isoparametrické elementy. U těchto elementů jsou posuny převáděny z jednotkového prvku na skutečný [9]. Nejčastěji využívaným je čtyřuzlový isoparametrický prvek při rovinných ulohách, v prostorových je to pak osmiuzlový prvek.



Obr. 16: Isoparametrický čtyřuzlový prvek

Tvarová funkce elementu je popsána v lokálním jednotkovém souřadnicovém systému

$(\xi, \eta)$ . Jednotlivé tvarové funkce pak nabývají tvaru.

$$\begin{aligned} N_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 - \eta) \\ N_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 - \eta) \\ N_3 &= \frac{1}{4}(1 - \xi)(1 + \eta) \\ N_4 &= \frac{1}{4}(1 + \xi)(1 + \eta) \end{aligned} \tag{52}$$

Abychom však mohli aproximovat deformaci prvku  $\varepsilon$  je potřeba znát parciální derivace složek posunutí. Tyto posunutí jsou však dána v souřadnicové soustavě  $(\xi, \eta)$ , proto je nutné je převést. Z matematiky je znám postup pro derivaci složené funkce[20, 3].

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial v} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial x} & \frac{\partial y}{\partial x} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial v} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}] \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial v} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix}$$

Pomocí inverzní Jakobiho matice pak můžeme zjistit derivace pole posunutí.

$$\begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial u}{\partial v} \\ \frac{\partial u}{\partial y} \end{Bmatrix} = [\mathbf{J}]^{-1} \begin{Bmatrix} \frac{\partial u}{\partial \xi} \\ \frac{\partial u}{\partial v} \\ \frac{\partial u}{\partial \eta} \end{Bmatrix}$$

Dosadíme li za uzlová posunutí aproximaci v podobě tvarových funkcí a celou rovnici poté dosadíme do rovnice (9), dostaneme aproximaci pole posunutí pomocí tvarových funkcí.

$$\{\varepsilon\} = [\partial]^T [N(\xi, \eta)] \{r\} \tag{53}$$

Maticově lze poslední rovnici zapsat jako[3]:

$$\{\varepsilon\} = [\mathbf{B}] \{r\} \tag{54}$$

## 4.2 Matice tuhosti konečného prvku

Pomocí předchozích rovnic jsme schopni sestavit systém pro řešení rovnice pružnosti pomocí Lagrangeova deformačního principu[20].

$$\int_V \{\varepsilon\}^T \{\sigma\} dV - \int_V \{u\}^T \{p\} dV - \{r\} \{R\} = 0 \tag{55}$$

Při dosazení z rovnic (54) do (55) dostaneme

$$\int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] \{r\} dV - \int_V ([\mathbf{N}] \{r\})^T \{p\} dV - \{r\} \{R\} = 0 \tag{56}$$

Význam jednotlivých členů rovnice je postupně matice tuhosti prvku

$$\mathbf{K} = \int_V [\mathbf{B}]^T [\mathbf{D}] [\mathbf{B}] dV \quad (57)$$

matice objemových sil (často se vynechává):

$$\mathbf{X} = \int_V ([\mathbf{N}])^T \{p\} dV \quad (58)$$

a nakonec vektor vnějších sil:

$$\mathbf{F} = \{R\} \quad (59)$$

Cílem je tedy nalézt vektor uzlových posunutí  $\mathbf{r}$  z rovnice:

$$\mathbf{K}\mathbf{r} - \mathbf{X} = \mathbf{F} \quad (60)$$

### 4.3 Numerická integrace v MKP

Z předchozích rovnic je zřejmé, že v metodě konečných prvků je nutné provést integrování. Podle úlohy záleží na tom zda integrujeme v prostoru, ploše nebo jedorozměrné oblasti. Samotnou integraci není možné vypočítat analytickými metodami. Je nutné se uchýlit k metodám numerickým. Nejčastěji využívanou metodou při integrování v MKP je tzv. Gaussova kvadratura [3, 10, 20]. Pro jednotlivé 1D, 2D a 3D úlohy má tato integrační formulace tvar:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 f(\xi) d\xi &= \sum_{p=1}^m \alpha_p f(\xi_p) \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta &= \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \alpha_p \alpha_q f(\xi_p, \eta_q) \\ \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta &= \sum_{p=1}^m \sum_{q=1}^m \sum_{r=1}^m \alpha_p \alpha_q \alpha_r f(\xi_p, \eta_q, \zeta_r) \end{aligned} \quad (61)$$

V této rovnici jsou  $\alpha$  váhové koeficienty, které jsou dány řádem kvadratury 'm'. Toto číslo udává také počet bodů, ve kterých se vyčísluje integrand. V běžných případech se používá řád kvadratury maximálně  $m=4$ , což dává v rovině 4 a v prostoru 8 integračních bodů. V některých případech využití například kvadratických prvků nebo složitějších se využívá i více než 20 integračních bodů. V těchto případech je již samotná implementace velice složitá. Souřadnice bodů a váhové koeficienty pro základní tři řády kvadratury vypisuje následující tabulka.

Tab. 2: Souřadnice bodů a váhové koeficienty Gaussovy kvadratury

$m$	$\pm\xi_s$	$\alpha_s$
2	0,577350269189626	1,0
3	0,774596669241483	0,55555 55555 55556
	0,000000000000000	0,88888 88888 88889
4	0,861136311594053	0,34785 48451 37354
	0,339981043584856	0,65214 51548 62546

Koeficienty v předchozí tabulce vychází z aproximace skutečné plochy pomocí polynomu. Základem pro Gaussovu kvadraturu jsou polynomy Hermitovy. Můžou se však použít polynomy jiné, například Legendrovy nebo Čebyševovy. V některých případech může být užití jiného typu polynomu výhodnější.

## 5 Experimentální zkoušení pórobetonu

Cílem této práce je aplikovat dříve popsané modely na pórobeton, byly provedeny experimentální zkoušky pro získání některých základních charakteristik pórobetonu. Pórobeton je v současnosti ve velké míře využíván především pro stavby rodinných domů případně jako výplňové zdivo obvodových plášťů. Vzhledem k jeho použití výrobci udávají především parametry užitných vlastností jako je součinitel tepelné vodivosti nebo zvuková neprůzvučnost. Mechanické parametry jsou uváděny pouze orientačně s odvoláním na maximální počet podlaží, které je možno z tohoto materiálu vyrobit. Modul pružnosti je uváděn pouze vyjímečně. V této práci bylo odzkoušeno několik vzorků komerčně dostupného šedého pórobetonu. Zjišťován byl modul pružnosti, pevnost v tlaku a při těchto zkouškách byly zaznamenávány jednotlivé pracovní diagramy. Na vzorcích byla také zjišťována zdánlivá pórovitost. Pro zkoušení modulu pružnosti bylo využito postupu z normy pro jeho stanovení. Norma uvádí zkoušení na hranolu rozměru 100x100x300mm. Pro potřeby této práce byly vyrobeny hranoly částečně odlišných rozměrů vzhledem k rozměrům tvarovek, které byly pro zkoušení nakoupeny. Hranoly měly rozměr 125x125x300mm, protože byly připravovány z příčkové tvarovky rozměru 500x250x125 jak je ukázáno na obrázku. Na



Obr. 17: Příčková porobetonová tvarovka Porfix

tyto hranoly byl umístěn snímač dráhy taky, aby konce od sebe byly vzdálené 200mm a následně byl umístěn do zkušebního lisu. Jelikož je pórobeton vysoce křehký materiál, je potřeba ho při zkoušce zatěžovat velmi pomalým nárůstem deformace. Na zkušebním zařízení nebylo možno dosáhnout rychlosti nárůstu požadovaného normou, rychlost byla proto o něco větší. Deformace byla zvyšována rychlostí 0,5mm za minutu. Jednotlivé vzorky byly zatěžovány až do porušení a ve většině případů ještě nějakou dobu po porušení. Pro-

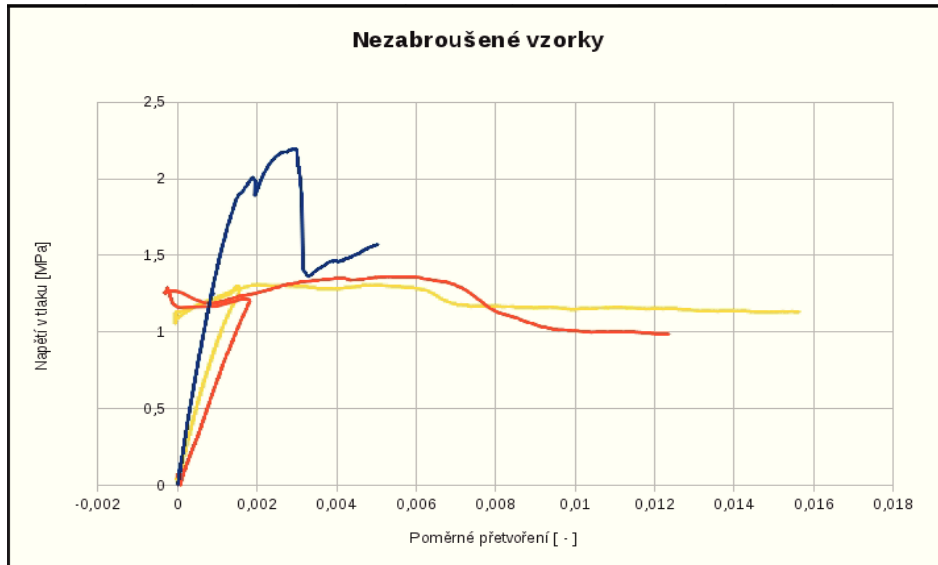
blémem u zkoušených vzorků je jejich příprava. Při zkouškách se ukázalo, že je velice důležité, aby zatěžované plochy byly co nejrovnější, jinak může dojít k rozštípnutí hranolu, případně odštípnutí stěny. Takové porušení vzhledem k umístění snímače dráhy pak výrazně zkresluje chování celého prvku. Při nerovnoměrné ploše může také dojít k borcení hranolu na jednu stranu a deformace narůstají kladně jako by byl hranol tažen. Deformační diagramy zkoušených těles s nezabroušenými tlačnými plochami jsou na obrázku (Obr.19). Následující obrázek Obr.18. ukazuje uchycení hranolu do zkušebního zařízení s osazeným měřičem dráhy. Na tělese jsou přilepeny úchyty, na kterých je umístěn vlastní snímač dráhy propojený s laboratorním lisem.



Obr. 18: Uchycení hranolu v lisu se snímačem na jedné stěně

Při zatěžování dojde nakonec k porušení ve vzniklých smykových plochách. Při destrukci pórových stěn vznikají nenosné plochy, které již drží pohromadě jen třecími silami a vzájemně se posunují. Následující obrázek ukazuje nevhodné porušení příčným tahem vlivem vypoukleho zaoblení horní přítlačné plochy hranolu. Na dalším obrázku (Obr.20. vpravo) je pak vidět vhodnější porušení vznikem smykové plochy od horní tlačné plochy směrem do středu hranolu. Pro omezení nepříznivých vlivů je vhodné využít několika opatření. Předem je potřeba vytvořit co nejrovnější tlačné plochy. Toho je možné docílit zabroušením tlačných ploch do roviny. Pro větší přesnost při měření je vhodné snímat deformaci na více bočních plochách. Pro tuto potřebu byl vytvořen pružinový úchytný systém s možností upevnění dvou snímačů dráhy. Jejich nevýhodou je menší přesnost





Obr. 19: Deformační diagramy nezabroušených hranolů (snímač na jedné stěně) 0,01mm. U materiálů z větším modulem pružnosti tak dochází k výrazně skokovitému záznamu. Při zkoušení nasáklého pórobetonu byla také provedena varianta s odlehčením. Na deformačním diagramu toto odlehčení odpovídá smyčce. Dá se konstatovat, že odlehčení proběhlo zcela v lineární oblasti.

## 5.1 Modul pružnosti

Pro stanovení modulu pružnosti je potřeba získat pracovní diagram a určení lineárně pružné oblasti materiálu. Zkušební norma uvádí vzorec pro výpočet modulu pružnosti z hodnot zjištěných při provedené zkoušce[1].

$$E = \kappa \frac{R_{cc}}{\Delta L} \quad (62)$$

Kde  $R_{cc}$  je pevnost v tlaku a  $\Delta L=1,0mm.m^{-1}$

$$\kappa = \frac{F_{exp}}{F_r}$$

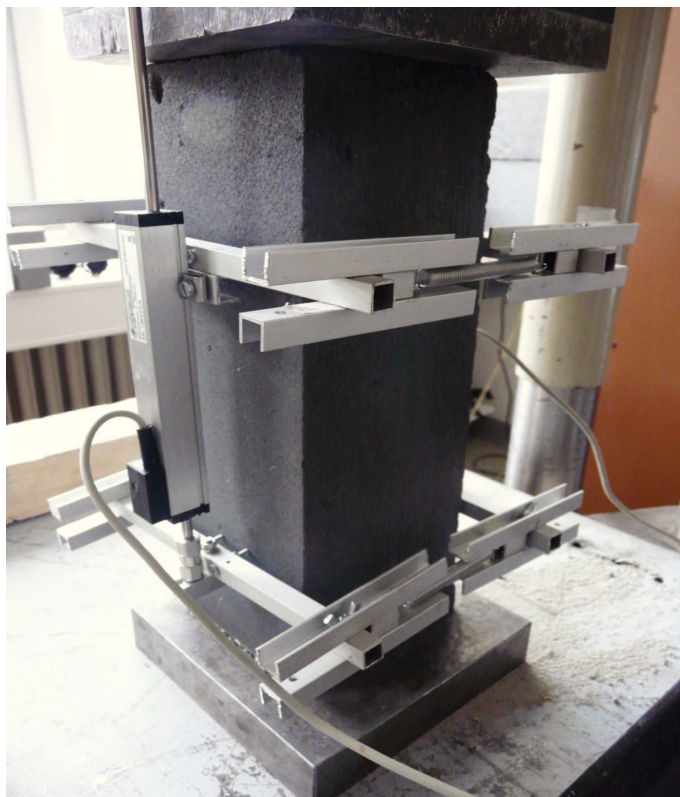
$F_{exp}$  síla při  $\Delta L=1,0mm.m^{-1}$

$F_r$  maximální dosažená síla při zkoušce.

Vlastní výpočet modulu pružnosti byl proveden dvěma způsoby. Jedním způsobem byl výpočet dle normového postupu. Tento postup však není příliš vhodný pro nasáklý pórobetone. Jak je vidět z deformačního diagramu sklon křivky se u suchého a nasáklého vzorku příliš neliší, avšak ve vzorci figuruje pevnost. Pevnost je však u nasáklého vzorku přibližně o 30% nižší. Modul pružnosti pak vychází velice malý. Další možností bylo zvo-

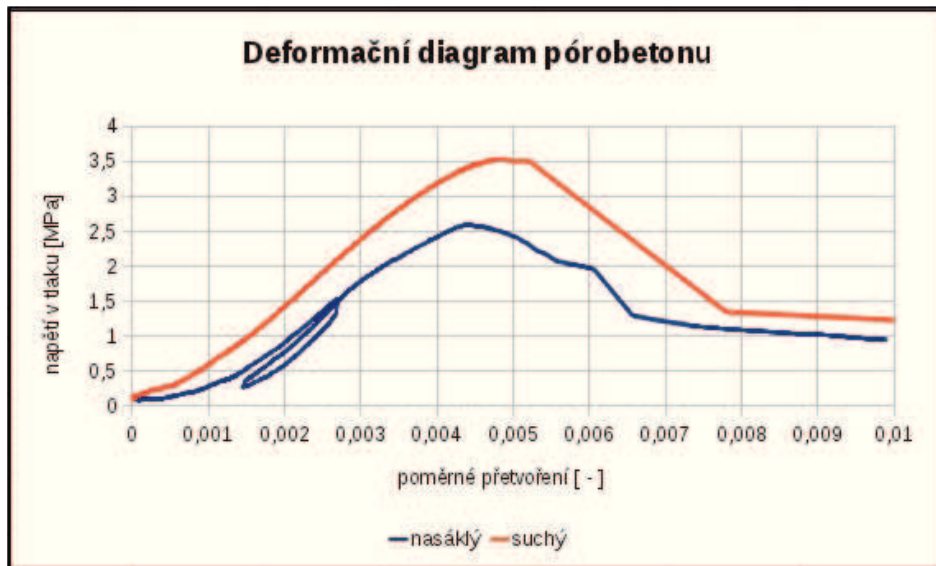


Obr. 20: Rozštípnutí vlivem špatné rovinnosti tlačné plochy a vznik smykové plochy



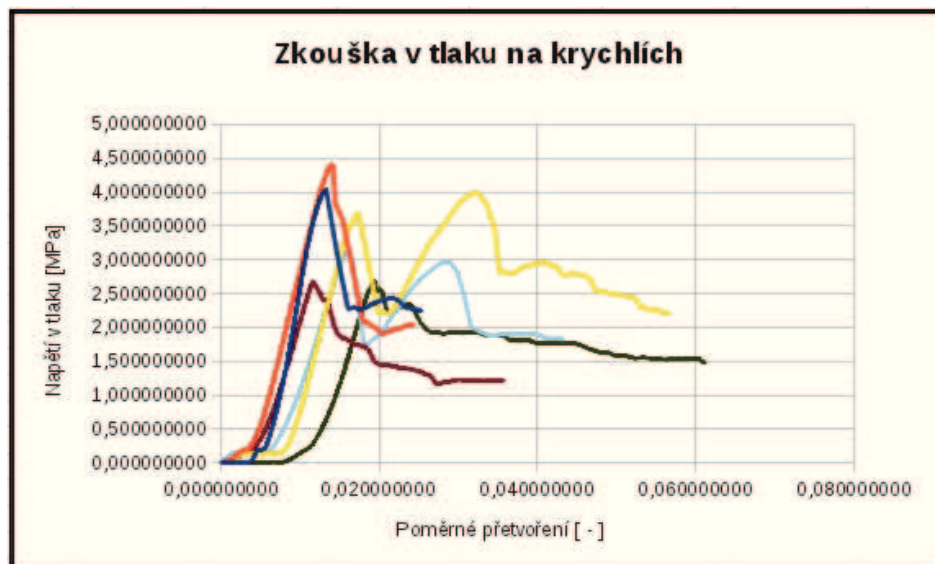
Obr. 21: Uchycení hranolu v lisu s pružinovým systémem snímače

lení lineární části grafu, ze které byl modul vypočten. Meze napětí byly zvoleny pro suchý vzorek jako (1MPa;2MPa) a pro nasáklý vzorek (0,5MPa;1,5MPa).



Obr. 22: Deformační diagram porobetonu

Na krychlových tělesech, která zbyla po vytváření trámů pro zkoušku modulu pružnosti byla provedena zkouška v tlaku. Tyto tělesa neměla upravené plochy. Jejich výhodou je malá štíhlost jelikož jsou všechny rozměry stejně velké. Následující obrázek ukazuje jak rozdílných hodnot lze u měření dosáhnout.



Obr. 23: Diagramy zkoušení suchého pórobetonu na krychlích

V tabulce je význam jednotlivých hodnot  $E_{lis}$  - hodnota vypočtená z deformace změřené na lise,  $E_{senz}$  - hodnota vypočtená z deformace změřené na snímačích dráhy umístěných na stěnách hranolu. Poslední  $E_{norm}$  je vypočtená hodnota dle normy pro zjišťování modulu pružnosti pórobetonu. Je vidět, že hodnoty získané měření na senzorech a na lise se liší. Tato rozdílnost může být způsobena dosedáním všech komponent

Tab. 3: Změřené a vypočtené moduly pružnosti pro suchý a nasáklý pórobeton

	$E_{lis}$	$E_{senz}$	$E_{norm}$
suchý	984	1513	977
nasáklý	792	1586	

lisu, které zvyšují deformaci. Vypočtená hodnota dle normy má smysl pouze pro suchý pórobeton. Důležité pro všechny hodnoty je však, že modul pro nasáklý pórobeton se téměř neliší od modulu pro suchý.

## 5.2 Pevnost v tahu

Zjišťování hodnoty pevnosti v tahu je na materiálech jako je beton značně obtížné. Problém nastává už při samotném uchycení vzorků do zkušebního zařízení. Dalším problémem pak je udržení kolmého směru síly na tažné plochy vzorku při vznikající deformaci. Díky poměrně nízké pevnosti v tahu pórobetonu je možné pro informativní hodnotu pevnosti v tahu využít alternativní postup. Do pórobetonové tvarovky byly jádrovým vrtákem částeně navrtány vývrty. Na tyto vývrty byl přilepen odtrhový terč a pomocí přístroje pro zkoušení pevnosti v tahu povrchových vrstev byly válečky odtrženy. Vlastní měření



Obr. 24: Odtrhový přístroj

bylo provedeno na třech vývrtech v suché tvarovce a třech vývrtech v nasáklé tvarovce. Průměrné naměřené hodnoty pro suchý pórobeton byly 0,6MPa a pro nasáklý pórobeton 0,4MPa. Velikost poklesu je přibližně stejná jako u pevnosti v tlaku. Jak již bylo zmíněno jsou hodnoty změřené odtrhovým přístrojem pouze orientační.

## 6 Řešič MMFEM pro poroelasticitu pomocí MKP

Pro potřeby této práce byl vytvořen programový systém pro řešení problematiky pórovitých materiálů pomocí metody konečných prvků. Tento řešič je pracovně nazván MMFEM (zkr. Material modeling finite element method). Řešič má jednoduchou strukturu a jeho úkolem je pouze sestavit a vyřešit problém popsany konečnými prvky. V systému není implementován pre ani postprocessor a pro tyto úkony jsou využívány externí programy. Jako preprocessor, tedy systém pro vytvoření řešené oblasti a její rozdělení na jednotlivé sítě konečných prvků je využíván volně šiřitelný balík SALOME-MECA[22]. Tento program má rozsáhlé možnosti modelování a exportování dat pro sítě konečných prvků. Postprocessing, tedy zpracování výsledků dosažených pomocí řešiče je prováděn pomocí knihoven VTK určených pro vizualizaci vědeckých výsledků. Vlastní řešič umí exportovat výsledky do souboru VTK a ty je pak možné zobrazit v různých volně šiřitelných programových balících jako např. Kitware Paraview[?].

### 6.1 Implementace MMFEM

Implementace programu MMFEM je provedena pomocí programovacího jazyka Python[?]. Tento programovací jazyk byl zvolen vzhledem ke své snadnosti a také díky předchozím zkušenostem. Programovací jazyk Python je vysokoúrovňový objektově orientovaný a interpretovaný. Tyto vlastnosti mají mnoho výhod. Díky vysoké úrovni není nutné zabývat se některými složitostmi, které vznikají v nízkoúrovňových jazycích při práci s pamětí a zpracováním instrukcí. Objektová orientovanost dovoluje tvořit systematické struktury, které mohou vzájemně pracovat a dědit své vlastnosti. Díky interpretaci není vyžadována kompilace kódu do strojového jazyka což velmi usnadňuje práci při vývoji. Obrovskou výhodou je také dynamická typovanost jazyka. Není třeba třeba připravovat předem jednotlivé proměnné pro hodnoty různých typů jako jsou celá čísla nebo reálná. Následující kus zdrojového kódu zobrazuje implementaci matice v jazyce python.

```
class Matrix:
    def __init__(self,m,n):
        self.n=n
        self.m=m
        self.matrix_nm = [[0 for col in range(self.n)] for row in range(self.m)]
```

Takto implementovaná třída pro matici vytvoří dvojrozměrné pole o 'm' řádcích a 'n' sloupcích vyplněné nulami. Takto vytvořená matice je dosti nešetrná vzhledem k paměti počítače, avšak pokud nechceme provádět optimalizace pro rozsáhlé úlohy je vyhovující a jednoduše použitelná. V programu MMFEM nejsou využity žádné otevřeně dostupné knihovny zpracovávající problémy lineární algebry. Veškeré nutné operace jsou naprogramovány od základu. Vyhodou je tak kompletní znalost vytvořeného systému.

