

Oldřich SUCHARDA¹, Jiří BROŽOVSKÝ²

VLIV VYBRANÝCH PARAMETRŮ NELINEÁRNÍ ANALÝZY BETONOVÝCH KONSTRUKCÍ

EFFECT OF SELECTED PARAMETERS OF NON-LINEAR ANALYSIS
OF CONCRETE STRUCTURES

Abstrakt

Příspěvek se zabývá srovnáním numerických výpočtů s experimentem pro různé parametry počáteční podmínky plasticity u fyzikálně nelineární analýzy. Dále se příspěvek zabývá ověřením vlivu geometrické nelinearity dle teorie 2. řádu a vlastní tíhy konstrukce na výpočet. Použitý konstitutivní model betonu kombinuje Chen-Chenovu podmínku plasticity a model zpevnění vypracovaný Ohtanim. Modelovaným experimentem zvoleným pro parametrickou studii je železobetonový nosník, který je zatížen dvěma silami.

Klíčová slova

Nosník, železobeton, podmínka plasticity, vlastní tíha, nelineární analýza.

Abstract

The paper deals with a comparison of numerical calculations with experiment for different parameters of initial plasticity conditions by non-linear analysis. The paper also deals with a verification of the geometric non-linearity effect as per the theory of 2nd order and structural weight. The used constitutive model combines Chen-Chen condition of plasticity and Ohtani concept of hardening. The modelled experiment chosen for parametric study is reinforced concrete beam which is loaded by two forces.

Keywords

Beam, reinforced concrete, plasticity condition, structural weight, non-linear analysis.

1 ÚVOD

U nelineární analýzy železobetonových konstrukcí existuje celá řada faktorů, které mohou ovlivnit výsledky. Mezi tyto faktory také patří vliv geometrické nelinearity a vlastní tíhy konstrukce. U pružnoplastické analýzy betonových konstrukcí [3] jsou to zase parametry počáteční podmínky plasticity. Předložený článek se zabývá vlivem uvedených faktorů u železobetonového nosníku s obdélníkovým průřezem, který je zatížen dvěma silami. Důvodem je, že geometrická nelinearita, případně vliv vlastní tíhy se při analýzách často zanedbává [9]. Parametry počáteční podmínky plasticity betonu zase nejsou velmi často dostupné z dat experimentu nebo informací z výroby betonu. Parametry podmínky plasticity jsou meze plasticity pro jednoosý tah a tlak a dvojosý tlak, které se vyjadřují nejčastěji pomocí smluvních hodnot z pevnostních charakteristik betonu.

¹ Ing. Oldřich Sucharda, Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava-Poruba, tel.: (+420) 597 321 391, e-mail: oldrich.sucharda@vsb.cz.

² Doc. Ing. Jiří Brožovský, Ph.D., Katedra stavební mechaniky, Fakulta stavební, VŠB-Technická univerzita Ostrava, Ludvíka Podéště 1875/17, 708 33 Ostrava-Poruba, tel.: (+420) 597 321 321, e-mail: jiri.brozovsky@vsb.cz.

Pro numerické analýzy je zvolena metoda konečných prvků, která patří k nejznámějším numerickým metodám pro analýzu stavebních konstrukcí. Konkrétně jsou zvoleny rovinné výpočetní modely a izoparametrický čtyřuzlový konečný prvek [15]. Pro výztuž je zvolen model rozetřené výztuže [18].

2 PRUŽNOPLASTICKÝ MODEL BETONU

Pro nelineární analýzu u železobetonových konstrukcí existuje řada konstitutivních modelů [1, 3, 5, 8, 21, 22]. Zvolený konstitutivní model betonu kombinuje Chen-Chenovu podmínku plasticity [2] a model zpevnění vypracovaný Ohtaním [10]. Chen-Chenova podmínka plasticity [3] byla formulována speciálně pro beton na základě experimentů prováděných mj. Kupferem [6]. Uvedený konstitutivní model betonu je implementován v software BSA (Building and Structural Analysis) vyvíjeném na VŠB-TU Ostrava [17, 19]. Chen-Chenova podmínka plasticity [2] je definována pomocí mezí plasticity materiálu v jednoosém tlaku f_{yc} , mezi plasticity ve dvojosém tlaku f_{ybc} a mezi plasticity v jednoosém tahu f_{yt} .