## 6.2 Možnosti řešiče

V současnosti má řešič pouze omezené možnosti, zahrnující problematiku této práce. Implementovány jsou pouze isoparametrické konečné prvky pro rovinný a trojrozměrný problém. Tyto prvky jsou popsány v předchozích kapitolách. Z oblasti fyzikální jsou vytvořeny matice tuhosti materiálu pro isotropní problém lineární pružnosti. Rozšířením je možnost modelování pomocí poroelasticity. Pro řešení soustav lineárních rovnic jsou implementovány metoda gaussovy eliminace a iterační metoda sdružených gradientů. Především druhá zmíněná metoda nachází široké uplatnění díky své rychlosti oproti klasickým metodám. V následujícím metakódu je zobrazen výpočet pomocí této metody.

$$r_0 = b - Ax_0$$

$$p_0 = r_0$$

$$k = 0$$

**cyklus:**

$$\alpha = \frac{r_k^T r_k}{p_k^T A p_k}$$

$$x_{k+1} = x_k + \alpha_k p_k$$

$$r_{k+1} = r_k - \alpha_k A p_k$$

pokud je  $r_{k+1}$  dostatečně malé výpočet končí

$$\beta_k = \frac{r_{k+1}^T r_{k+1}}{r_k^T r_k}$$

$$p_{k+1} = r_{k+1} + \beta_k p_k$$

$$k = k + 1$$

**konec cyklu;**

Výsledkem je  $x_{k+1}$

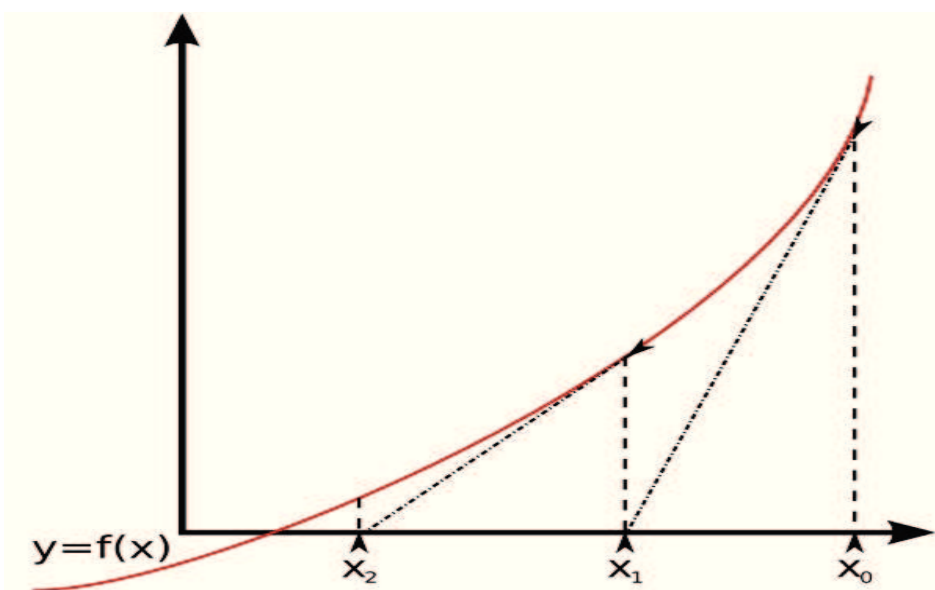
K výpočtům pomocí podmínek plasticity je zapotřebí také iterační metody pro soustavy



nelineárních rovnic. Nejběžnější metodou pro tyto výpočty je metoda Newton-Rapson. Tato metoda je odvozena z Taylorova rozvoje funkce a jedná se o jednu z nejrychlejších metod. Pro jednorozměrný problém má rovnice pro výpočet tvar.

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (63)$$

Takto napsaná je metoda Newton-Rapson použitelná pouze pro hledání kořene nelineární rovnice. Avšak pokud nahradíme jednorozměrnou funkci maticí nelineárních rovnic je výpočet stejně tak možný. Princip metody pro jednorozměrnou funkci popisuje následující obrázek. Nevýhodou tohoto způsobu řešení je nutnost výpočtu derivace funkce. U jedno-

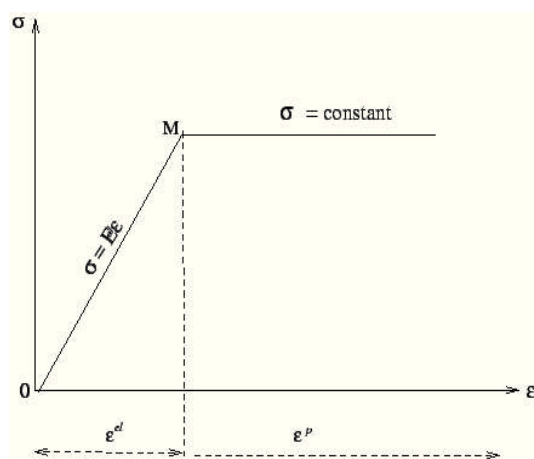


Obr. 25: Princip metody Newton-Rapson

rozměrné funkce to obvykle není problém, avšak přejdeme-li k soustavě rovnic, nastává numericky poměrně složitá operace. Tento problém se však dá částečně obejít. Výpočet lze zjednodušit tak, že pro určitý počet iterací nebo pro všechny použijeme stejnou derivaci. Řešení sice nalezneme pomocí většího množství iteračních cyklů, ale díky odstranění nutnosti výpočtu derivace celkový čas výpočtu výrazně zkrátíme.

## 7 Modelové příklady a vyhodnocení

Pro vlastní modelování bylo vytvořeno několik příkladů konstrukcí blízkých realitě. Na těchto modelových příkladech jsou prováděny výpočty napětových stavů při různých způsobech zatížení a různých materiálových parametrech. V příkladech jsou využity předchozí materiálové modely a podmínky plasticity materiálu. Jednotlivé výsledky jsou srovnávány a vyhodnocovány. Pro tvorbu a řešení modelů jsou využity systém RFEM společnosti Dlubal s.r.o dále Code-Aster a vlastní software MMFEM. V systému RFEM jsou počítány jednoduché problémy pružnosti a plastického přetváření bez zpevnění(obr.). Tento systém nedovoluje využít možnost platického tečení v prostoru. Z toho důvodu je tato podmínka použita pouze pro rovinný problém. Pro tyto potřeby trojrozměrných modelů je využit program Code-Aster. Stejně tak je využit pro použití podmínky Cam-Clay. Pro modelování pomocí poroelasticity je využito programu MMFEM, který rovněž umožňuje použít podmínku MSDPu pro mez plasticity.



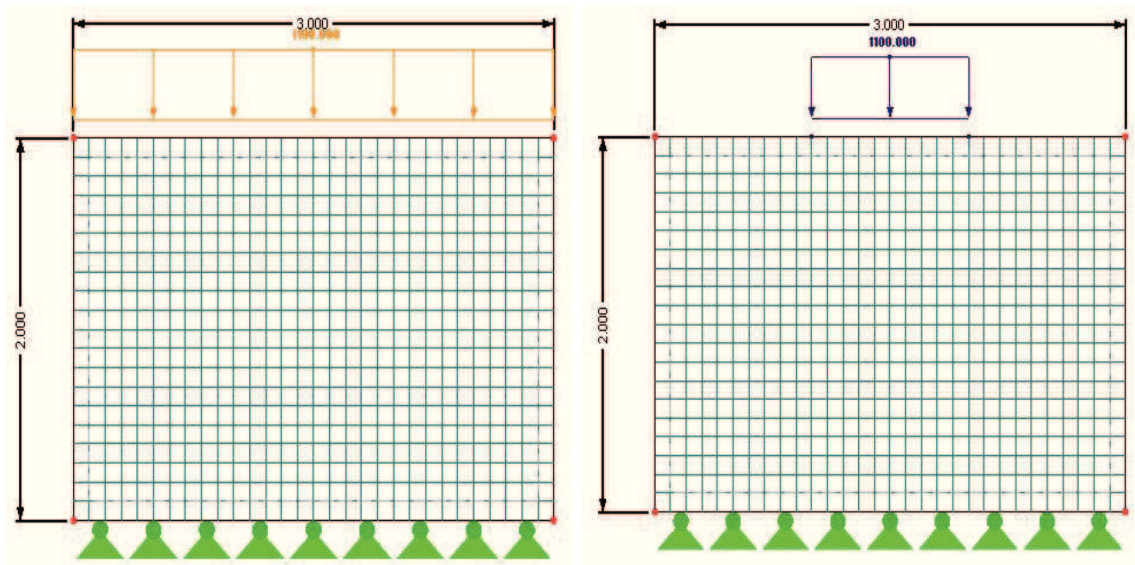
Obr. 26: Idealizovaný deformační diagram (elasto-plastický bez zpevnění)

### 7.1 Jednoduchá stěna zatížená po celé délce

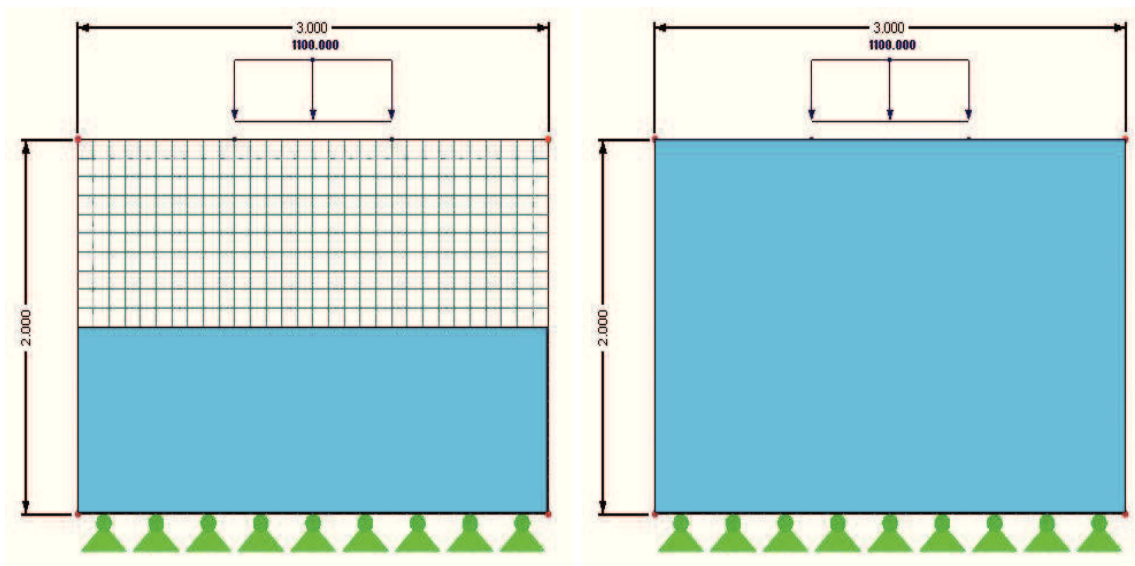
Zvolena byla stěna tvořená pórobetonem. Rozměry jsou uvedeny na obrázku obr. 27. Pro modelový případ byly zvoleny materiálové vlastnosti s vlivem a bez vlivu vlhkosti. Případy jsou analyzovány v rovinné stavu napjatosti a také na trojrozměrném modelu. Z hlediska vlhkosti byly vytvořeny tři typy modelu. Model tvořený suchým zdivem, dále model tvořený zdivem nasáklým do poloviny výšky a model zcela nasycený. Zatížení zobrazené na obrázku je pouze pro ilustraci. Na modelech bylo použito zatížení různých velikostí. Při použití podmínek plasticity byl model zatěžován až došlo k divergenci řešení. Je tedy



sledováno chování při maximálním zatížení. Další možností je zatížení stejné stěny pouze částečně. Zatížení lokální vyvolává větší napětí a průběh se výrazně liší od zatížení po celé délce. Simulovány jsou opět tři typy vyplnění vodou.



Obr. 27: Jednoduchá stěna zatížená po celé délce (vlevo) a částečně (vpravo)

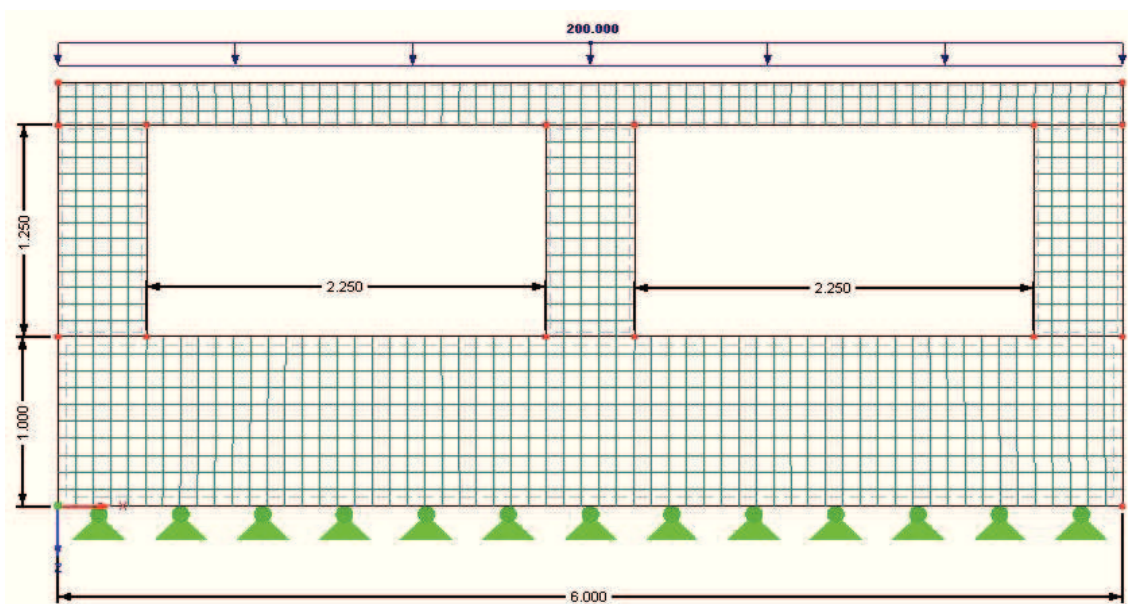


Obr. 28: Jednoduchá stěna částečně (vlevo) a úplně nasáklá (vpravo)

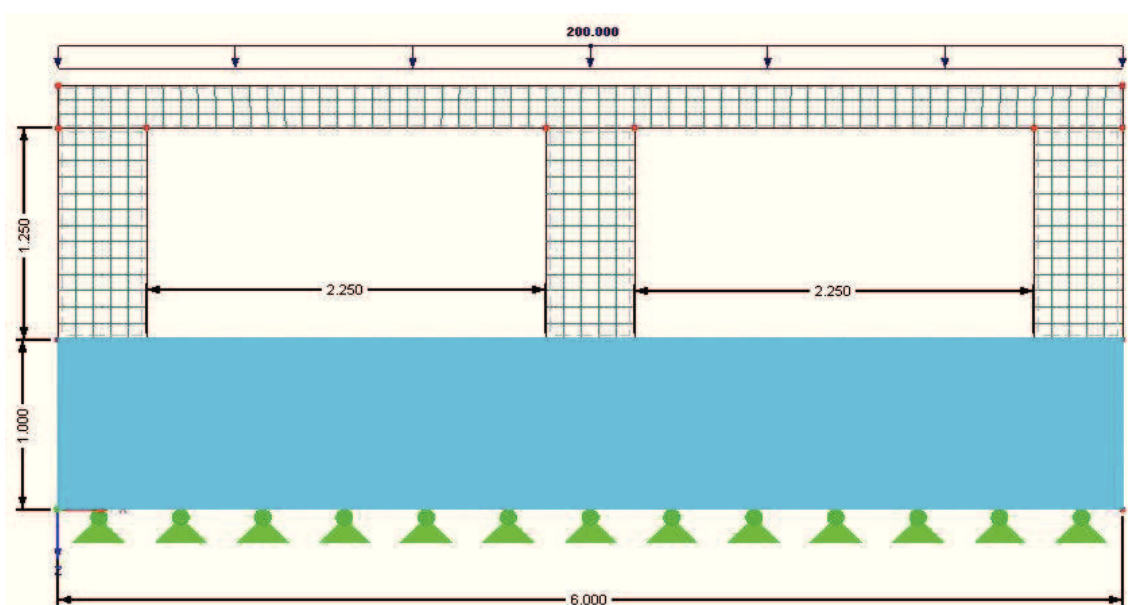
## 7.2 Stěna s okny a meziokenním pilířem

Problematickým místem může být lokálně zatížená stěna pod meziokenním pilířem. Situace je vykreslena i s nadokenním překladem, ale v počítaných případech je tento překlad

vynechán. Při ohybu překladu by musel být do modelu vložen zcela jiný typ materiálu tuhý v ohybu. Maximální pozornost je věnována problematice lokálního zatížení v oblasti pod pilířem a pod okenním otvorem.



Obr. 29: Stěna s okny a meziokenním pilířem



Obr. 30: Stěna s okny a meziokenním pilířem nasáklá vlhkostí ve své spodní části

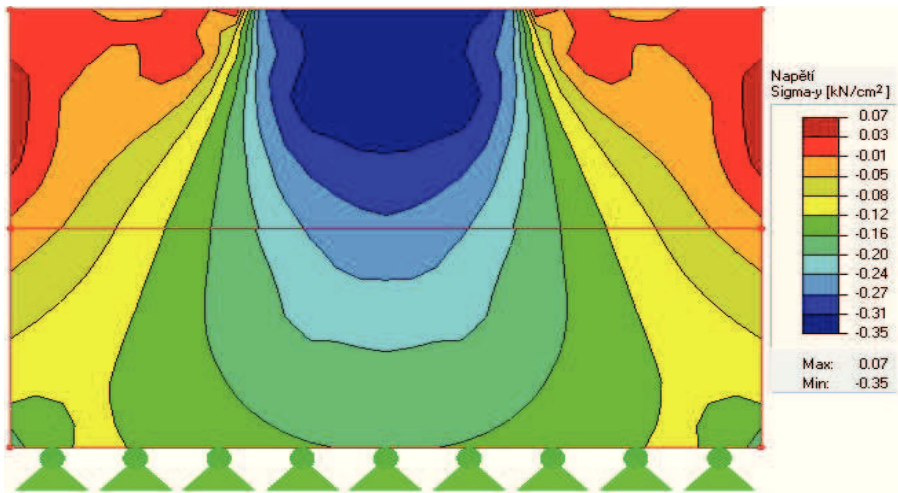
Na modelových úlohách jsou prezentovány dříve popsané možnosti modelování pórovitých materiálů. Různé typy modelů nejsou shodně aplikovány na všechny modelové úlohy. Modelování pomocí jednoduchého pružno-plastického materiálu v programu RFEM

je možné pouze na dvourozměrných úlohách, z toho důvodu není tato možnost aplikována na 3D úloze. Podmínka plasticity Cam-clay se lépe aplikuje na trojrozměrné úlohy. Tato podmínka je tedy aplikována na výše zmíněné modely avšak v trojrozměrném případě. Problém také nastává u využití programu MMFEM. Vzhledem k nepříliš šetrně implementované struktuře pro ukládání matic, nelze použít model s okenními otvory pro jeho značný počet stupňů volnosti. Jelikož je ale podmínka MSDPu lépe aplikovatelná na trojrozměrné úlohy, je pro její prezentaci použit pouze jednoduchý model 3D stěny. Samotná poroelastická nemá bez aplikované podmínky plasticity příliš velký význam, jelikož pouze zvyšuje napětí v modelovaném prvku. Proto je využita pouze společně s podmínkou MSDPu.

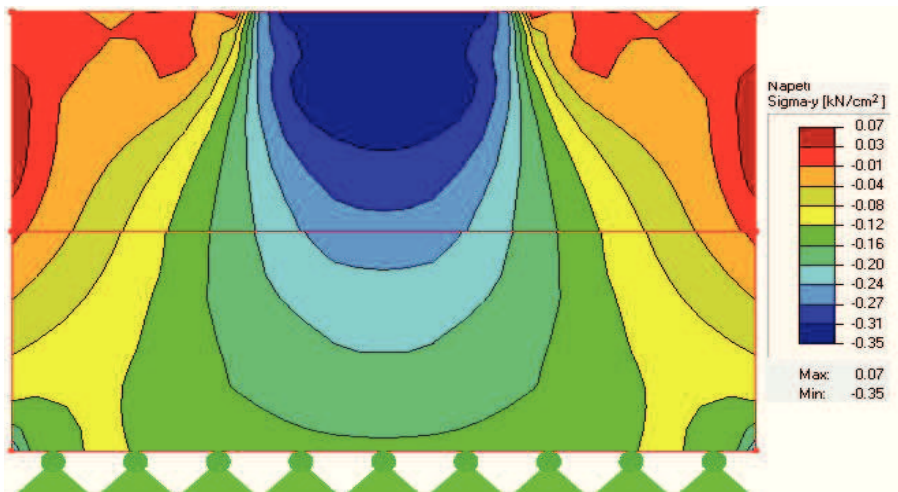
### 7.3 Materiálové parametry použité při modelování

Do všech modelů bylo zapotřebí použít materiálové parametry. Základními jsou pevnosti v tlaku a v tahu a modul pružnosti. Experimentálně zjištěné hodnoty pro pevnost v tlaku betonu byly 3,5MPa pro suchý a 2,5MPa pro nasáklý pórobeton. Hodnoty pevnosti v tahu byly převzaty ze zkoušení odtrhovým přístrojem. Tyto parametry pevností byly dosazeny také do podmínky MSDPu, nebylo tedy využito regresní rovnice podmínky. Jelikož modul pružnosti se pohybova rozdílně při měření na senzorech umístěných po stranách a na měření z lisu, byla vzata přibližně mezilehlá hodnota 1300MPa. Při použití podmínky Cam-Clay byly použity parametry  $\lambda=0,09$ ,  $\kappa=0,001$  a  $M=0,7$ . Tyto hodnoty odpovídají velmi malé stlačitelnosti pórobetonu. Pro modelování pomocí poroelastivity byl Biotův koeficient odhadnut podle hodnoty uváděných v literatuře pro maltu na  $b=0,4$  [12]. Pórový tlak se pak blížil hodnotě  $p=0,9$ MPa.

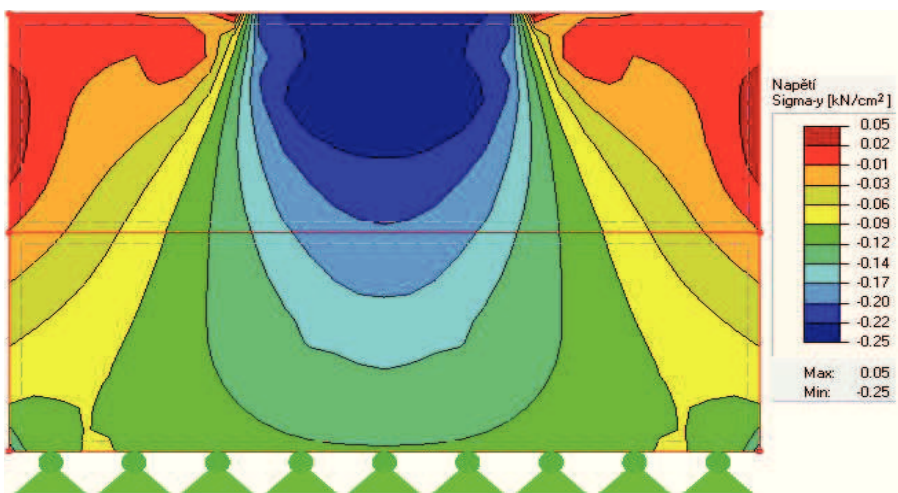
## 7.4 Jednoduchá stěna lokálně zatížená - výsledky



Obr. 31: Napětí  $\sigma_y$  při lokálním zatížení suché stěny

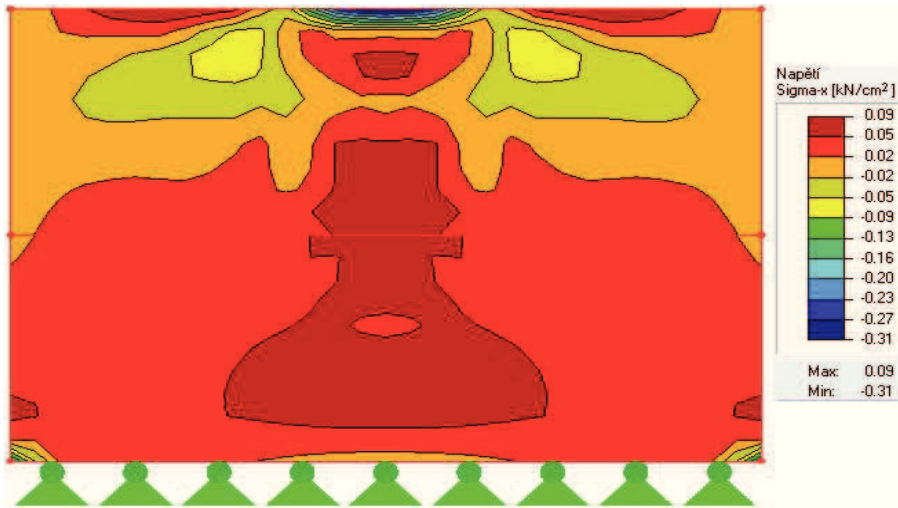


Obr. 32: Napětí  $\sigma_y$  při lokálním zatížení do poloviny násáklé stěny

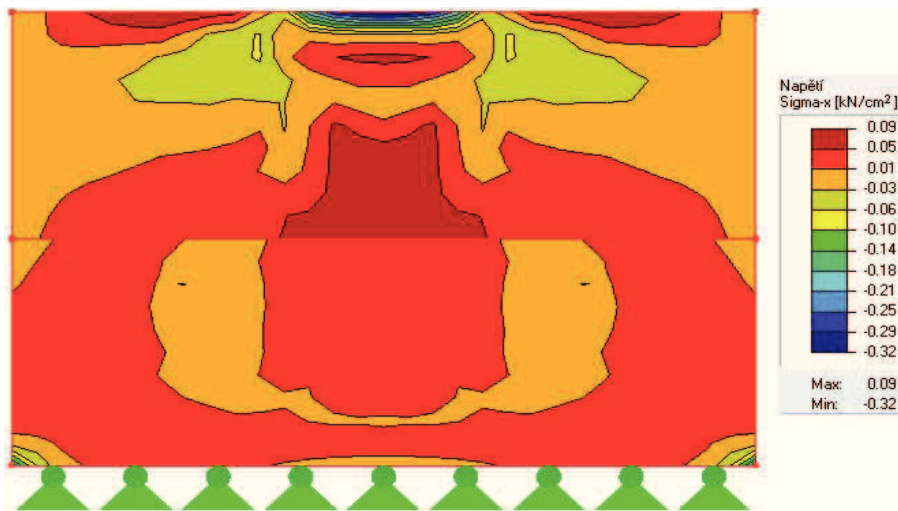


Obr. 33: Napětí  $\sigma_y$  při lokálním zatížení úplně násáklé stěny

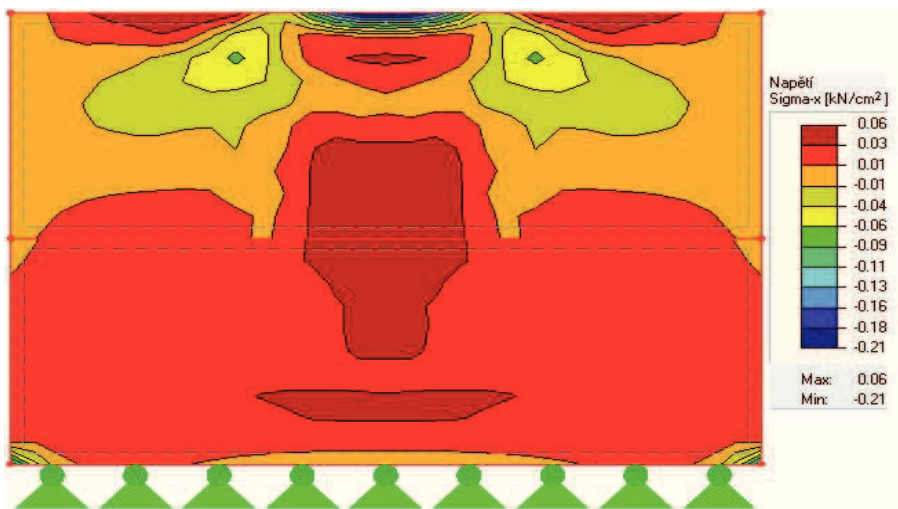




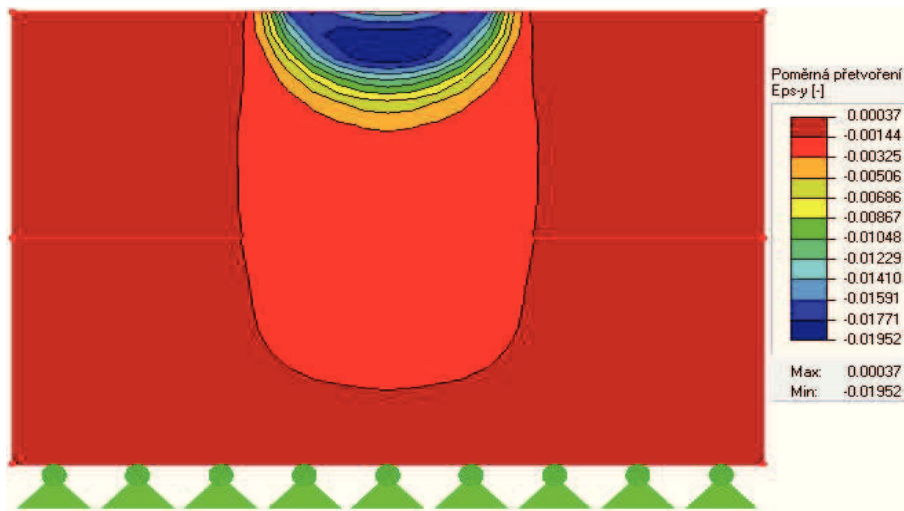
Obr. 34: Napětí  $\sigma_x$  při lokálním zatížení suché stěny



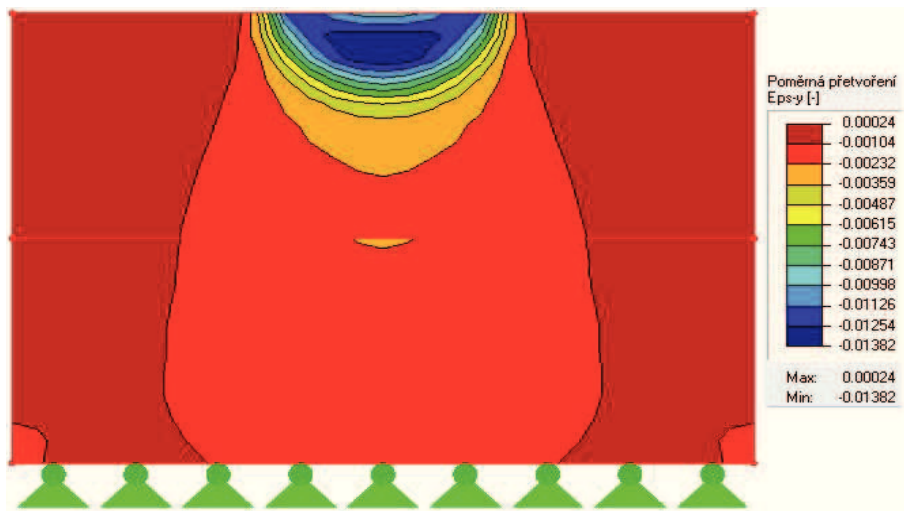
Obr. 35: Napětí  $\sigma_x$  při lokálním zatížení do poloviny násáklé stěny



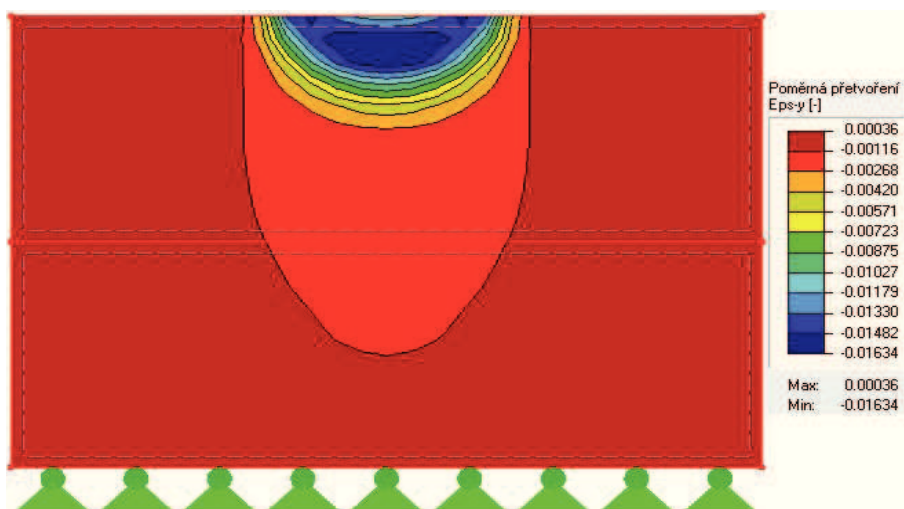
Obr. 36: Napětí  $\sigma_x$  při lokálním zatížení úplně násáklé stěny



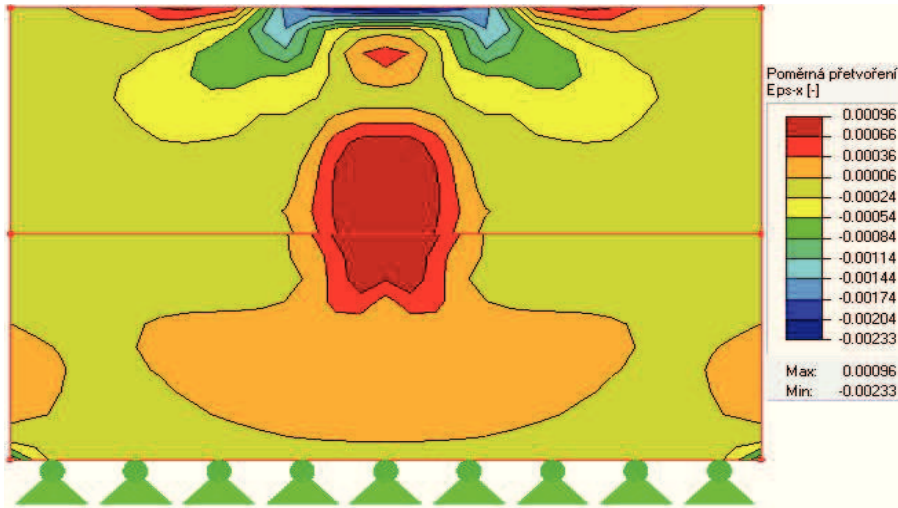
Obr. 37: Poměrné přetvoření  $\epsilon_y$  při lokálním zatížení suché stěny



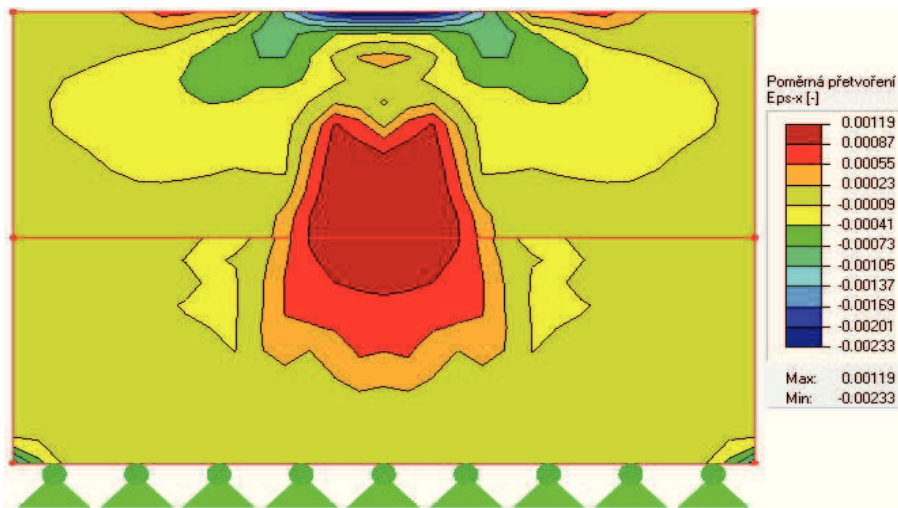
Obr. 38: Poměrné přetvoření  $\epsilon_y$  při lokálním zatížení do poloviny násáklé stěny



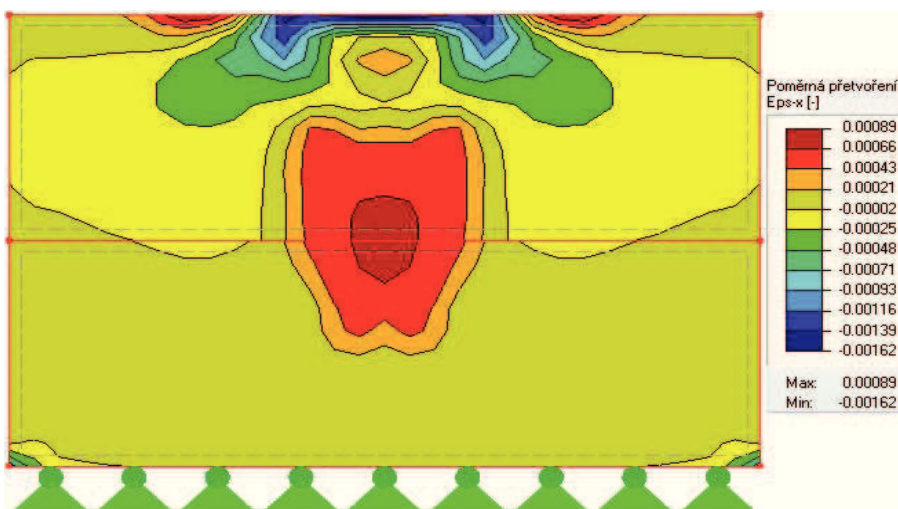
Obr. 39: Poměrné přetvoření  $\epsilon_y$  při lokálním zatížení úplně násáklé stěny



Obr. 40: Poměrné přetvoření  $\epsilon_x$  při lokálním zatížení suché stěny

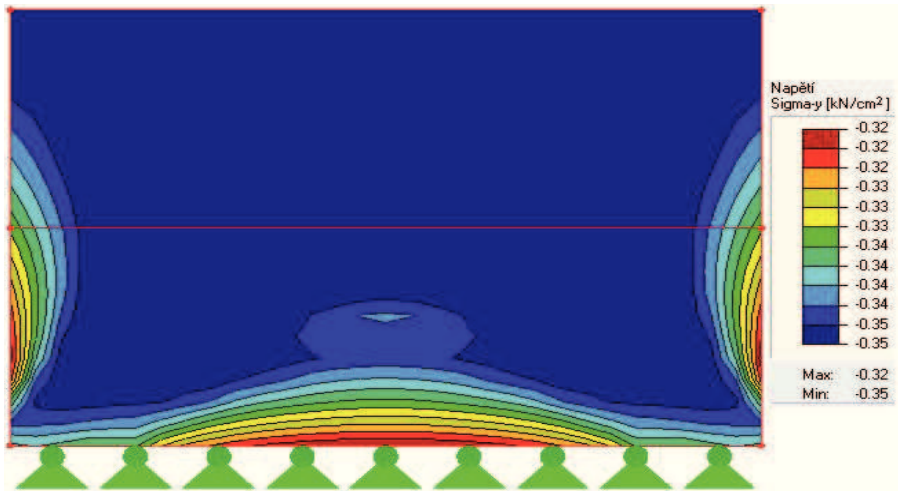


Obr. 41: Poměrné přetvoření  $\epsilon_x$  při lokálním zatížení do poloviny násáklé stěny

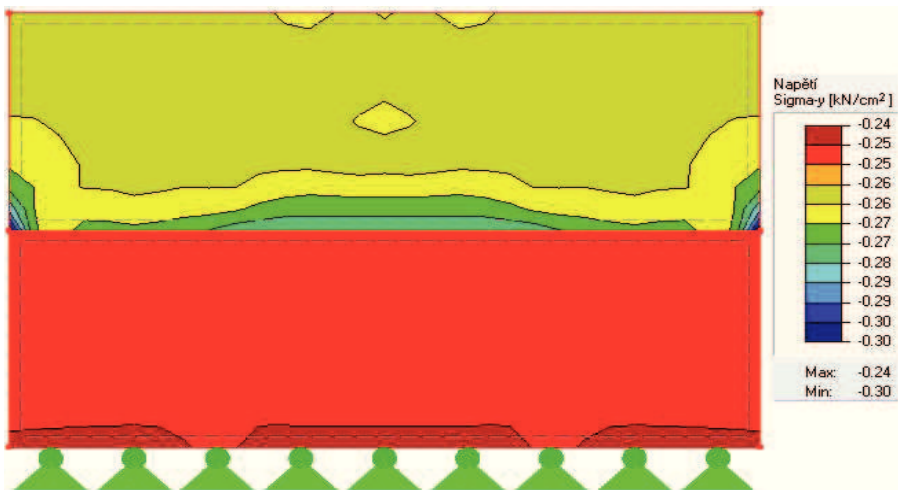


Obr. 42: Poměrné přetvoření  $\epsilon_x$  při lokálním zatížení úplně násáklé stěny

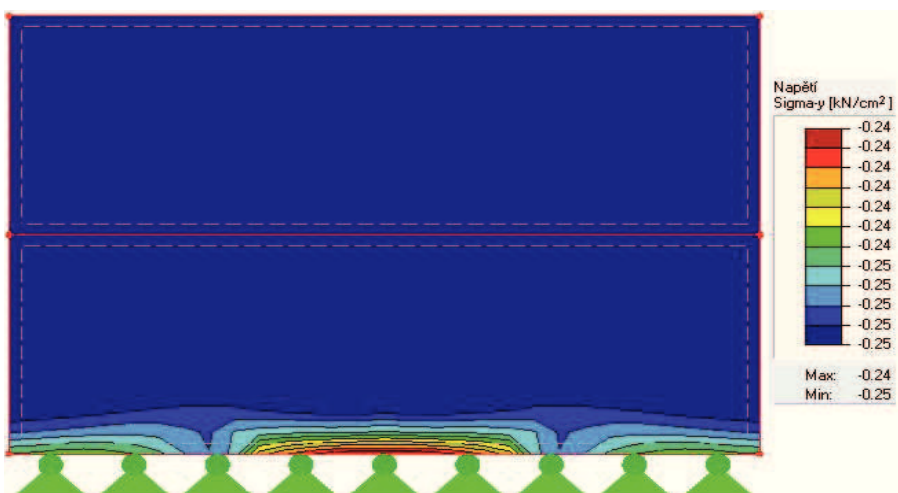
## 7.5 Jednoduchá po celé délce zatížená stěna - výsledky



Obr. 43: Napětí  $\sigma_y$  celé zatížené suché stěny

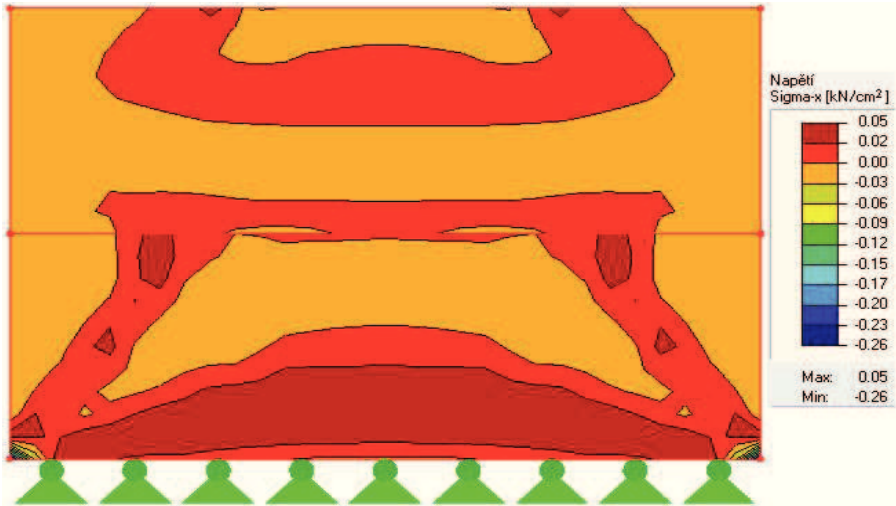


Obr. 44: Napětí  $\sigma_y$  celé zatížené do poloviny násáklé stěny

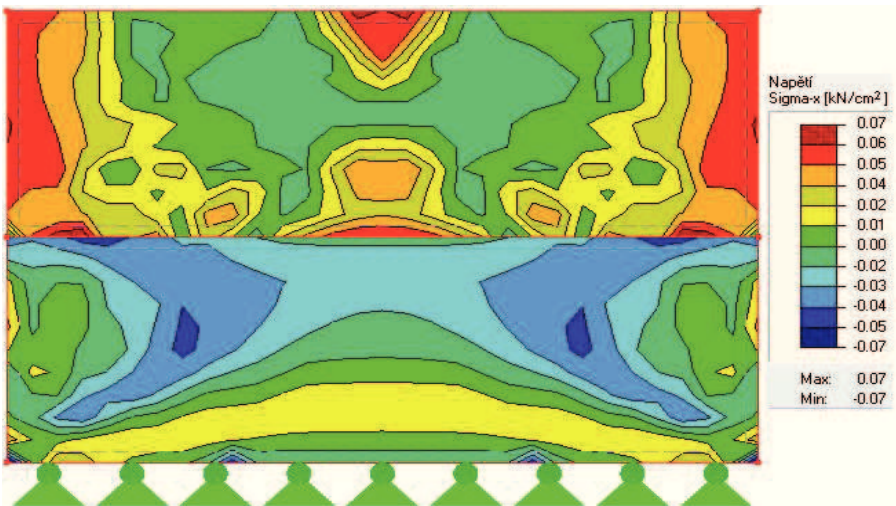


Obr. 45: Napětí  $\sigma_y$  celé zatížené úplně násáklé stěny

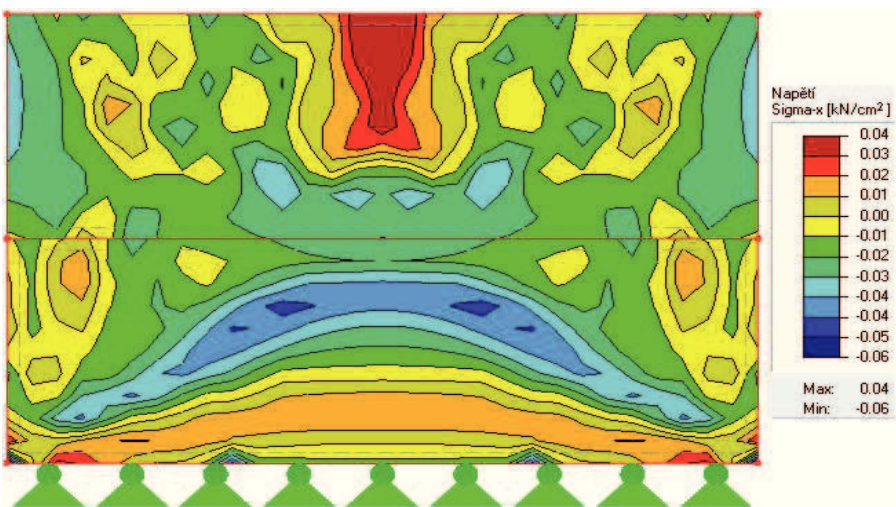




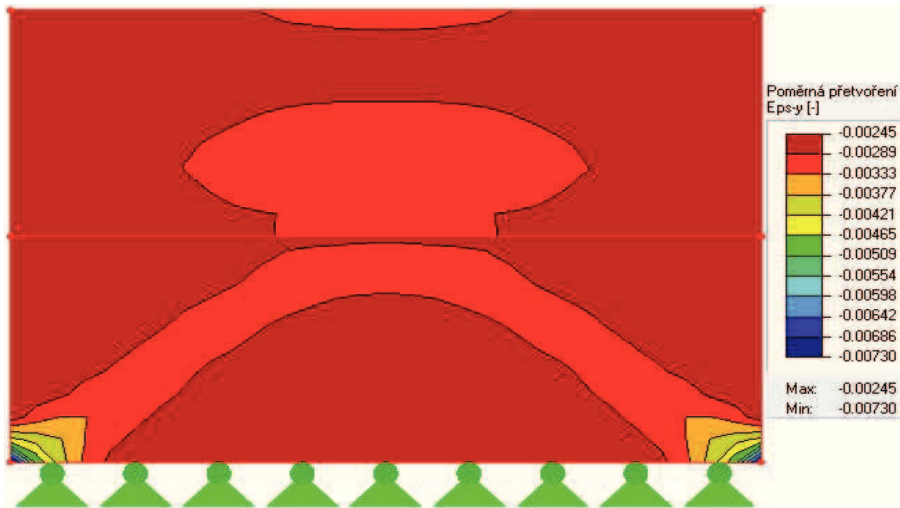
Obr. 46: Napětí  $\sigma_x$  celé zatížené suché stěny



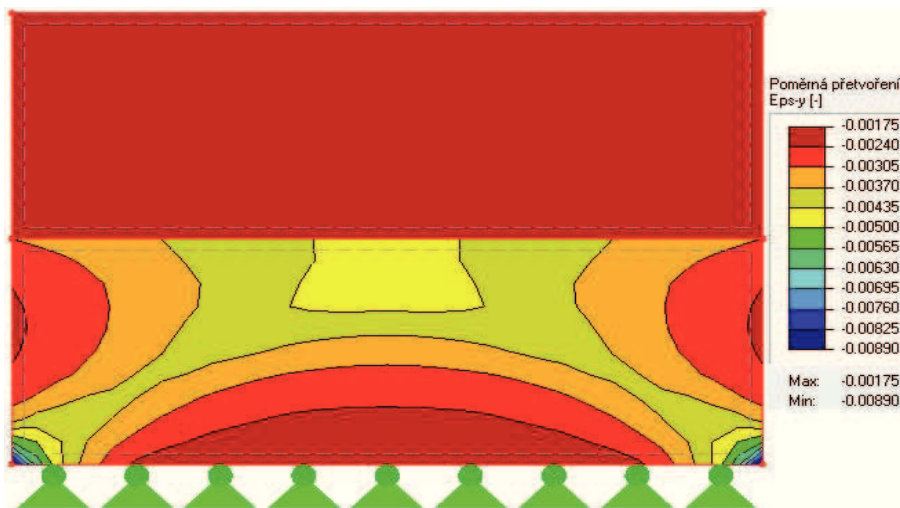
Obr. 47: Napětí  $\sigma_x$  celé zatížené do poloviny násáklé stěny



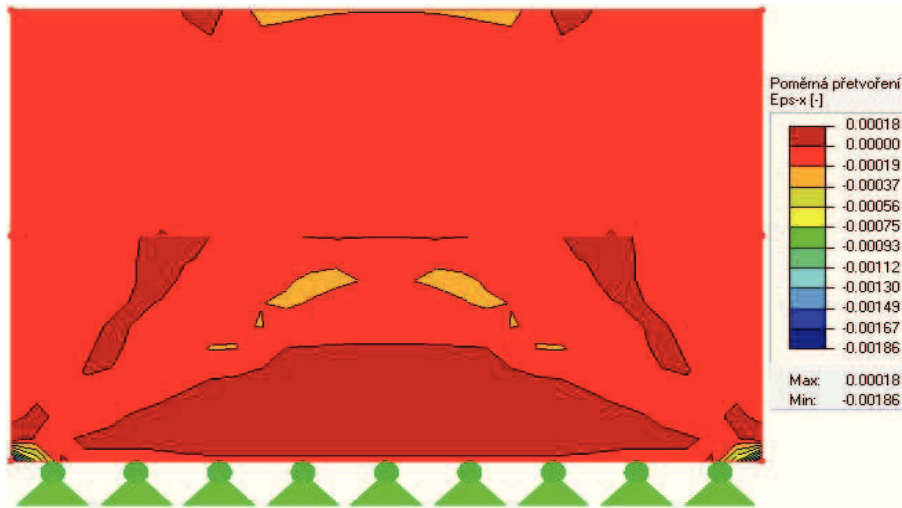
Obr. 48: Napětí  $\sigma_x$  celé zatížené úplně násáklé stěny



Obr. 49: Poměrné přetvoření  $\varepsilon_y$  celé zatížené suché stěny



Obr. 50: Poměrné přetvoření  $\varepsilon_y$  celé zatížené do poloviny násáklé stěny