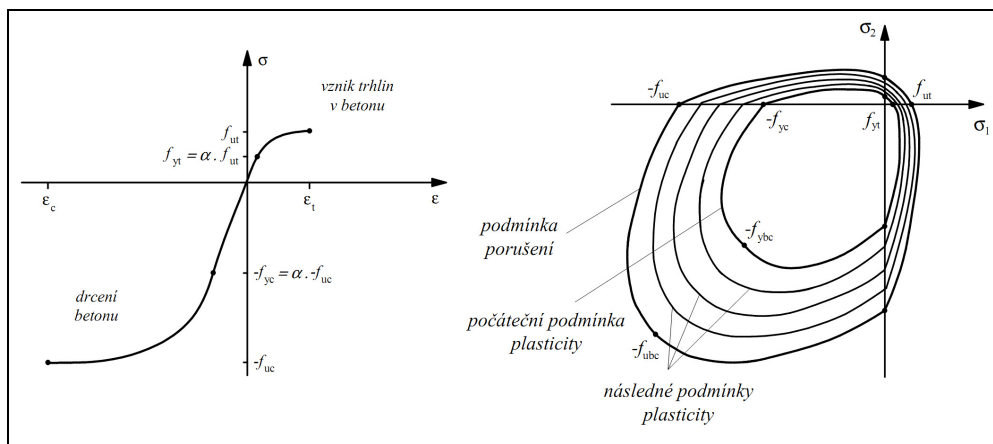
Pro použití konstitutivního modelu betonu je také nutné definovat podmínku porušení, která se získá z pevnosti betonu v jednoosém tlaku f_{uc} , pevnosti betonu v dvojosém tlaku f_{ubc} a pevností betonu v jednoosém tahu f_{ut} . Mez plasticity materiálu se může následně vyjádřit pomocí koeficientu α pro jednotlivé způsoby namáhání jako:

$$f_{yc} = \alpha f_{uc}, \quad (1)$$

$$f_{ybc} = \alpha f_{ubc}, \quad (2)$$

$$f_{yt} = \alpha f_{ut}. \quad (3)$$

Koeficient α může nabývat hodnot 0 až 1. Hodnoty koeficientu α se nejčastěji volí od 0,3 [3] až 0,5 [17]. Parametrická studie je provedena pro čtyři vybrané hodnoty koeficientu α . Počáteční plocha plasticity, následné plochy plasticity a plocha porušení jsou zobrazeny v rovině hlavních napětí na obr. 1. Na obrázku je také zobrazen pracovní diagram betonu.



Obr. 1: Pracovní diagram betonu a Chen-Chenova podmínka plasticity (porušení)

3 IMPLEMENTACE VLIVU GEOMETRICKÉ NELINEARITY DLE TEORIE 2. ŘÁDU DO VÝPOČTU METODOU KONEČNÝCH PRVKŮ

Při analýze železobetonových nosníků zatížených příčným zatížením převažuje ve většině případů vliv fyzikální nelinearity nad geometrickou. Často se proto vliv geometrické nelinearity zanedbává [9]. Pro ověření vlivu geometrické nelinearity je ve vyvíjeném programu BSA upraven výpočetní algoritmus, aby respektoval teorii 2. řádu. Výpočetní postup řešení soustavy nelineárních rovnic je opět řešen přírůstovým postupem [13, 14]. V teorii 2. řádu se podmínky rovnováhy sestavují v uzlech výpočetního modelu deformované konstrukce [20].

Pro rovnovážný stav platí:

$$\mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int} = \mathbf{0} \quad (4)$$

kde: \mathbf{f}_{ext} – je vektor externích (vnějších) sil a
 \mathbf{f}_{int} – je vektor vnitřních sil.