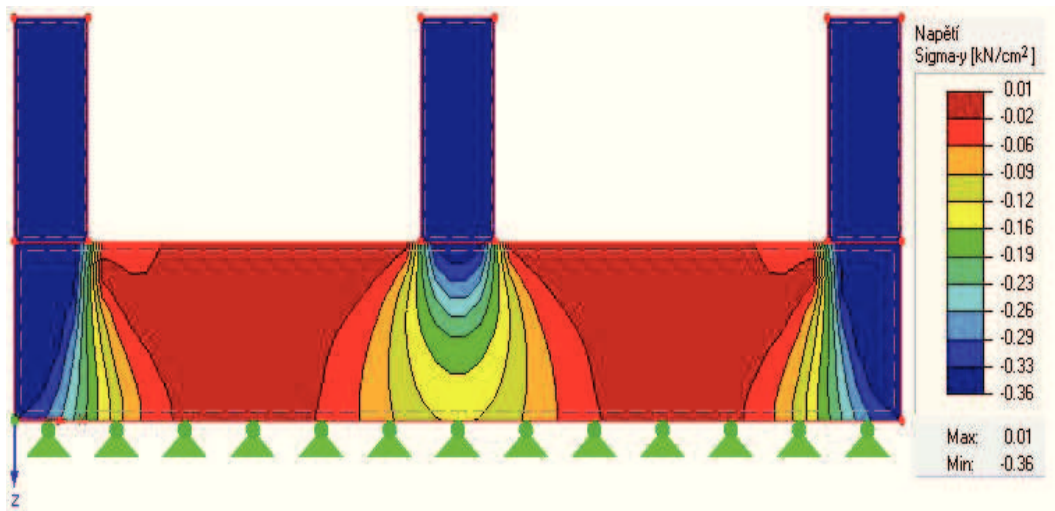


Obr. 51: Poměrné přetvoření  $\varepsilon_x$  celé zatížené suché stěny

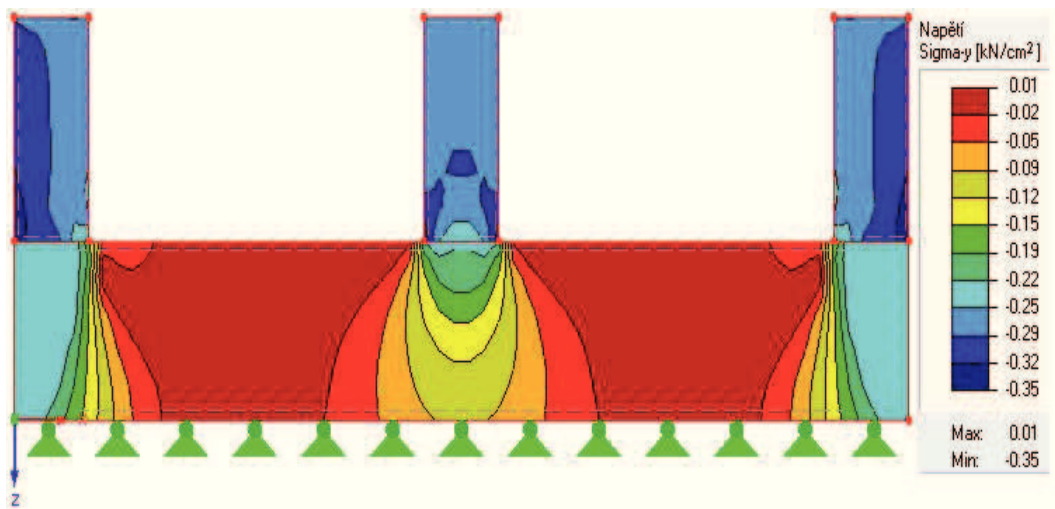


Obr. 52: Poměrné přetvoření  $\varepsilon_x$  celé zatížené do poloviny násáklé stěny

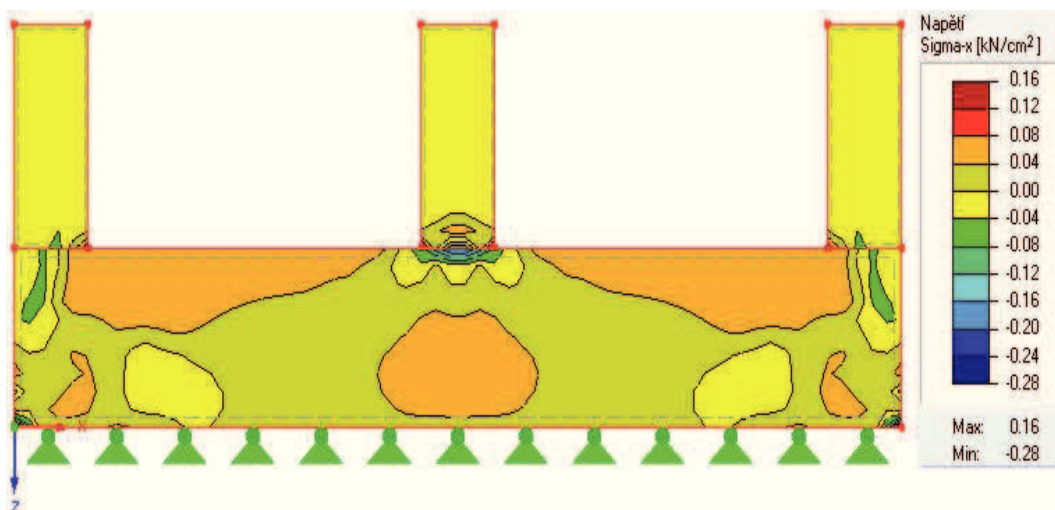
## 7.6 Stěna s okenními otvory - výsledky



Obr. 53: Napětí  $\sigma_y$  suchá stěna

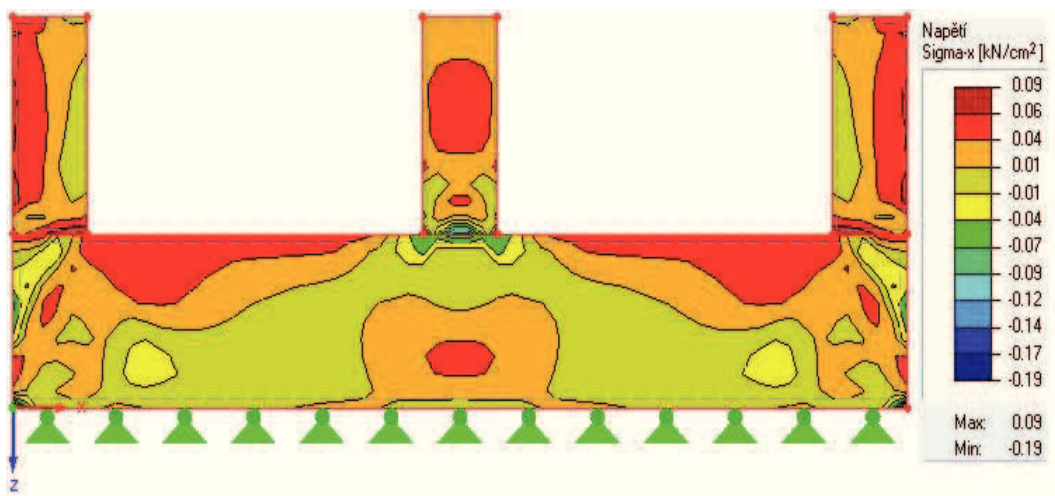


Obr. 54: Napětí  $\sigma_y$  násáklá stěna

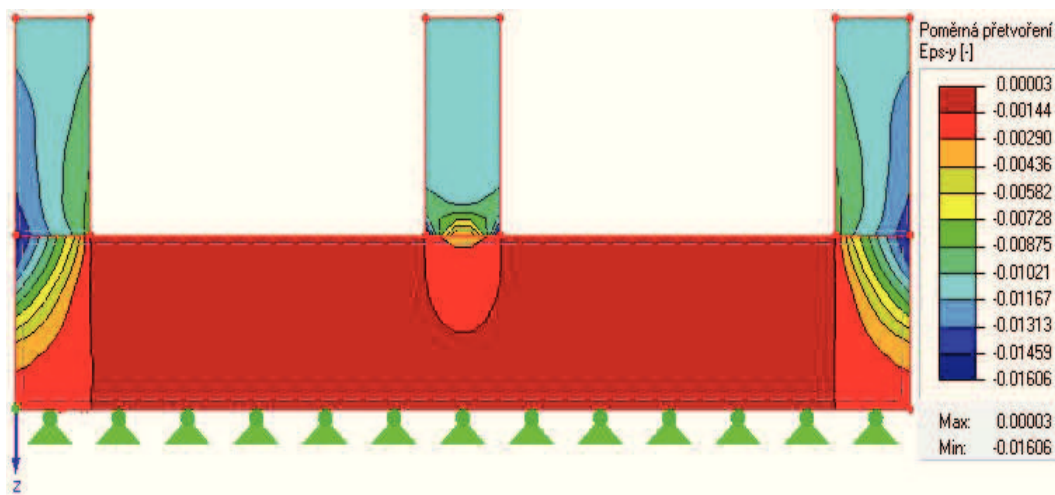


Obr. 55: Napětí  $\sigma_x$  suchá stěna

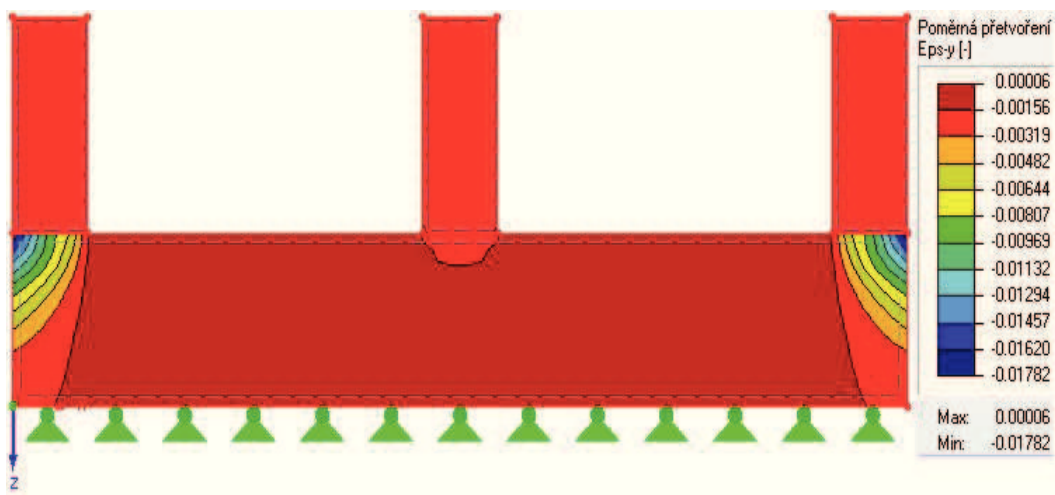




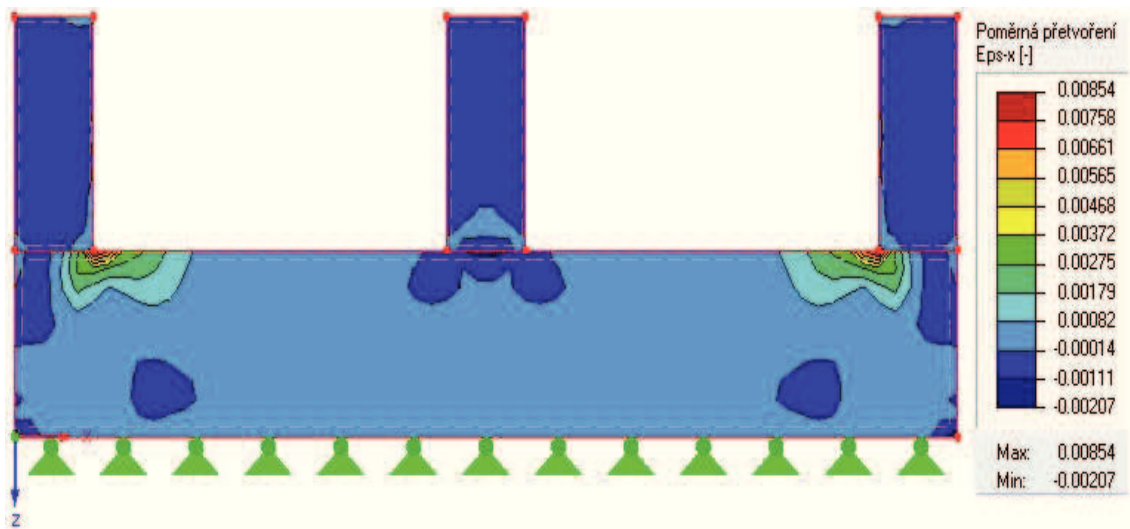
Obr. 56: Napětí  $\sigma_x$  násáklá stěna



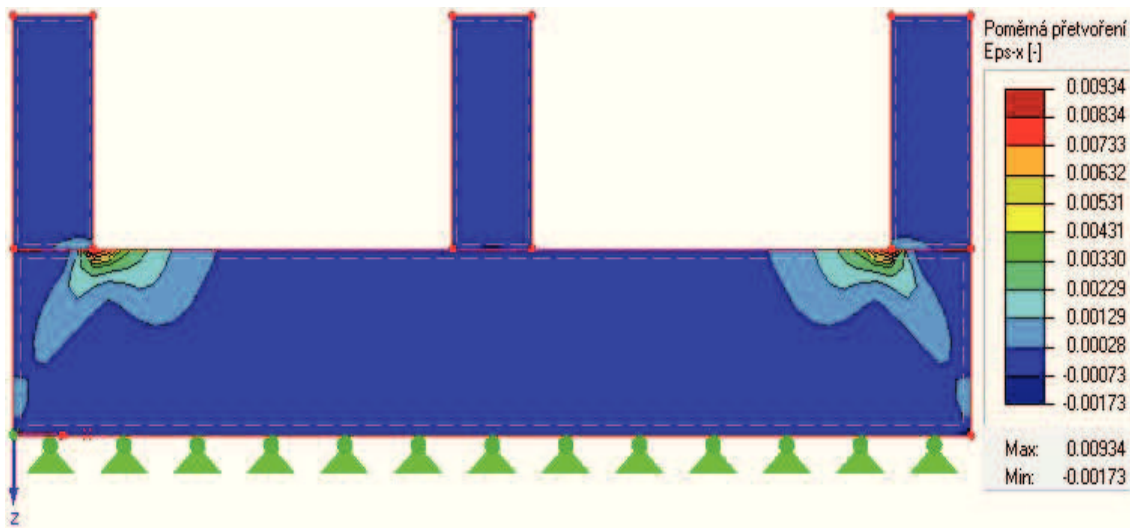
Obr. 57: Poměrné přetvoření  $\varepsilon_y$  suchá stěna



Obr. 58: Poměrné přetvoření  $\varepsilon_y$  násáklá stěna

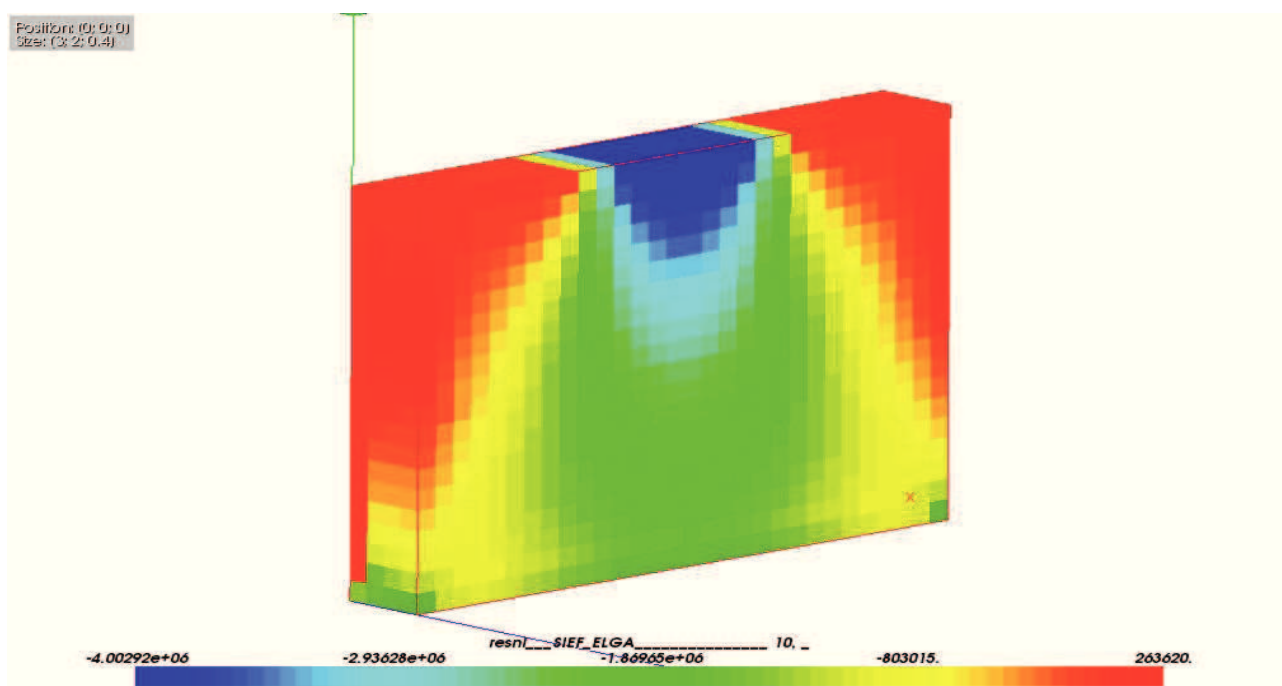


Obr. 59: Poměrné přetvoření  $\varepsilon_x$  suchá stěna

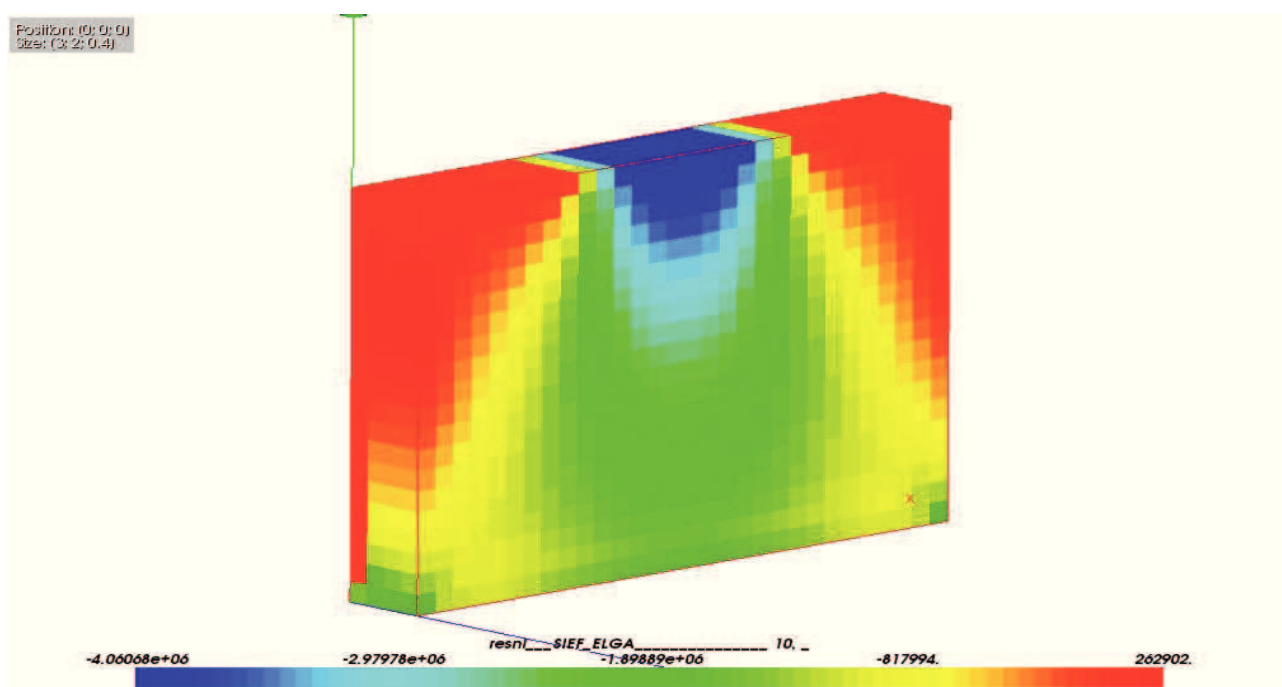


Obr. 60: Poměrné přetvoření  $\varepsilon_x$  násáklá stěna

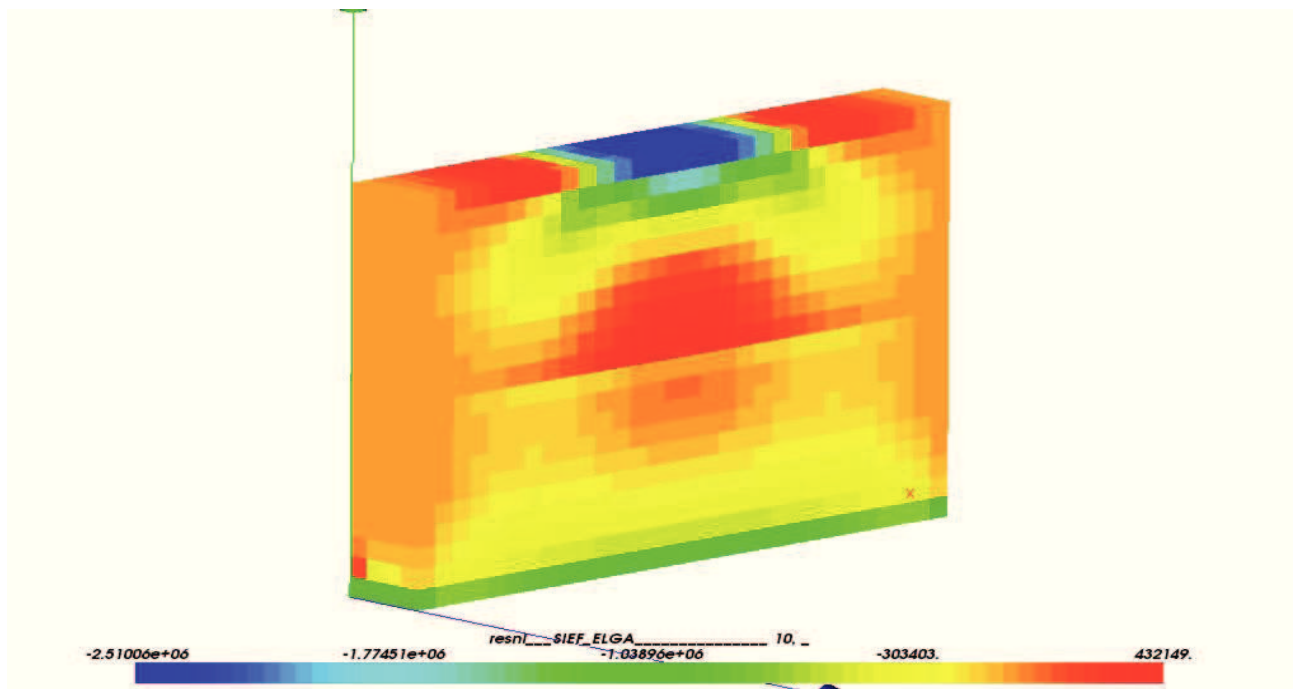
## 7.7 Jednoduchá lokálně zatížená stěna - model Cam-Clay



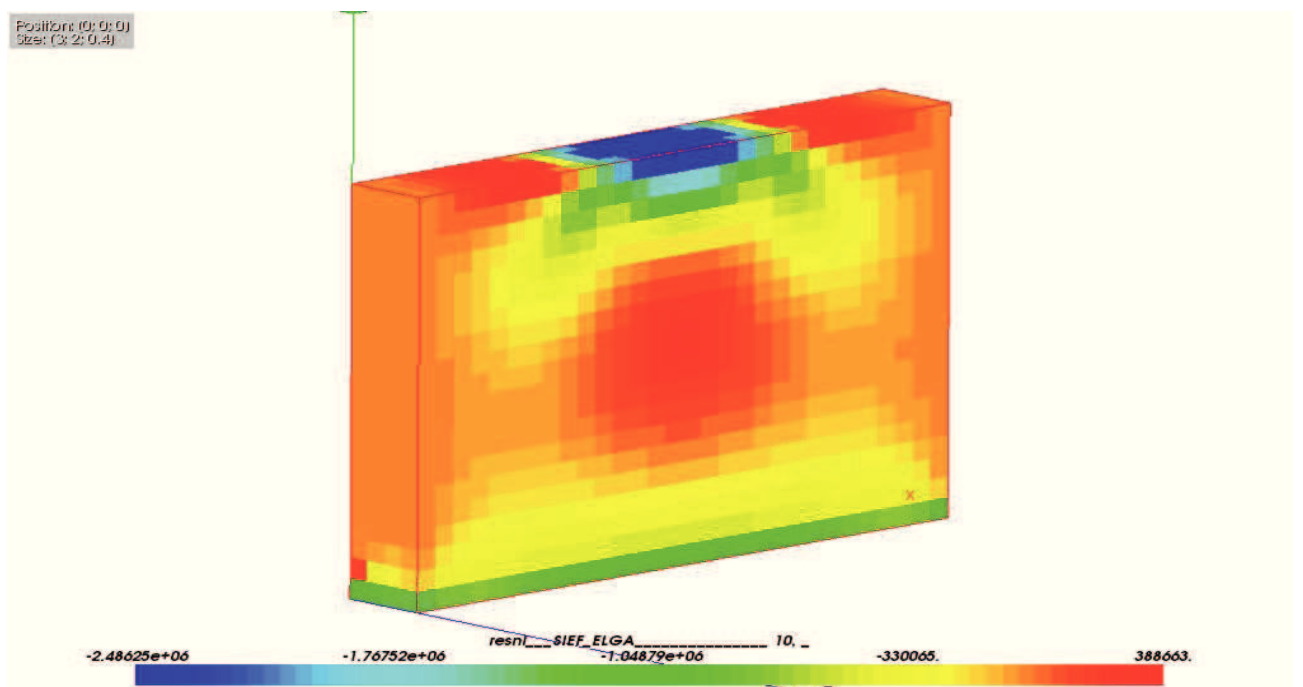
Obr. 61: Napětí  $\sigma_y$  do poloviny nasáklá stěna



Obr. 62: Napětí  $\sigma_y$  úplně nasáklá stěna

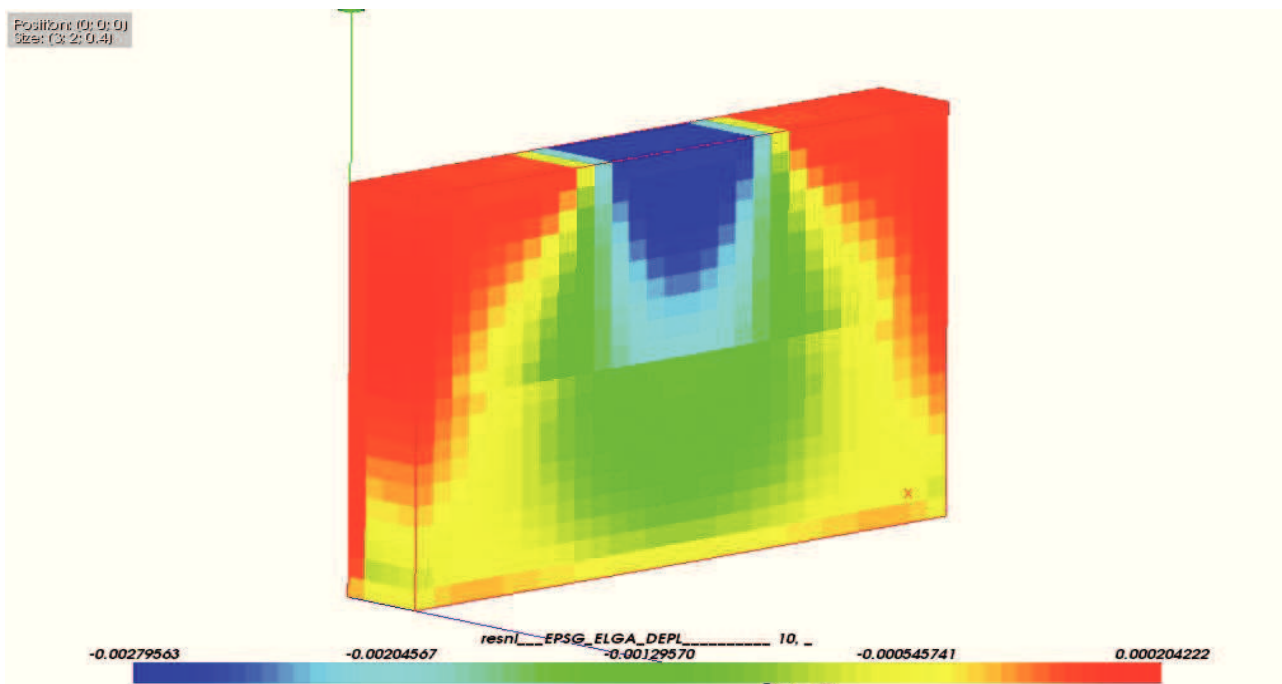


Obr. 63: Napětí  $\sigma_x$  do poloviny nasáklá stěna

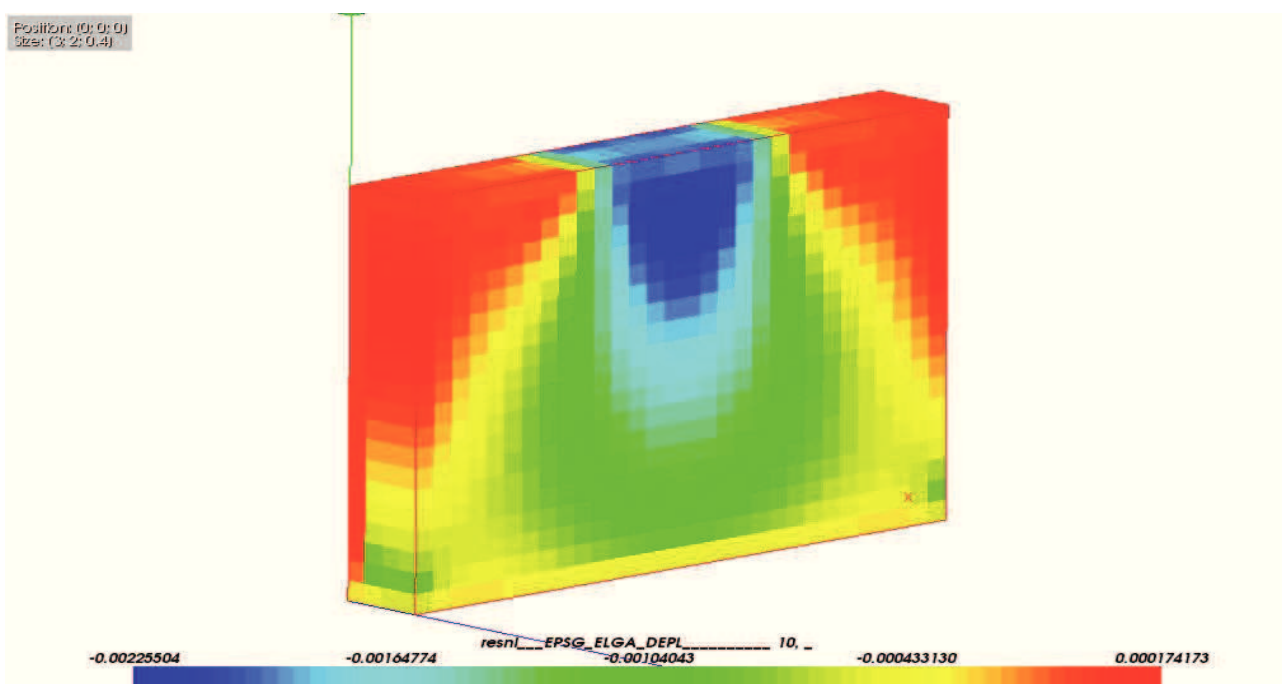


Obr. 64: Napětí  $\sigma_x$  úplně nasáklá stěna

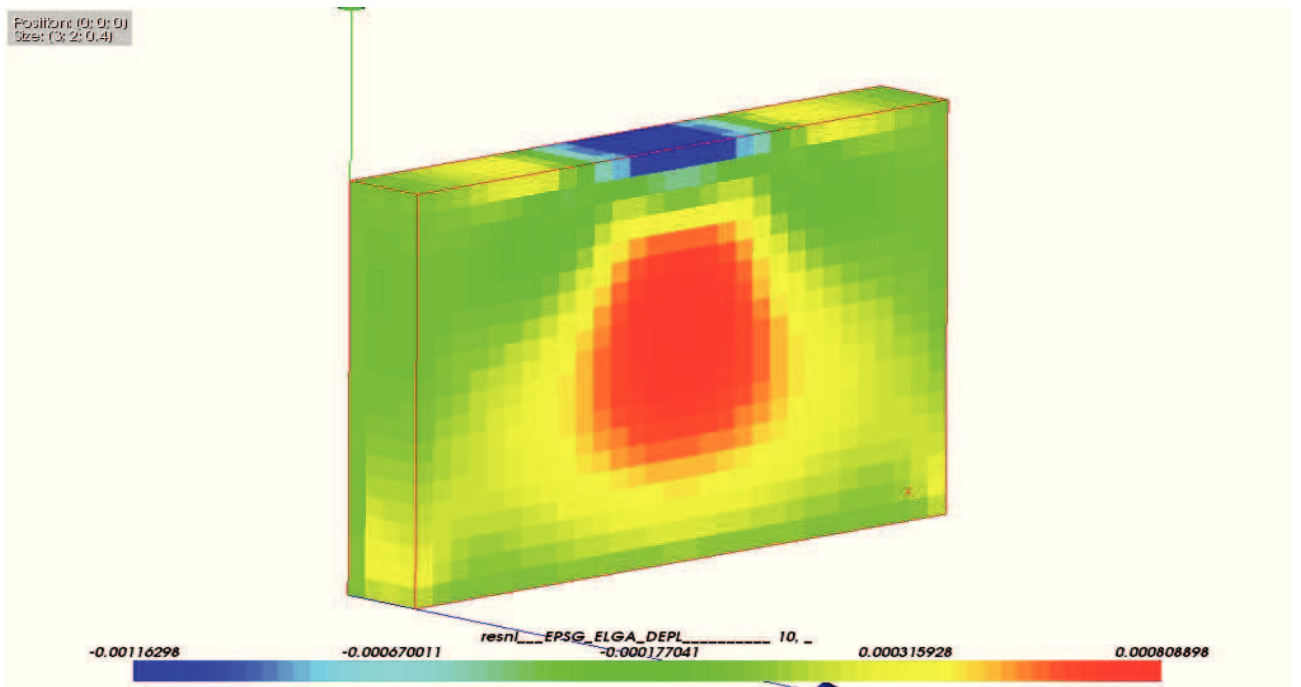




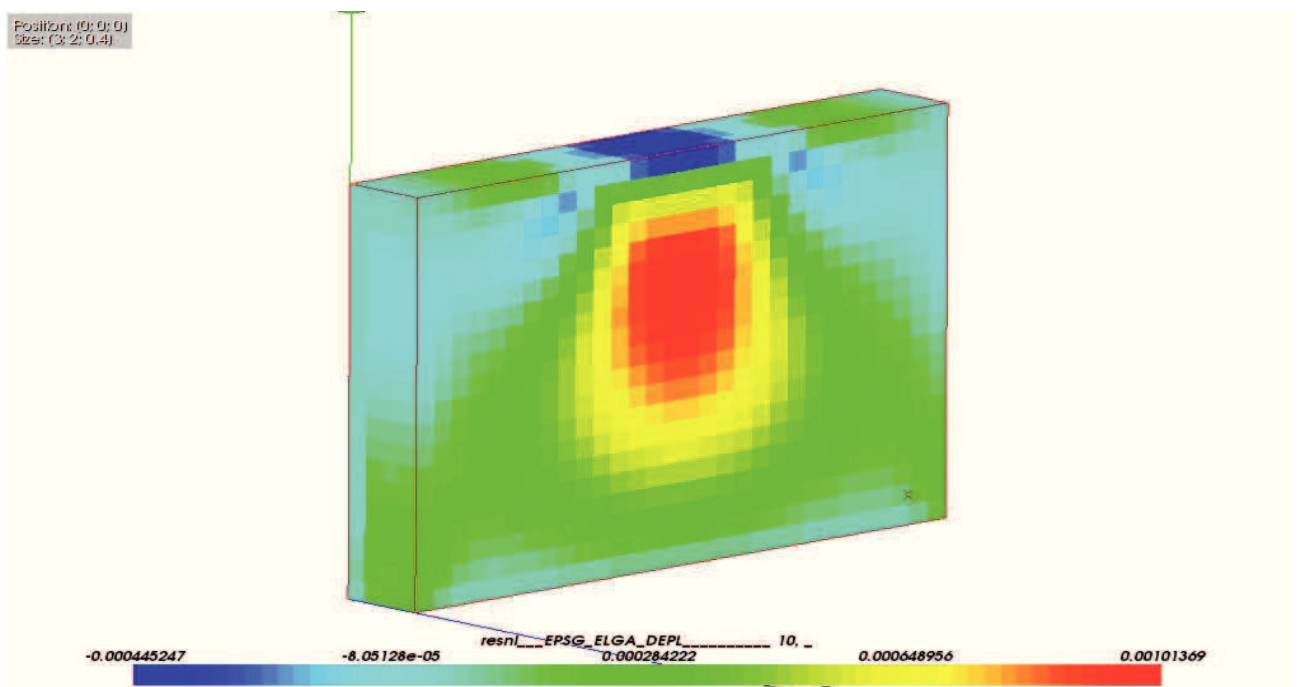
Obr. 65: Poměrné přetvoření  $\varepsilon_y$  do poloviny nasáklá stěna



Obr. 66: Poměrné přetvoření  $\varepsilon_y$  úplně nasáklá stěna

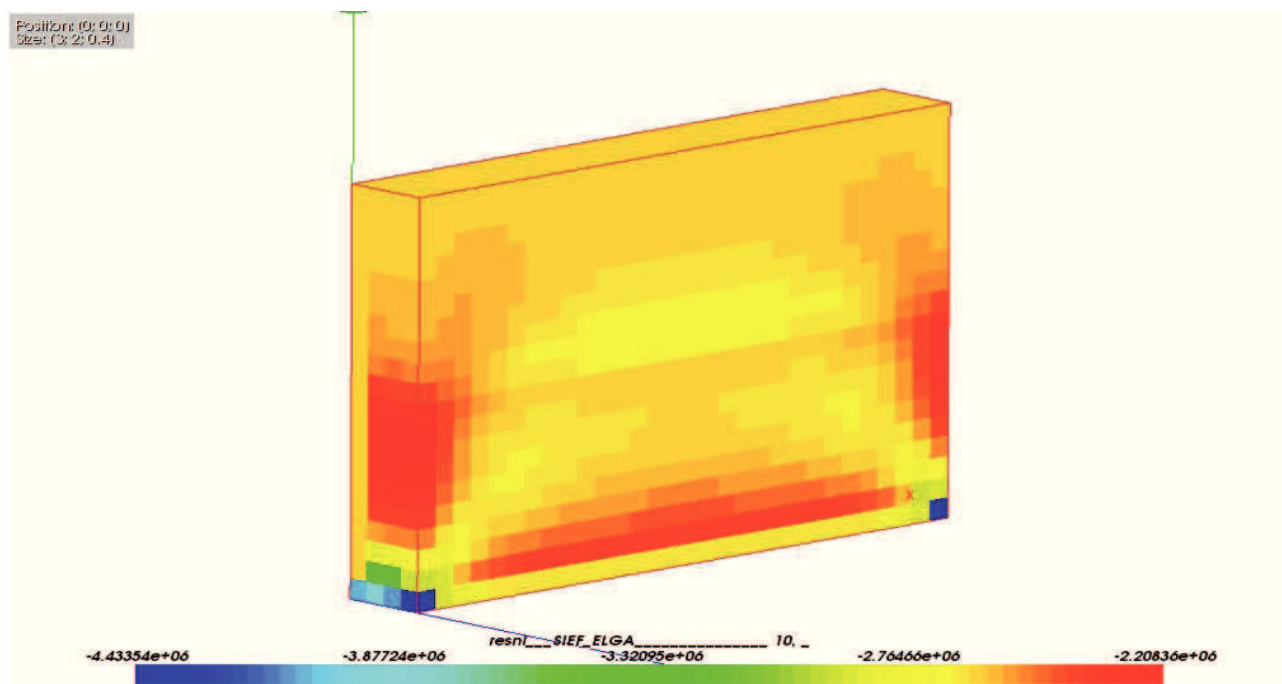


Obr. 67: Poměrné přetvoření  $\varepsilon_x$  do poloviny nasáklá stěna

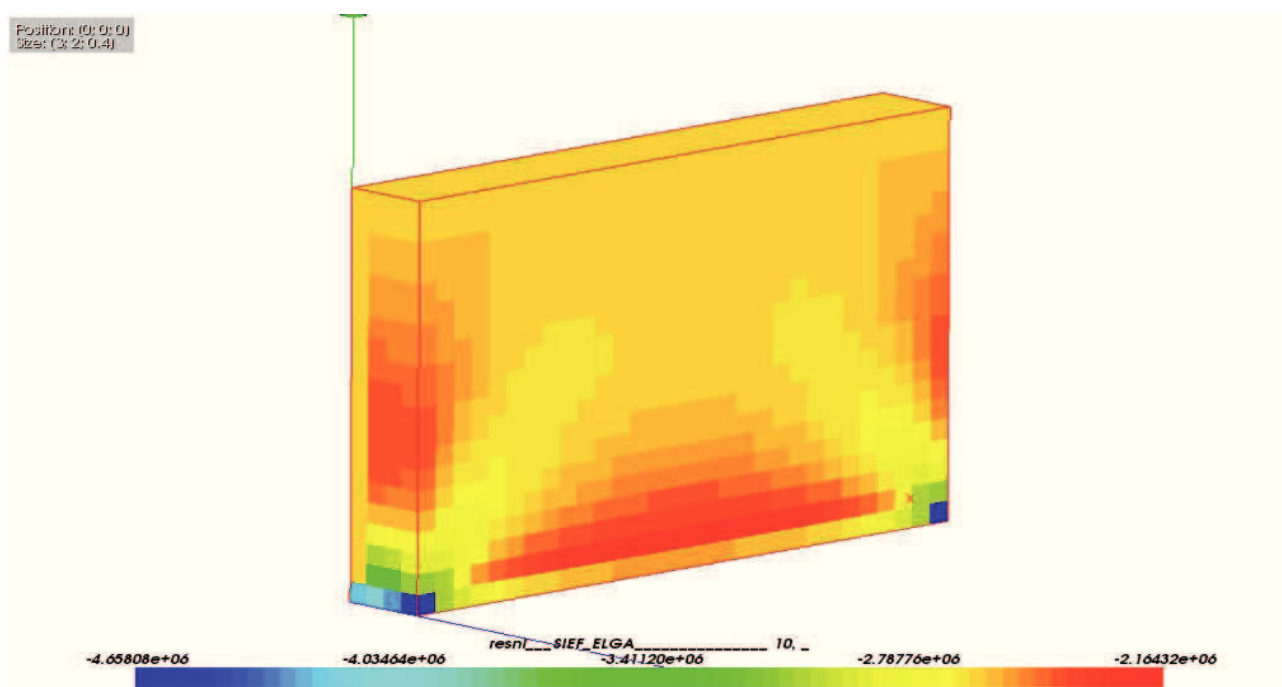


Obr. 68: Poměrné přetvoření  $\varepsilon_x$  úplně nasáklá stěna

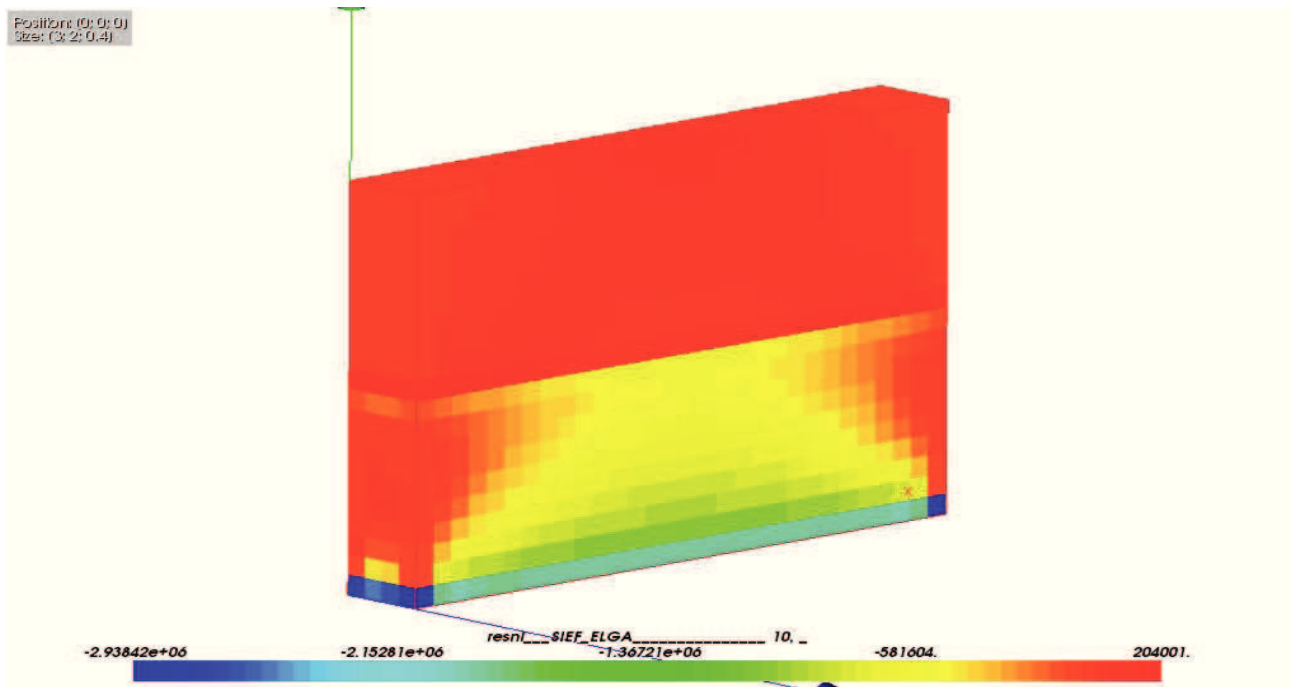
## 7.8 Jednoduchá po celé délce zatížená stěna - model Cam-Clay



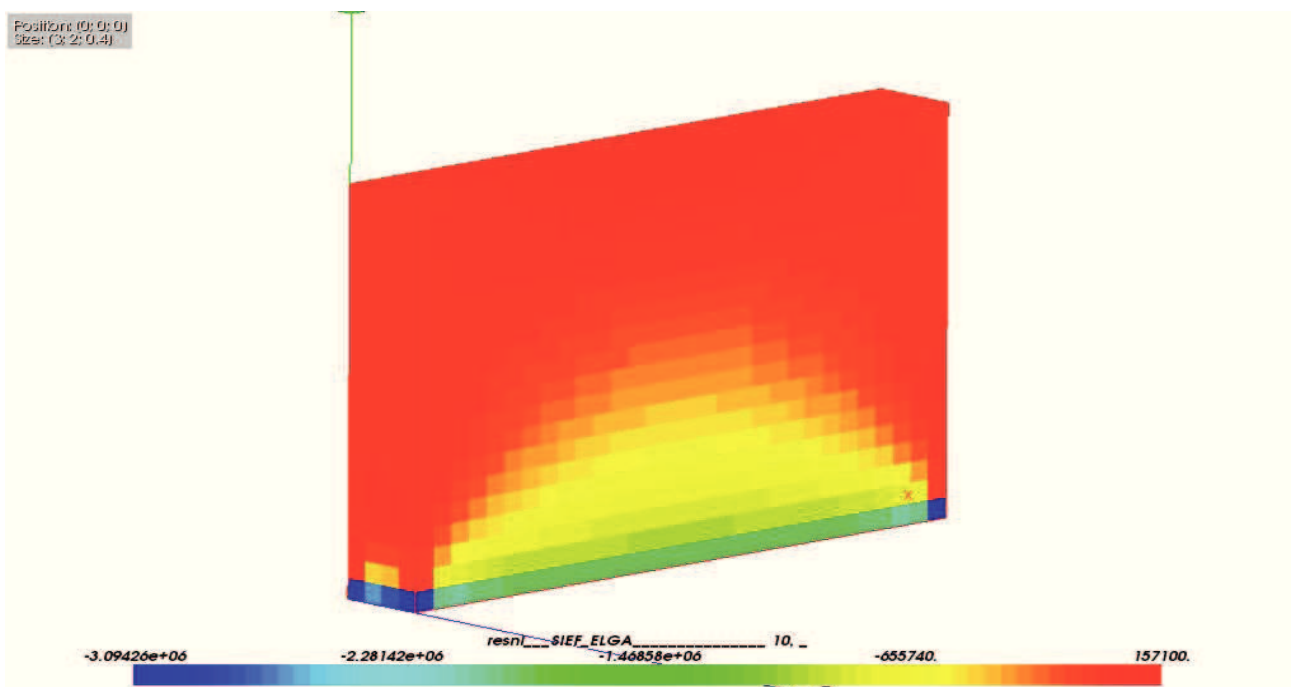
Obr. 69: Napětí  $\sigma_y$  do poloviny nasáklá stěna



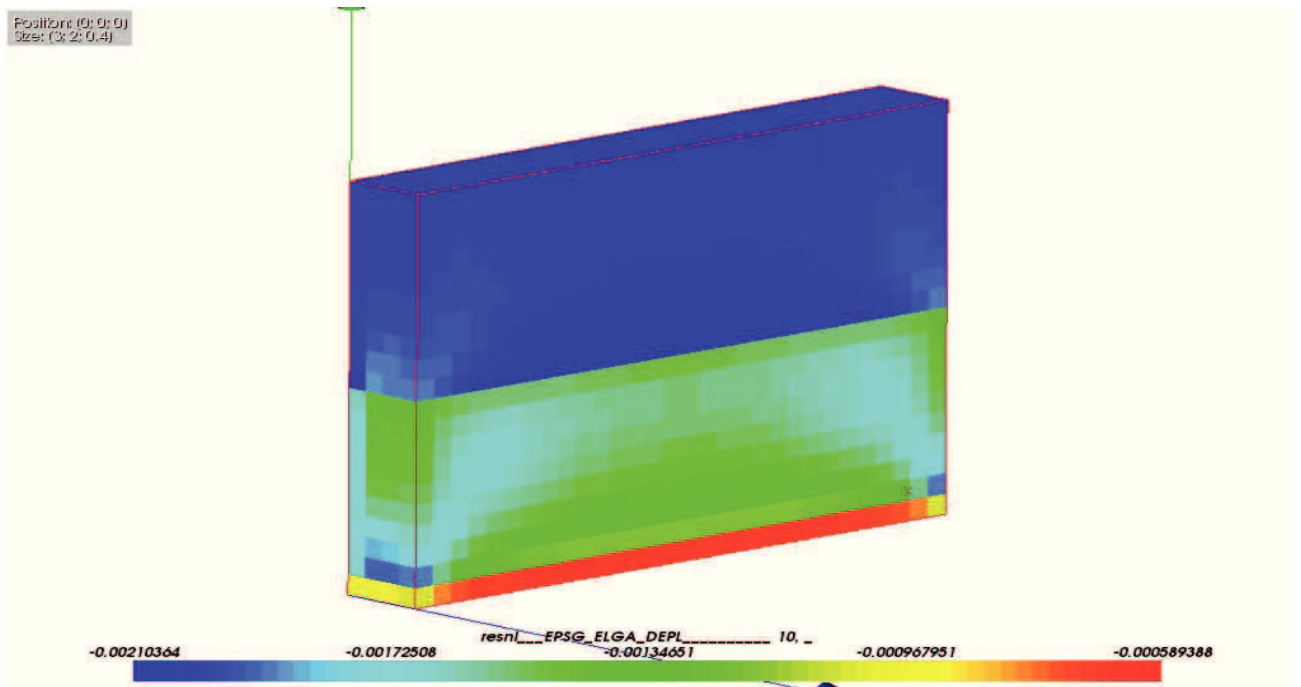
Obr. 70: Napětí  $\sigma_y$  úplně nasáklá stěna



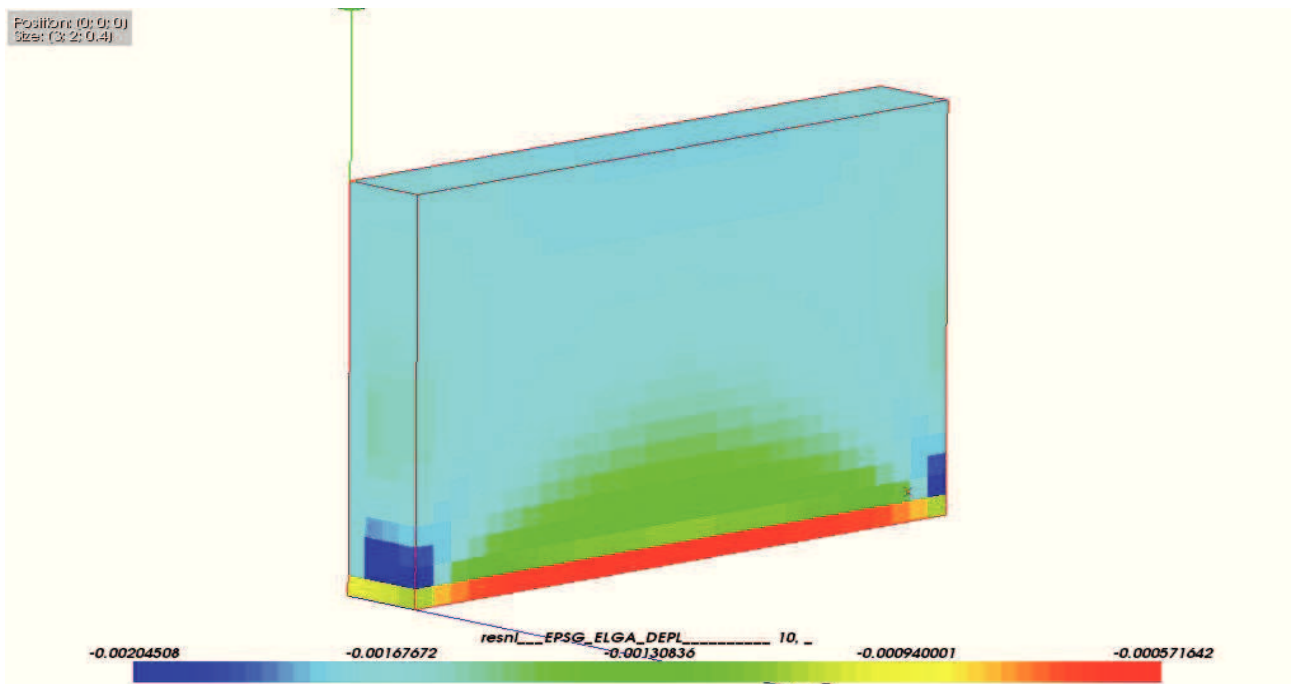
Obr. 71: Napětí  $\sigma_x$  do poloviny nasáklá



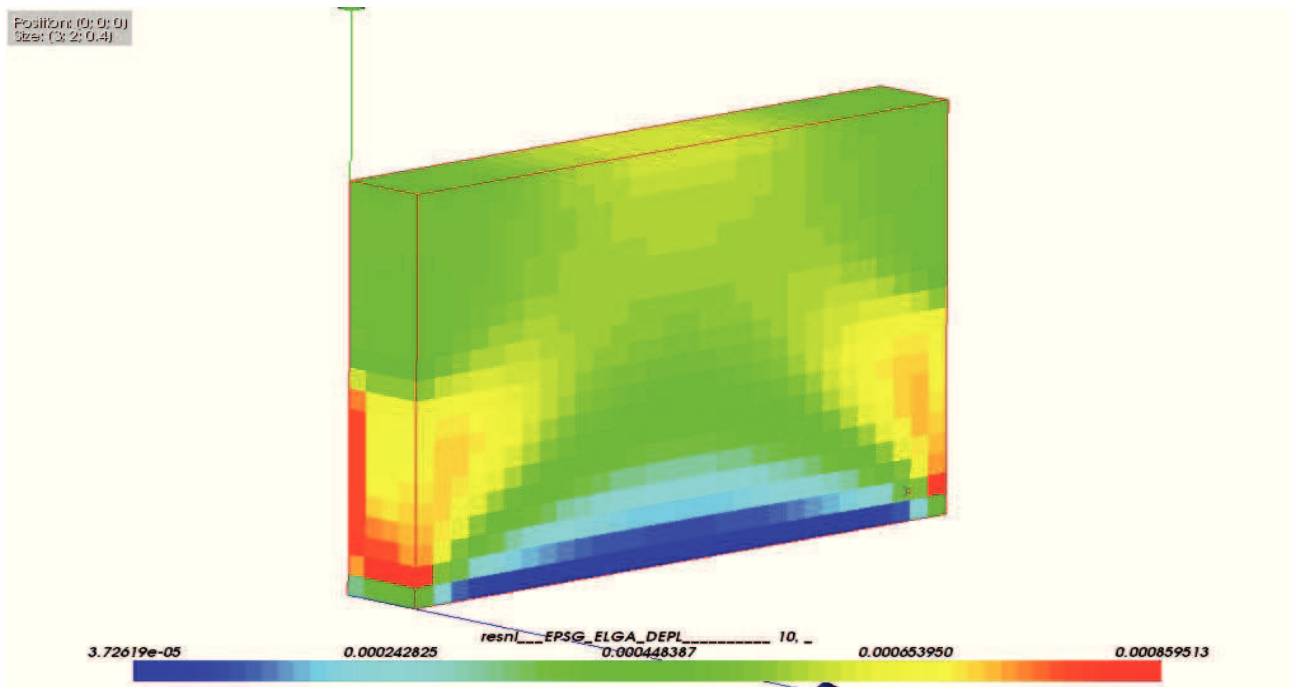
Obr. 72: Napětí  $\sigma_x$  úplně násáklá stěna



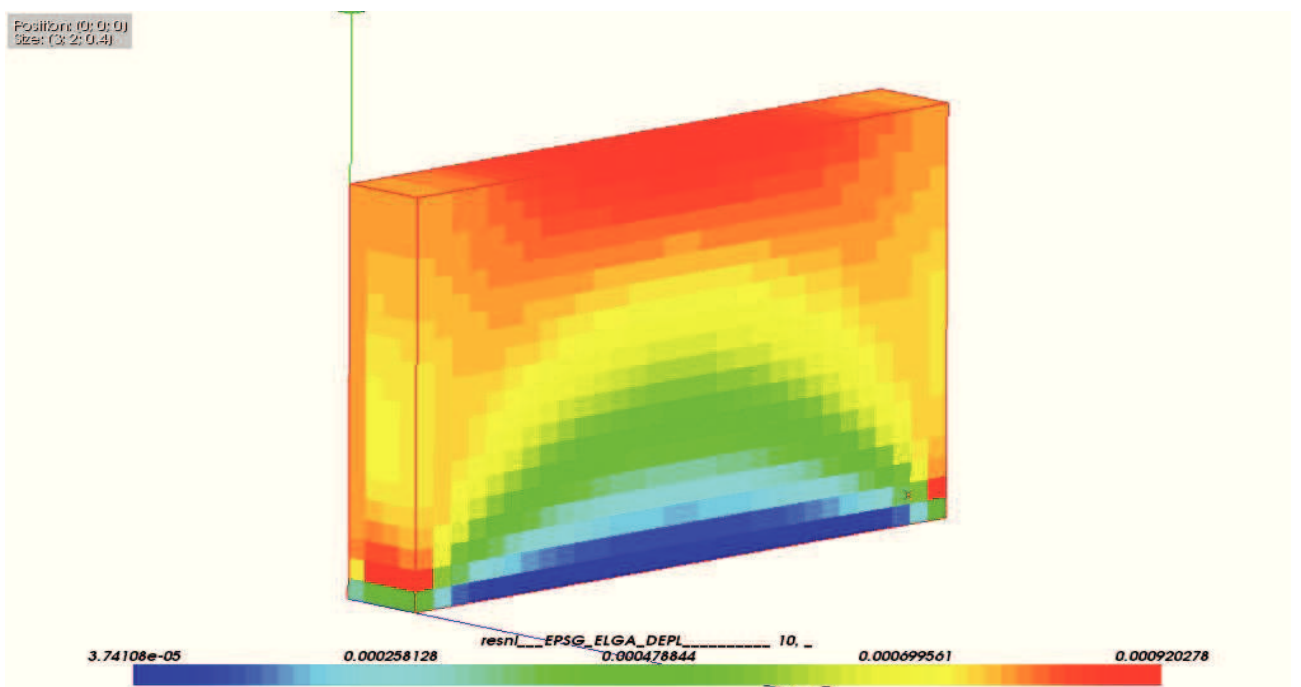
Obr. 73: Poměrné přetvoření  $\varepsilon_y$  do poloviny nasáklá stěna



Obr. 74: Poměrné přetvoření  $\varepsilon_y$  úplně násáklá stěna

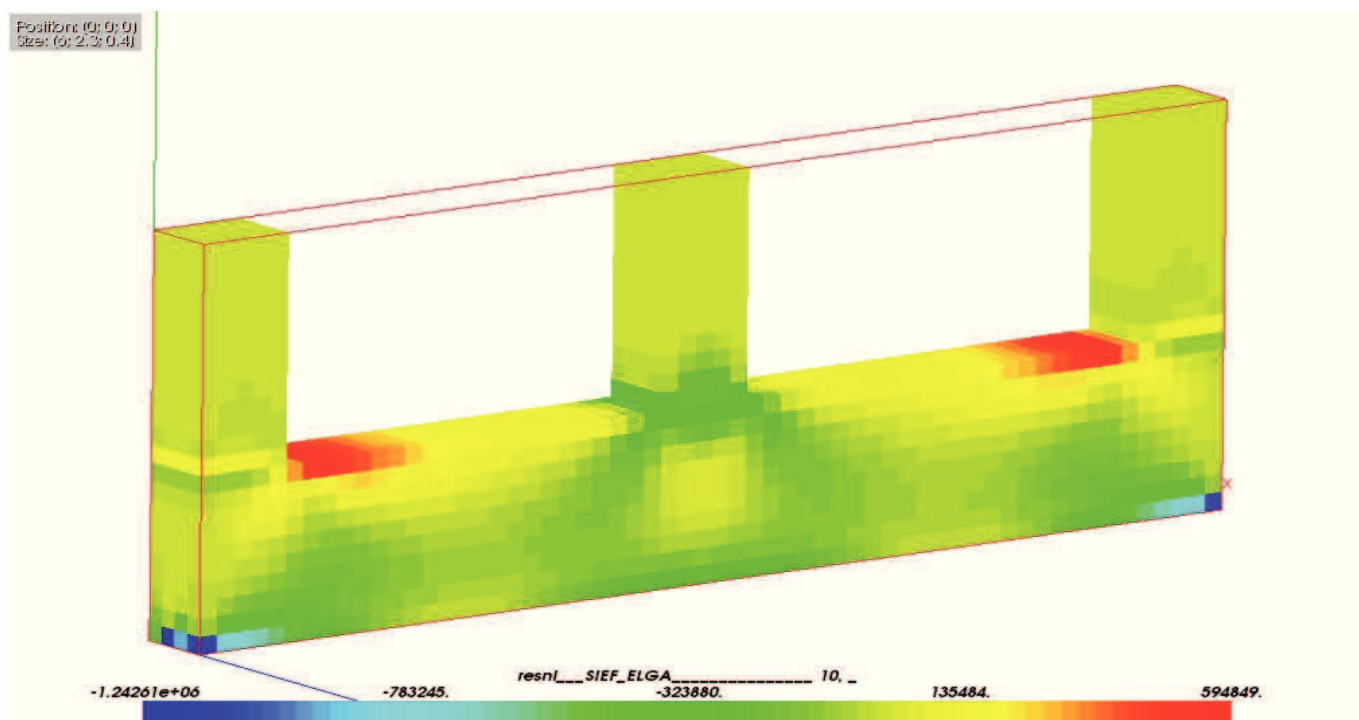


Obr. 75: Poměrné přetvoření  $\varepsilon_x$  do poloviny nasáklá stěna

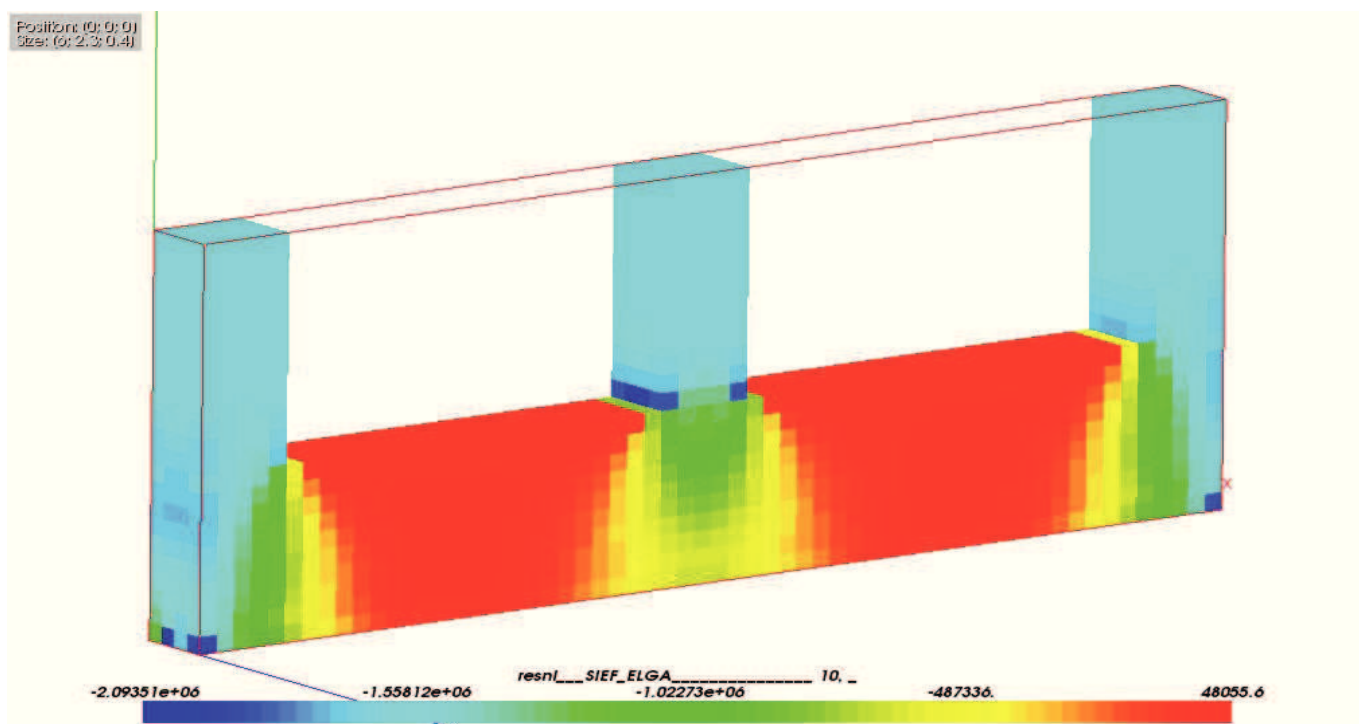


Obr. 76: Poměrné přetvoření  $\varepsilon_x$  úplně nasáklá stěna

## 7.9 Stěna s okenními otvory - model Cam-Clay

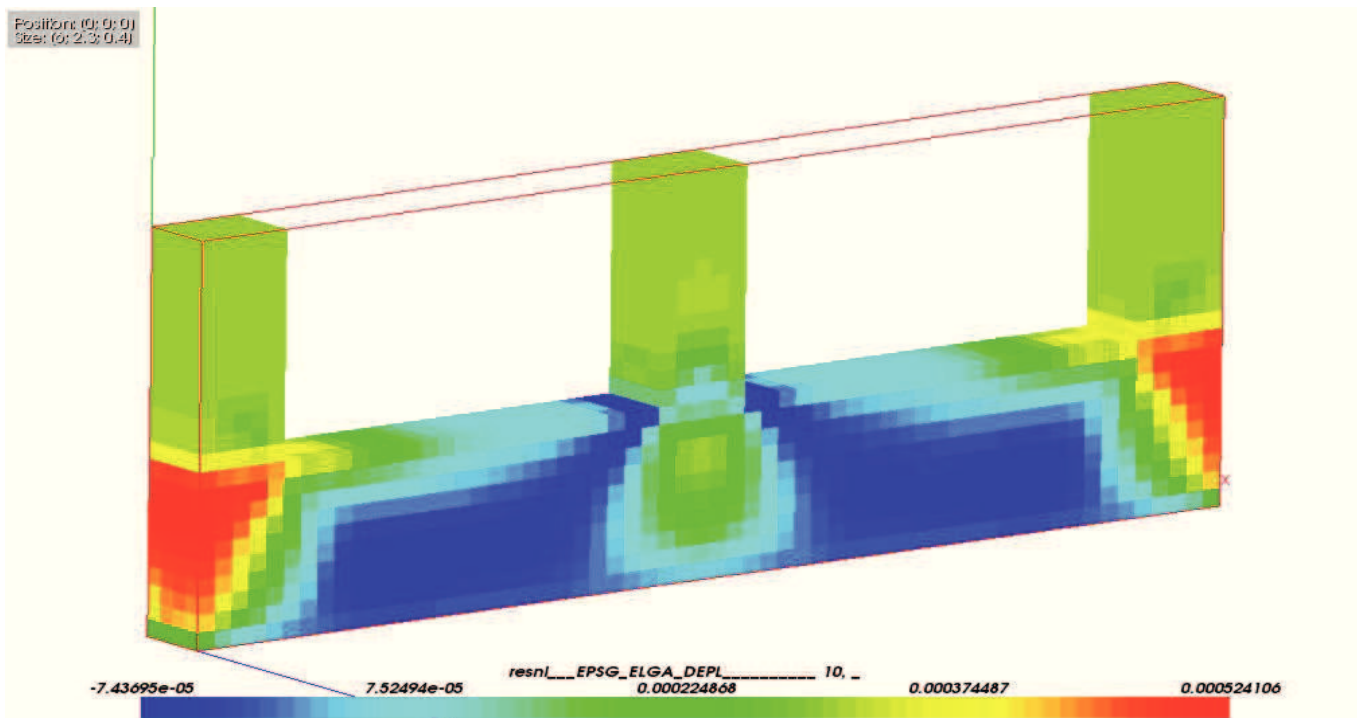


Obr. 77: Napětí  $\sigma_y$  nasáklá stěna

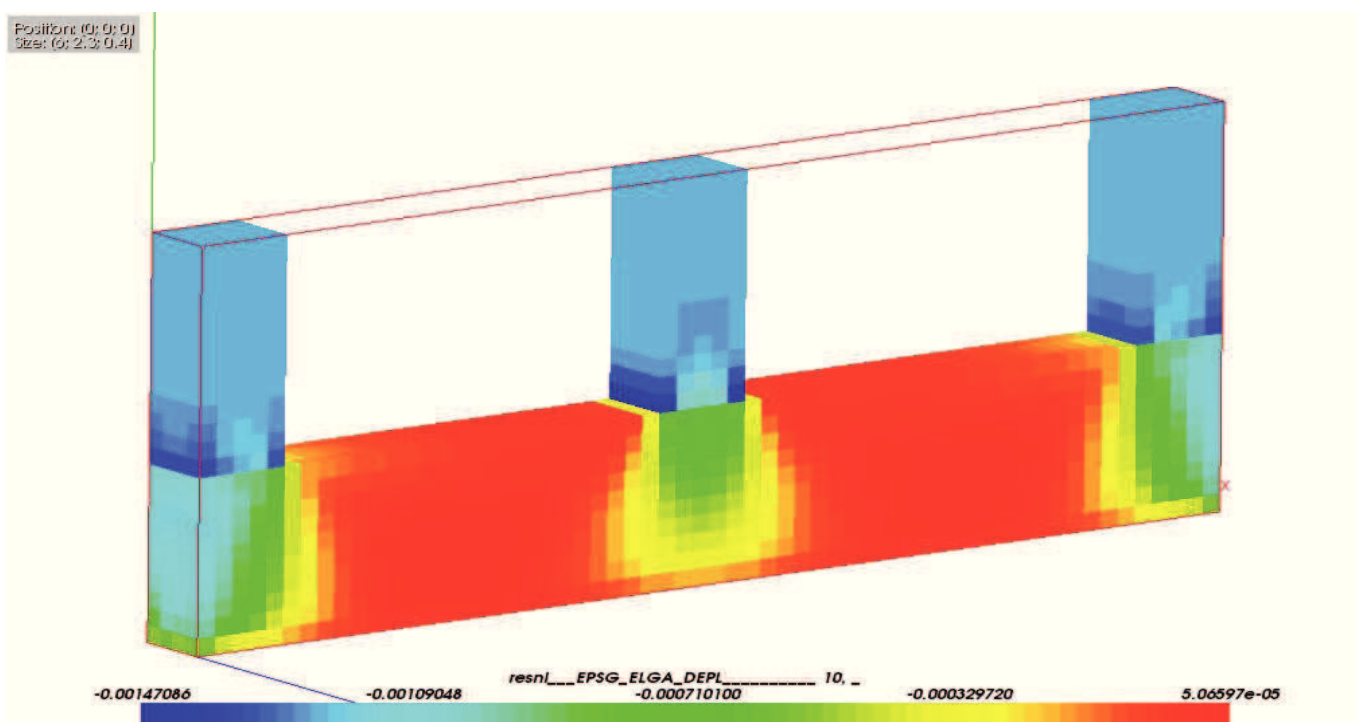


Obr. 78: Napětí  $\sigma_y$  nasáklá stěna





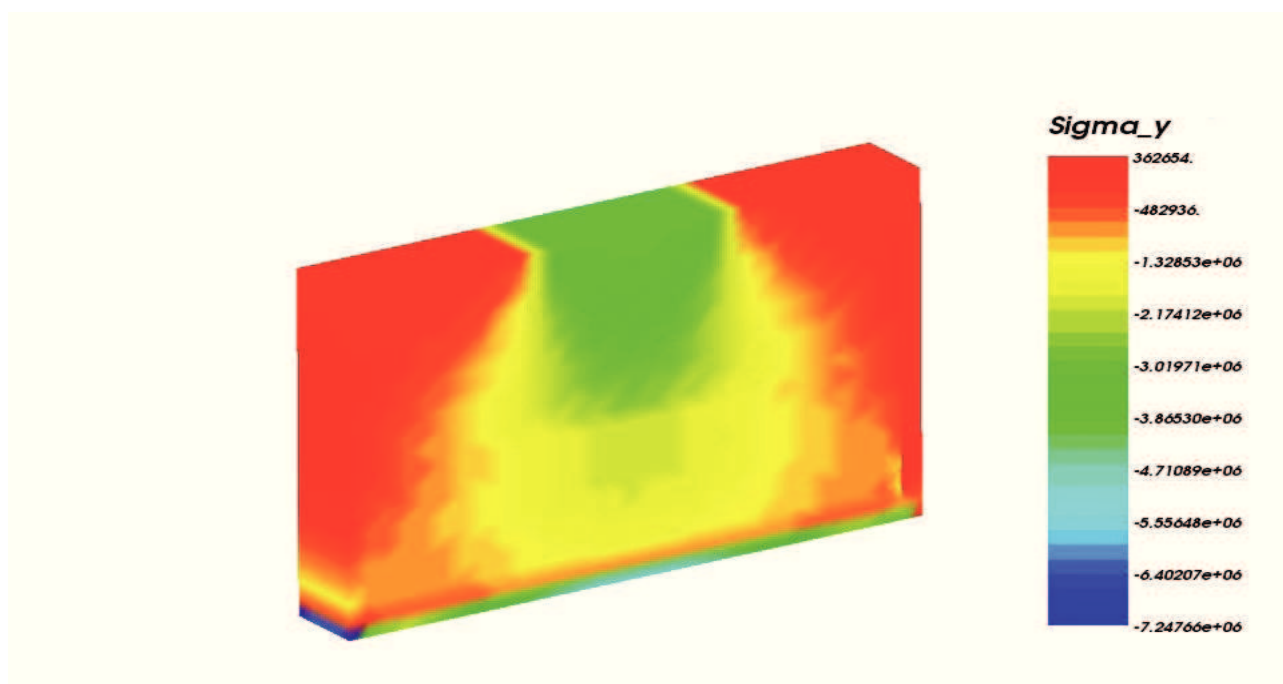
Obr. 79: Poměrné přetvoření  $\varepsilon_x$  nasáklá stěna



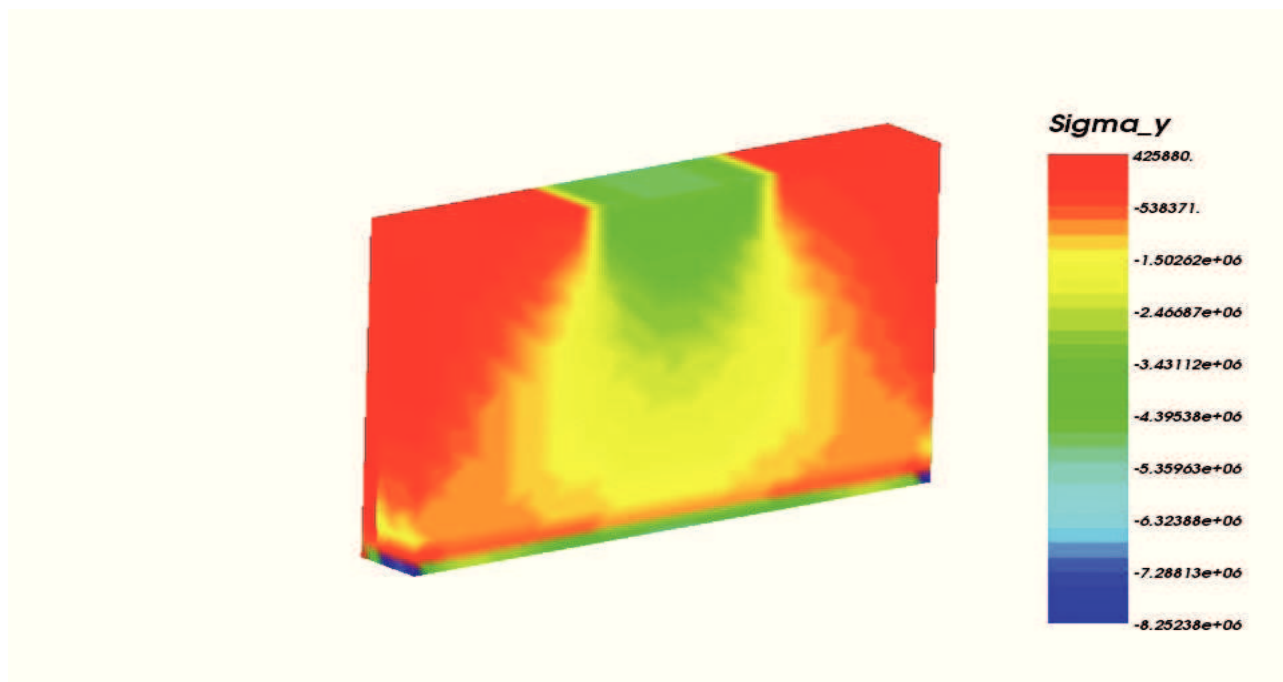
Obr. 80: Poměrné přetvoření  $\varepsilon_y$  nasáklá stěna



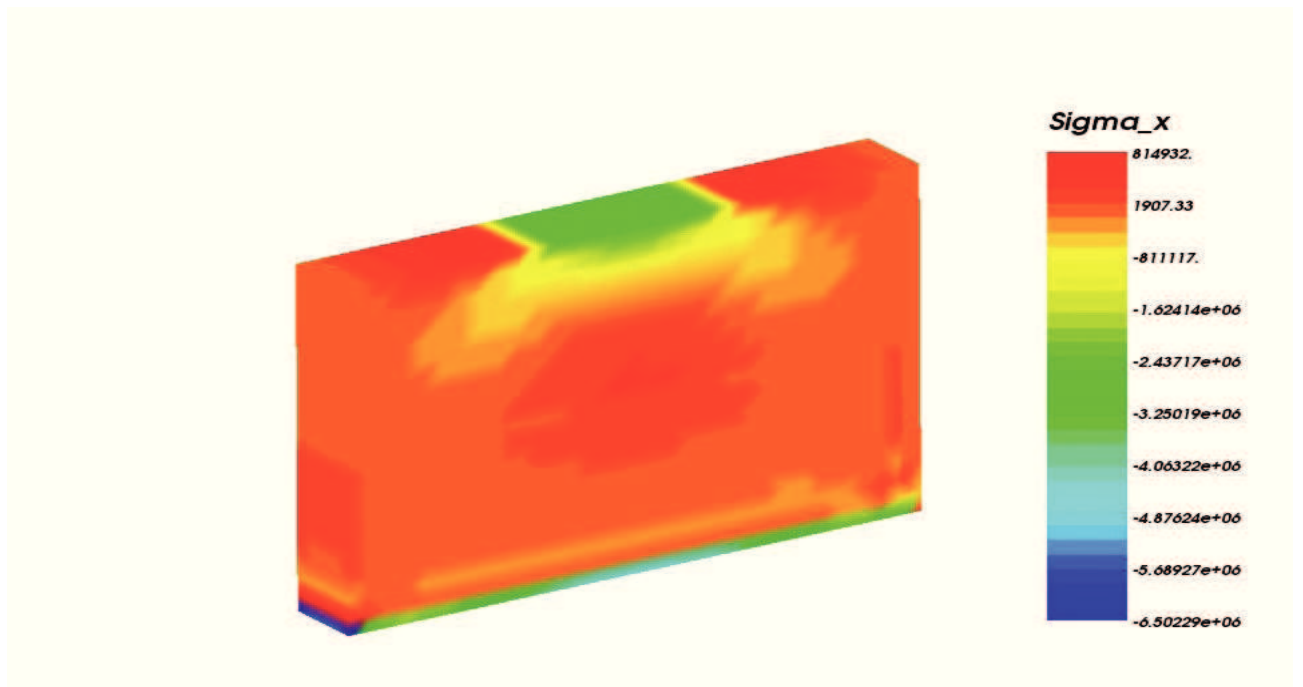
## 7.10 Jednoduchá lokálně zatížená stěna - model MSDPu a poroelasticita



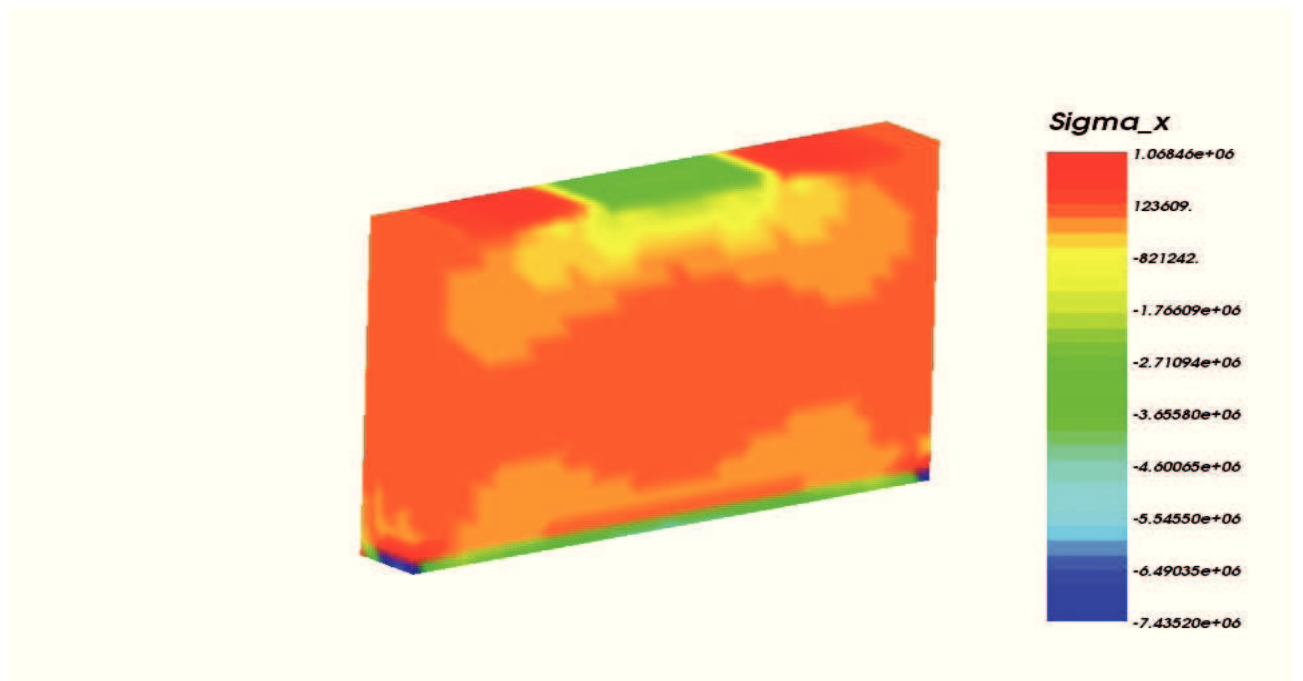
Obr. 81: Napětí  $\sigma_y$  do poloviny nasáklá stěna



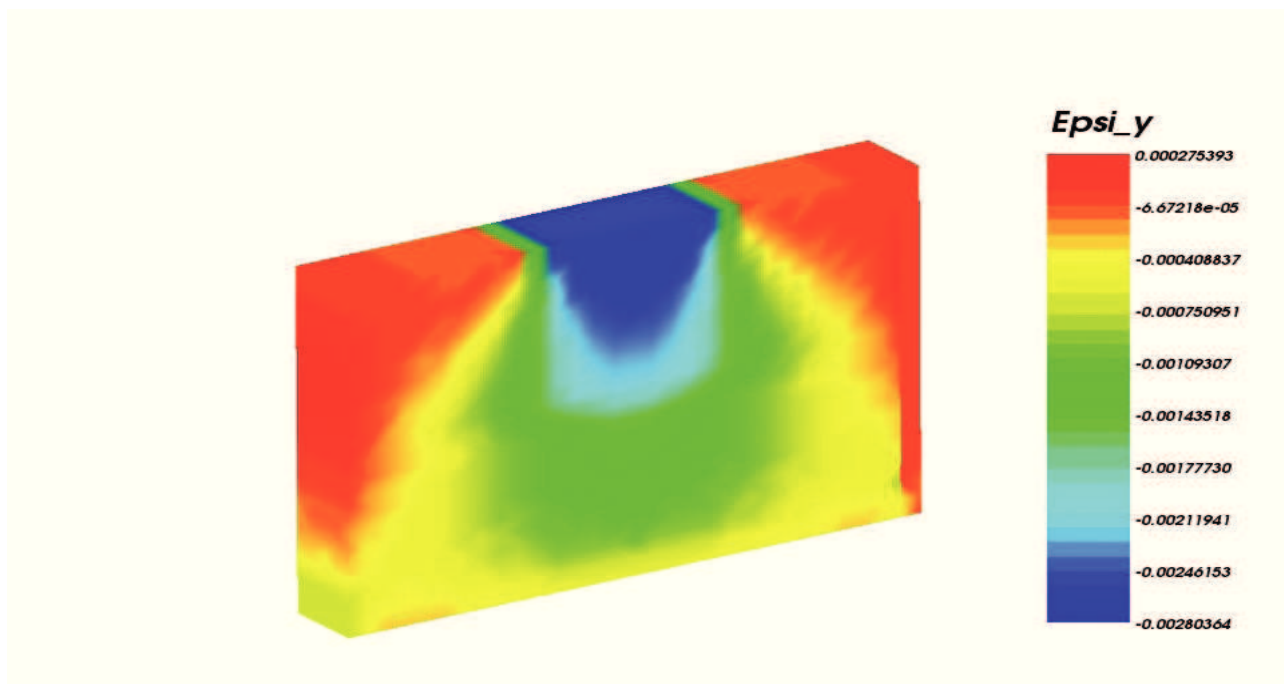
Obr. 82: Napětí  $\sigma_y$  úplně nasáklá stěna



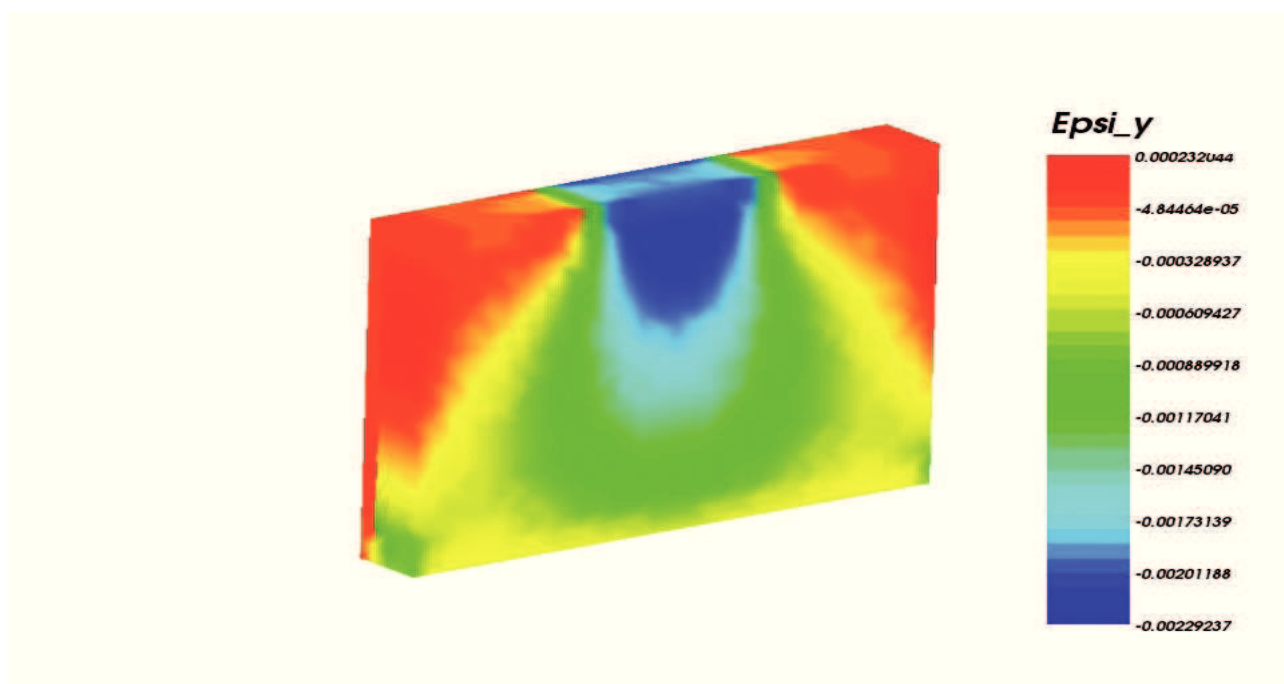
Obr. 83: Napětí  $\sigma_x$  do poloviny nasáklá stěna



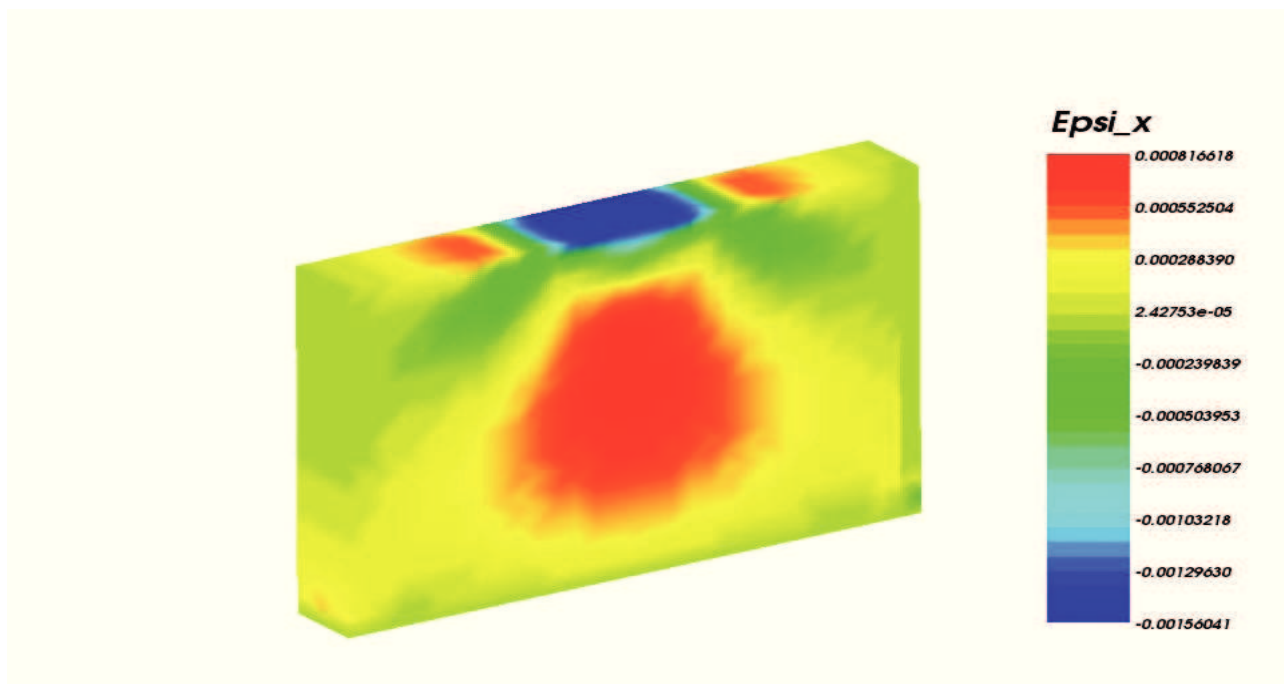
Obr. 84: Napětí  $\sigma_x$  úplně nasáklá stěna



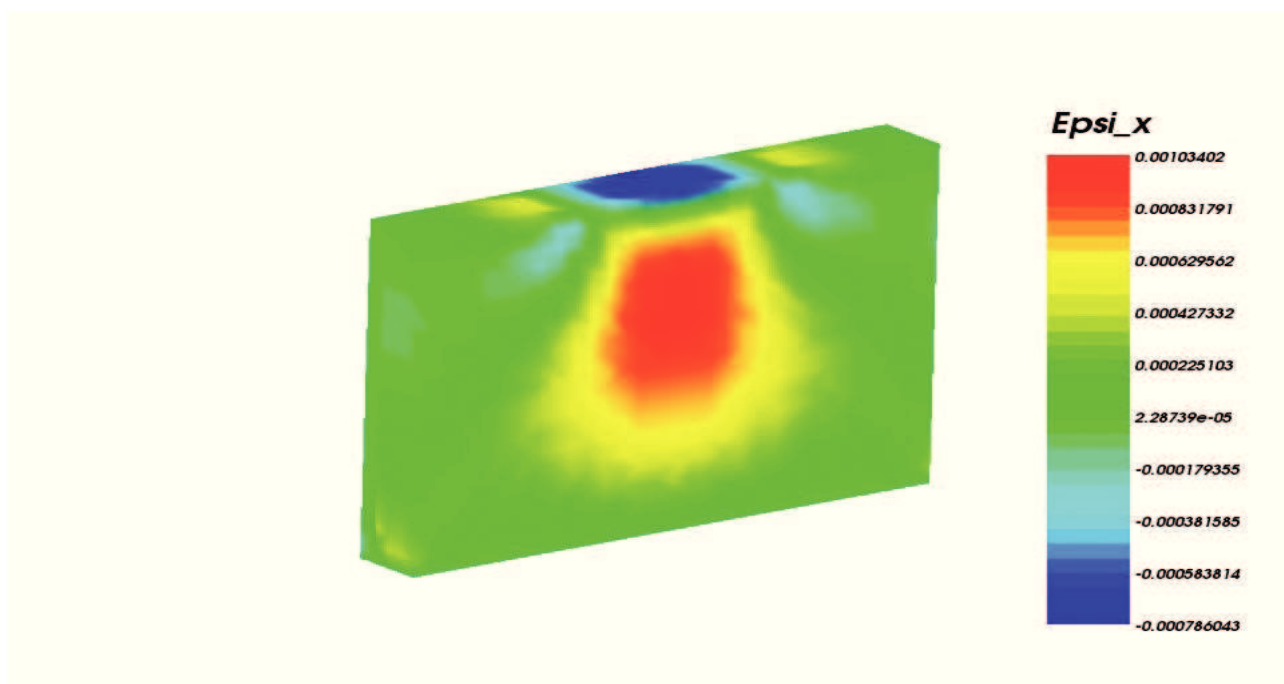
Obr. 85: Poměrné přetvoření  $\varepsilon_y$  do poloviny nasáklá stěna



Obr. 86: Poměrné přetvoření  $\varepsilon_y$  úplně nasáklá stěna

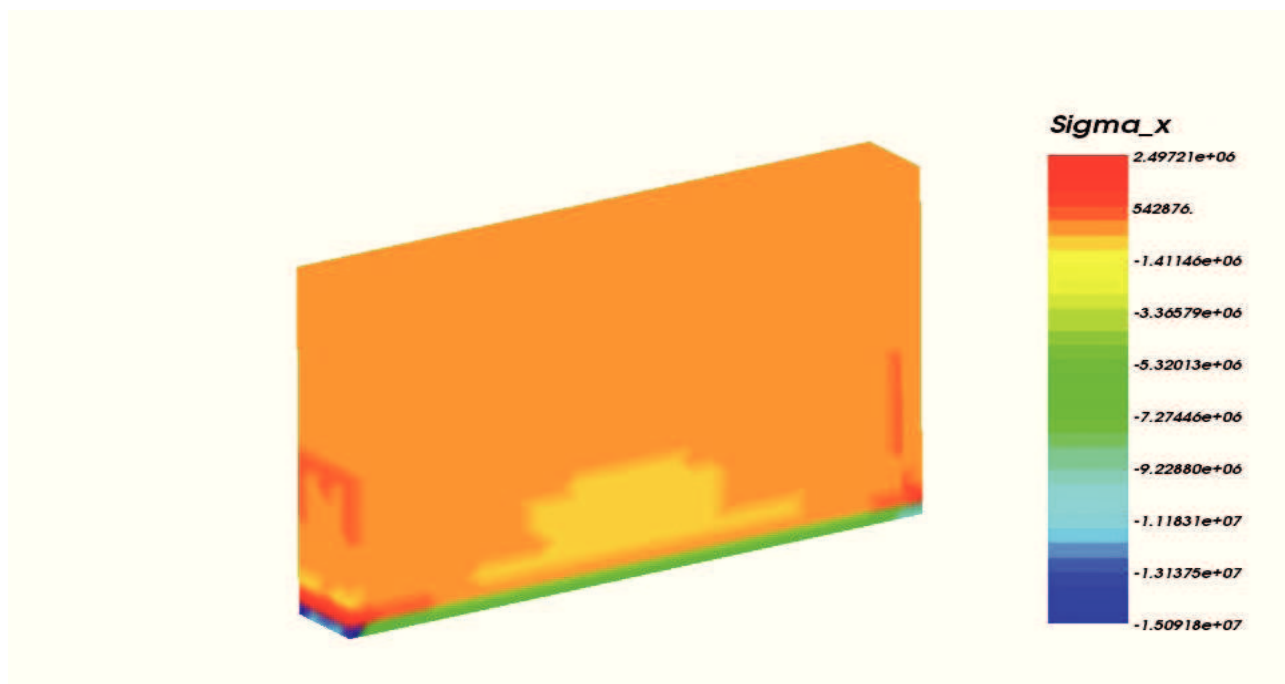


Obr. 87: Poměrné přetvoření  $\varepsilon_x$  do poloviny nasáklá stěna

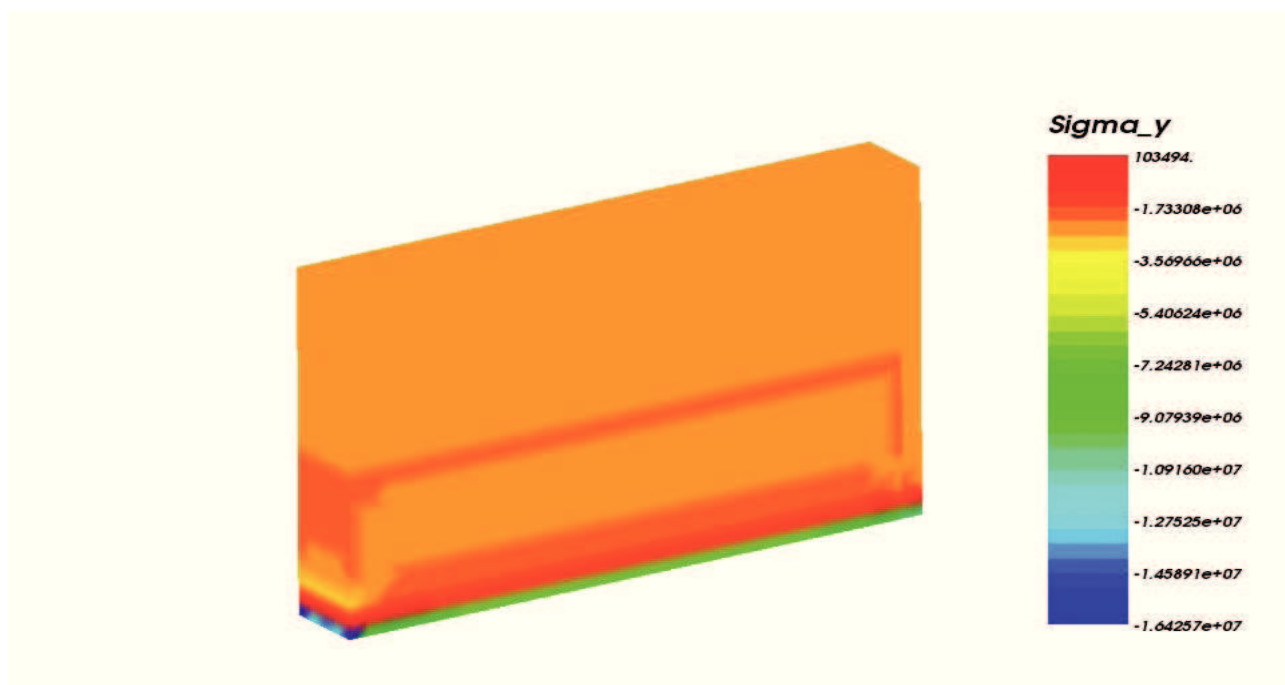


Obr. 88: Poměrné přetvoření  $\varepsilon_x$  úplně nasáklá stěna

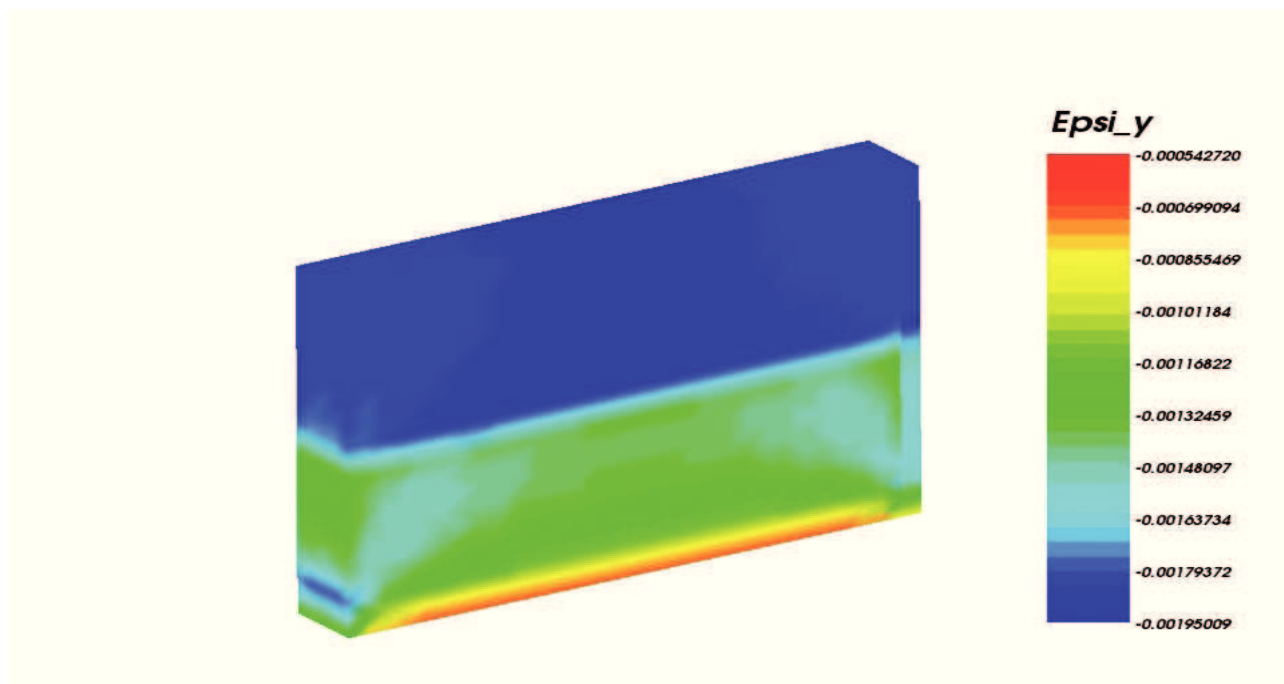
## 7.11 Jednoduchá v celé délce zatížená stěna - model MSDPu a poroelasticita



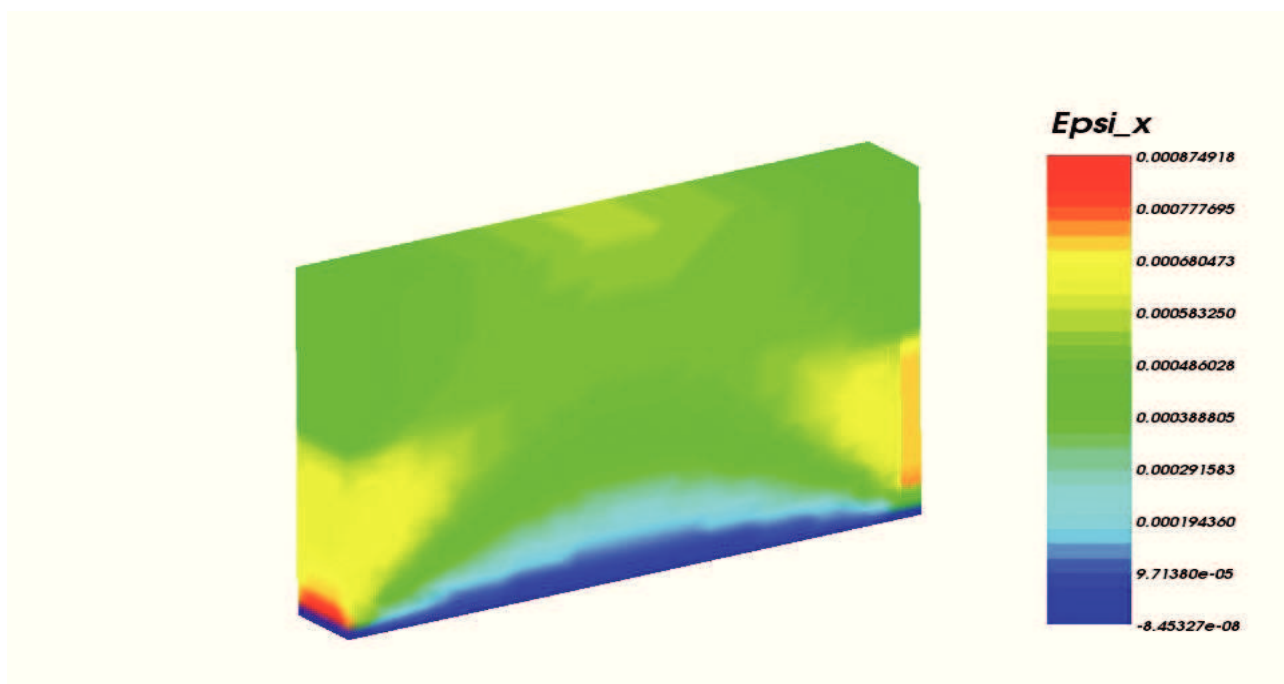
Obr. 89: Napětí  $\sigma_y$  do poloviny nasáklá stěna



Obr. 90: Napětí  $\sigma_y$  do poloviny nasáklá stěna



Obr. 91: Poměrné přetvoření  $\varepsilon_x$  do poloviny nasáklá stěna



Obr. 92: Poměrné přetvoření  $\varepsilon_y$  do poloviny nasáklá stěna

## 7.12 Vyhodnocení výsledků

- Při modelování pomocí komerčního programu RFEM bylo dosaženo kvalitních výsledků. Dá se předpokládat, že je to způsobeno jednoduchostí zadání pružno-plastické úlohy bez zpevnění. Na výsledcích je vidět výrazný rozdíl především u modelu stěny do poloviny nasáklého vodou. Výrazně se rozdíly projevují u poměrných převoření. Je zřejmé, že horní polovina díky své větší tuhosti způsobuje větší deformace v dolní polovině stěny, tím však také dochází k větší oblasti tahových napětí v horní polovině. V úloze zatížené po celé délce ze patrné, že spodní část logicky dosahuje své maximální únosnosti při mnohem nižším zatížení než horní polovina.
- U modelu s okenními otvory je zřejmé, že dochází pod středním pilířem k velkým lokálním zatížením a u krajních pilířů dosahují lokální napětí ještě většího hodnot z důvodu působení na menší hmotu. Při nasáknutí podokenní části stěny dosahují krajní oblasti stěny svého maxima, avšak v suchých pilířích jsou maximální hodnoty jen v rohových částech. Z poměrných přetvoření ve směru x je také zřejmé, že krajní pilíře u nasáklého modelu způsobují výrazné tahové deformace. Pilíř má tendenci se oddělit od celku.
- Při modelování pomocí podmínky Cam-Clay je problematické najít vhodné vstupní parametry. Nelze také oddělit modelování suché a nasáklé hmoty. Pro tento model byl využit pouze do poloviny nasáklý a celý nasáklý model, kde nasáklá část byla modelována s podmínkou Cam-Clay a suchá část pouze jako pružný materiál. Pomocí dříve uvedených parametrů se podařilo dosáhnout výsledků, které se přibližovaly hranici reálné únosnosti. Je třeba brát v potaz, že u tohoto modelu spíše rozhoduje velmi nízká pevnost v tahu. Pokud se tedy tahové maxima konvergentního modelu blížily 0,4MPa, dá se model považovat za odpovídající.
- Především u modelu nasáklého do poloviny je velmi dobře patrný rozdíl na poměrných přetvořeních u lokálního zatížení. U zatížení celého modelu rovnoměrně je výrazný rozdíl mezi horní suchou a dolní nasáklou částí, která dosahuje svých extrémů rychleji.
- U modelu s okenními otvory je zřejmá podobná tendence jako v programu RFEM. Především oblasti pod krajními pilíři ovlivňují maximální únost celého modelu.

- Při modelování pomocí poroelasticity a podmínky MSDPu jsou patrné podobné tendence jako u podmínky Cam-Clay. Zjevné je zvýšení napětí vlivem pórových tlaků, které způsobuje větší napětí v celém modelu. Vlastní únosnost stěny je téměř shodná jako u modelu s podmínkou Cam-Clay. Zvětšení v napětích je patrné především u stěny zatížené v celé délce, kde ačkoli dolní polovina je nasáklá, tak napětí ve směru zatížení je téměř shodné v obou částech. K lokálním nárůstům dochází pouze v oblasti podepření konstrukce.
- U obou podmínek plasticity Cam-Clay a MSDPu je pozorovatelné, že model nedosahuje maxim v maximálních poměrných přetvořeních. Je to dáno především tvary podmínek, které nejsou lineární a nedosáhnout tak stejného poměrného přetvoření jako model lineární. V obou podmínkách se také předpokládá konsolidace, avšak pórobeton je spíše materiál křehký a konsolidaci téměř neumožňuje.
- Z modelu je zřejmé, že použité podmínky plasticity se mohou blížit reálným hodnotám, avšak jsou zřejmě vhodnější pro materiály typu měkkých pórovitých hornin, než křehkých stavebních materiálů.



## 8 Závěr

V předložené diplomové práci byly prezentovány některé možnosti modelování mechanického chování pórovitých stavebních materiálů. Vlastnosti pórovitých materiálů jsou výrazně ovlivňovány především vlhkostí. Pro případy, které jsou vlhkostí ovlivněny lze využít možnosti poroelasticity, která pracuje s pružností pórovitých látek obsahujících tekutinu. Modelování pomocí lineární pružnosti nebo lineární poroelasticity lze efektivně doplnit podmínkami plasticity, které využívají jako vstupní parametr pórovitost.

Zmíněné možnosti modelování pórovitých materiálů byly prezentovány na zvolených úlohách. Tyto úlohy simulují jednoduché stavební konstrukce tvořené pórobetonem. Pro modelování vlivu vlhkosti byly části konstrukce simulovány jako nasáklé nebo suché. V modelových úlohách byly použity podmínky Cam-Clay a MDSPu. Z důvodu potřeby vstupních hodnot pro modelování byl experimentálně zkoušen šedý pórobeton. Zjišťován byl modul pružnosti, pevnost v tlaku a informativně také pevnost v tahu.

Výsledkem jednotlivých modelů jsou vykreslená napěťová a deformační pole na konstrukci při maximální možné únosnosti modelu s použitými vstupními parametry. Z jednotlivých výsledků lze usoudit, že je velmi problematické vhodně zvolit vstupní veličiny tak, aby se výstupní hodnoty blížily realitě. Nejpřirozenější výsledky poskytuje klasický pružno-plastický model bez zpevnění. Při použití poroelasticity dochází ke zvyšování napětí bez zvýšení zatížení oproti klasickému lineárně pružnému modelu. Podmínky plasticity Cam-Clay a MDSPu, poskytují výsledky blízké realitě v oblasti napětí, avšak při nižších poměrných přetvořeních. U všech modelů také nastává problém v oblasti uložení konstrukce, kde dochází k výrazné akumulaci napětí.

Celkově lze tedy shrnout, že jednotlivé modely jsou vhodné pouze omezeně. Pro každý jednotlivý model je potřeba vhodně navolit vstupní parametry pro co nejpřesnější výsledky. Podmínky plasticity pracující s pórovitostí, jsou vhodné spíše pro materiály, které umožňují konsolidaci. Pro křehké pórovité látky neposkytují příliš přesná řešení.

## 9 Literatura

- [1] ČSN EN 73 1352: *Stanovení statického modulu pružnosti v tlaku autoklávovaného pórobetonu a mezerovitého betonu z pórovitého kameniva* Český normalizační institut, Praha, 1998
- [2] Kearsley, E. P., Wainwright, P. J.: *The effect of porosity on the strength of foamed concrete* Cement and Concrete Research, 32, 2002, str. 233-239
- [3] Zinkiewicz, O. C., Taylor, R. L., Zhu: *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals*. Elsevier Butterworth-Heinemann, Oxford, 2005, ISBN 0750663200.
- [4] Biot, A. M.: *General theory of three-dimensional consolidation*, Journal of Applied Physics, 12, 1941, str. 155 . 164
- [5] Detournay, E., Cheng, A.H.-D.: *Fundamentals of poroelasticity*, Comprehensive Rock Engineering: Principles, Practice and Projects, Vol. II, Analysis and Design Method, ed. C. Fairhurst, Pergamon, 1993, str.113-171.
- [6] Zdravkov, B., Čermák, J. J., Janků, J., Kučerová, V., Šefara, M.: *Kategorizace pórů v porézních maticích*, Chemické listy, 102, 2008, str. 434 - 438
- [7] Maryska, J., Hokr, M., Královcová, J., Šembera, J.: *Modelování transportních procesů v horninovém prostředí*. Technická univerzita Liberec, Liberec, 2010, ISBN 978-80-7372-571-6.
- [8] Brdička, M., Samek, L., Sopko, B.: *Mechanika kontinua*, ACADEMIA, Praha, 2005, ISBN 80-200-1344-X
- [9] Bittnar, Z., Šejnoha, J.: *Numerické metody mechaniky I*. Vydavatelství ČVUT, Praha, 1992, ISBN 80-01-00855-X
- [10] Bittnar, Z., Šejnoha, J.: *Numerické metody mechaniky II*. Vydavatelství ČVUT, Praha, 1992, ISBN 80-01-00855-X
- [11] Witzany, J., Čejka, T., Wasserbauer, R., Zigler, R.: *PDR - Poruchy, degradace a rekonstrukce*, nakladatelství ČVUT, Praha, 2010, ISBN: 978-80-01-04488-9

- [12] Coussy, O.: *Poromechanics*. John Wiley & Sons, Ltd., England, 2004, ISBN 0-470-84920-7.
- [13] Aubertin, M., LI, L.: *A porosity-depend inelastic criterion for engineering materials*. *International Journal of Plasticity*, 20, 2004, str.2179-2208
- [14] Kutílek, M.: *Vlhkost pórovitých materiálů*. Nakladatelství technické literatury SNTL, Brno, 1984.
- [15] Kumar, R., Bhattacharjee, B.: *Porosity, pore size distribution and in situ strength of concrete* *Cement and Concrete Research*, 33, 2003, str. 155- 164
- [16] Jirasek, M., Zeman, J.: *Přetváření a porušování materiálů: Dotvarování, Plasticita, Lom a Poškození*, nakladatelství ČVUT, Praha, 2010, ISBN 978-80-01-03555-9
- [17] Chen., L, Rougelot, D., Chen, D., Chao, F. J.: *Poroplastic damage modeling of unsaturated cement-based materials* *Mechanics Research Communacition*, 36, 2009, str. 906-915
- [18] Pogorzelski, J., Urban, L.: *Plynobetony a plynosilikáty ve stavebnictví*, Nakladatelství technické literatury SNTL, Praha, 1962
- [19] Servít, R., Doležalová, E., Crha, M.: *Teorie pružnosti a plasticity I*. Státní, Praha, 1992
- [20] Servít, R., Drahoňovský, Z., Šejnoha, J., Kufner, V.: *Teorie pružnosti a plasticity II*. Státní, Praha, 1984, ISBN 80-01-00855-X
- [21] *Aerogel* [online], poslední aktualizace 4. listopadu 2012 [cit. 14. 11. 2012], Wikipedie. Dostupné z WWW: <http://cs.wikipedia.org/wiki/Aerogel>;
- [22] *Code-Aster programový balík numerické výpočty pomocí MKP* [online], poslední aktualizase 4. listopadu 2012 [cit. 14. 11. 2012], Wikipedie. Dostupné z WWW: <http://www.code-aster.org>;

## Seznam obrázků

1	Schématické zobrazení matrice, pórů a celého elementu materiálu . . . . .	14
2	Komerčně dostupné stavební pórovité materiály (cihla plná, cihelný blok, šedý a bílý pórobeton) . . . . .	16
3	Zobrazení 20x zvětšeného pórobetonu na výbrusu a na zlomu . . . . .	16
4	Pěnové sklo FORMGLASS, expandovaný polystyren . . . . .	17
5	Pevnost v tlaku cementové pasty závislosti na pórovitosti dle [15] . . . . .	19
6	Pevnost v tlaku betonu závislosti na pórovitosti dle [2] . . . . .	19
7	Pevnost v tlaku pěnobetonu závislosti na pórovitosti dle [2] . . . . .	20
8	Vlké zdivo z důvodu vzlínivosti od podloží . . . . .	21
9	Pružno-plastické chování materiálu . . . . .	29
10	Cam-Clay podmínka v zatěžovací deviatorické rovině . . . . .	31
11	Chování materiálu při isotropním stlačování . . . . .	32
12	Podmínka MSDPu v prostoru a řezu [13] . . . . .	33
13	Vliv parametru $x_1$ na tvar křivky . . . . .	35
14	Vliv parametru $x_2$ na tvar křivky . . . . .	35
15	Srovnání křivek Balshinovy a MSDPu . . . . .	36
16	Isoparametrický čtyřuzlový prvek . . . . .	38
17	Příčková porobetonová tvarovka Porfix . . . . .	42
18	Uchycení hranolu v lisu se snímačem na jedné stěně . . . . .	43
19	Deformační diagramy nezabroušených hranolů (snímač na jedné stěně) . . . . .	44
20	Rozštípnutí vlivem špatné rovinnosti tlačné plochy a vznik smykové plochy . . . . .	45
21	Uchycení hranolu v lisu s pružinovým systémem snímače . . . . .	45
22	Deformační diagram porobetonu . . . . .	46
23	Diagramy zkoušení suchého pórobetonu na krychlích . . . . .	46
24	Odtrhový přístroj . . . . .	47
25	Principl metody Newton-Rapson . . . . .	50
26	Idealizovaný deformační diagram (elasto-plastický bez zpevnění) . . . . .	51
27	Jednoduchá stěna zatížená po celé délce (vlevo) a částečně (vpravo) . . . . .	52
28	Jednoduchá stěna částečně (vlevo) a úplně nasáklá (vpravo) . . . . .	52
29	Stěna s okny a meziokenním pilířem . . . . .	53
30	Stěna s okny a meziokenním pilířem nasáklá vlhkostí ve své spodní části . . . . .	53

31	Napětí $\sigma_y$ při lokálním zatížení suché stěny . . . . .	55
32	Napětí $\sigma_y$ při lokálním zatížení do poloviny násáklé stěny . . . . .	55
33	Napětí $\sigma_y$ při lokálním zatížení úplně násáklé stěny . . . . .	55
34	Napětí $\sigma_x$ při lokálním zatížení suché stěny . . . . .	56
35	Napětí $\sigma_x$ při lokálním zatížení do poloviny násáklé stěny . . . . .	56
36	Napětí $\sigma_x$ při lokálním zatížení úplně násáklé stěny . . . . .	56
37	Poměrné přetvoření $\varepsilon_y$ při lokálním zatížení suché stěny . . . . .	57
38	Poměrné přetvoření $\varepsilon_y$ při lokálním zatížení do poloviny násáklé stěny . . . . .	57
39	Poměrné přetvoření $\varepsilon_y$ při lokálním zatížení úplně násáklé stěny . . . . .	57
40	Poměrné přetvoření $\varepsilon_x$ při lokálním zatížení suché stěny . . . . .	58
41	Poměrné přetvoření $\varepsilon_x$ při lokálním zatížení do poloviny násáklé stěny . . . . .	58
42	Poměrné přetvoření $\varepsilon_x$ při lokálním zatížení úplně násáklé stěny . . . . .	58
43	Napětí $\sigma_y$ celé zatížené suché stěny . . . . .	59
44	Napětí $\sigma_y$ celé zatížené do poloviny násáklé stěny . . . . .	59
45	Napětí $\sigma_y$ celé zatížené úplně násáklé stěny . . . . .	59
46	Napětí $\sigma_x$ celé zatížené suché stěny . . . . .	60
47	Napětí $\sigma_x$ celé zatížené do poloviny násáklé stěny . . . . .	60
48	Napětí $\sigma_x$ celé zatížené úplně násáklé stěny . . . . .	60
49	Poměrné přetvoření $\varepsilon_y$ celé zatížené suché stěny . . . . .	61
50	Poměrné přetvoření $\varepsilon_y$ celé zatížené do poloviny násáklé stěny . . . . .	61
51	Poměrné přetvoření $\varepsilon_x$ celé zatížené suché stěny . . . . .	62
52	Poměrné přetvoření $\varepsilon_x$ celé zatížené do poloviny násáklé stěny . . . . .	62
53	Napětí $\sigma_y$ suchá stěna . . . . .	63
54	Napětí $\sigma_y$ násáklá stěna . . . . .	63
55	Napětí $\sigma_x$ suchá stěna . . . . .	63
56	Napětí $\sigma_x$ násáklá stěna . . . . .	64
57	Poměrné přetvoření $\varepsilon_y$ suchá stěna . . . . .	64
58	Poměrné přetvoření $\varepsilon_y$ násáklá stěna . . . . .	64
59	Poměrné přetvoření $\varepsilon_x$ suchá stěna . . . . .	65
60	Poměrné přetvoření $\varepsilon_x$ násáklá stěna . . . . .	65
61	Napětí $\sigma_y$ do poloviny násáklá stěna . . . . .	66
62	Napětí $\sigma_y$ úplně násáklá stěna . . . . .	66

63	Napětí $\sigma_x$ do poloviny nasáklá stěna . . . . .	67
64	Napětí $\sigma_x$ úplně nasáklá stěna . . . . .	67
65	Poměrné přetvoření $\varepsilon_y$ do poloviny nasáklá stěna . . . . .	68
66	Poměrné přetvoření $\varepsilon_y$ úplně nasáklá stěna . . . . .	68
67	Poměrné přetvoření $\varepsilon_x$ do poloviny nasáklá stěna . . . . .	69
68	Poměrné přetvoření $\varepsilon_x$ úplně nasáklá stěna . . . . .	69
69	Napětí $\sigma_y$ do poloviny nasáklá stěna . . . . .	70
70	Napětí $\sigma_y$ úplně nasáklá stěna . . . . .	70
71	Napětí $\sigma_x$ do poloviny nasáklá . . . . .	71
72	Napětí $\sigma_x$ úplně nasáklá stěna . . . . .	71
73	Poměrné přetvoření $\varepsilon_y$ do poloviny nasáklá stěna . . . . .	72
74	Poměrné přetvoření $\varepsilon_y$ úplně nasáklá stěna . . . . .	72
75	Poměrné přetvoření $\varepsilon_x$ do poloviny nasáklá stěna . . . . .	73
76	Poměrné přetvoření $\varepsilon_x$ úplně nasáklá stěna . . . . .	73
77	Napětí $\sigma_y$ nasáklá stěna . . . . .	74
78	Napětí $\sigma_y$ nasáklá stěna . . . . .	74
79	Poměrné přetvoření $\varepsilon_x$ nasáklá stěna . . . . .	75
80	Poměrné přetvoření $\varepsilon_y$ nasáklá stěna . . . . .	75
81	Napětí $\sigma_y$ do poloviny nasáklá stěna . . . . .	76
82	Napětí $\sigma_y$ úplně nasáklá stěna . . . . .	76
83	Napětí $\sigma_x$ do poloviny nasáklá stěna . . . . .	77
84	Napětí $\sigma_x$ úplně nasáklá stěna . . . . .	77
85	Poměrné přetvoření $\varepsilon_y$ do poloviny nasáklá stěna . . . . .	78
86	Poměrné přetvoření $\varepsilon_y$ úplně nasáklá stěna . . . . .	78
87	Poměrné přetvoření $\varepsilon_x$ do poloviny nasáklá stěna . . . . .	79
88	Poměrné přetvoření $\varepsilon_x$ úplně nasáklá stěna . . . . .	79
89	Napětí $\sigma_y$ do poloviny nasáklá stěna . . . . .	80
90	Napětí $\sigma_y$ do poloviny nasáklá stěna . . . . .	80
91	Poměrné přetvoření $\varepsilon_x$ do poloviny nasáklá stěna . . . . .	81
92	Poměrné přetvoření $\varepsilon_y$ do poloviny nasáklá stěna . . . . .	81

## Seznam tabulek

1	Regresní vztahy získané pro běžný beton, cementovou pastu a pěnobeton .	18
2	Souřadnice bodů a váhové koeficienty Gaussovy kvadratury . . . . .	41
3	Změřené a vypočtené moduly pružnosti pro suchý a nasáklý pórobeton . .	47