U geometricky nelineárního výpočtu se matice tuhosti konstrukce změní vlivem deformace od zatížení:

$$\mathbf{K}' = \mathbf{K}(\mathbf{u}). \quad (5)$$

Rovnovážný stav již přestane platit a vznikne vektor reziduí:

$$\mathbf{f}_{ext} - \mathbf{f}_{int} = \mathbf{r} \quad (6)$$

Přírůstek deformace $\Delta\mathbf{a}$ od vzniklého vektoru reziduí se vyřeší rovnicí:

$$\mathbf{K}'\Delta\mathbf{a} = \mathbf{r} \quad (7)$$

Výsledný vektor deformace $\tilde{\mathbf{u}}$ je:

$$\tilde{\mathbf{u}} = \mathbf{u} + \Delta\mathbf{a}, \quad (8)$$

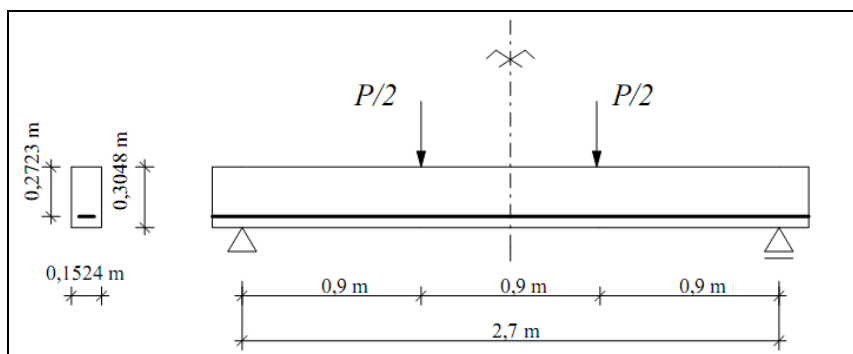
kde: \mathbf{u} – je vektor deformace od vnějšího zatížení a

$\Delta\mathbf{a}$ – je vektor přírůstku deformace od vlivu geometrické nelinearity.

Uvedený výpočetní postup se v přírůstkovém řešení rozloží do více kroků. Samotná implementace teorie 2. řádu spočívá v aktualizaci geometrie výpočetního modelu konstrukce pro každý zatěžovací krok nebo iteraci.

4 STUDIE VLIVU PARAMETRŮ POČÁTEČNÍ PODMÍNKY PLASTICITY

Modelovaným experimentem zvoleným pro studii parametrů počáteční podmínky plasticity je železobetonový nosník, který je zatížen dvěma silami. Zvolený experiment provedli a publikovali Gaston, Siess, and Newmark [4]. Podklady z provedeného experimentu jsou převzaty z publikace [7]. Schéma experimentu je zobrazeno na obr. 2.



Obr. 2: Schéma experimentu

Železobetonový nosník je z betonu, který má pevnost v tlaku 32,3 MPa. Modul pružnosti betonu E_c je 27,1 GPa a Poissonův součinitel 0,17. Protože pevnost betonu v tlaku a modul pružnosti mají nízkou korelaci pro obvyčejné betony, pevnost betonu v tahu se určila na základě doporučení [12]:

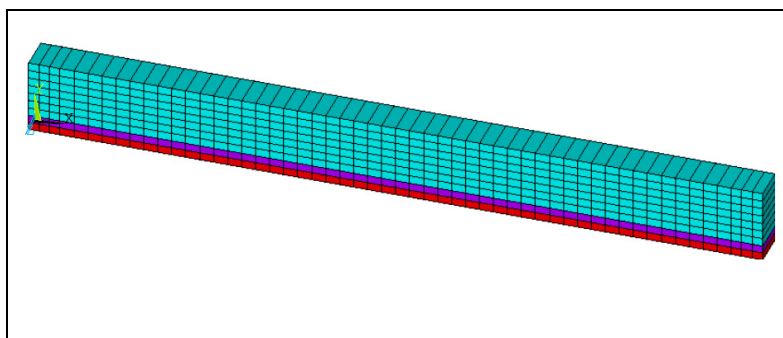
$$f_{ut} = 0,3(0,7f_{uc}^{(2/3)}), \quad (9)$$

kde f_{uc} je pevnost betonu v tlaku.

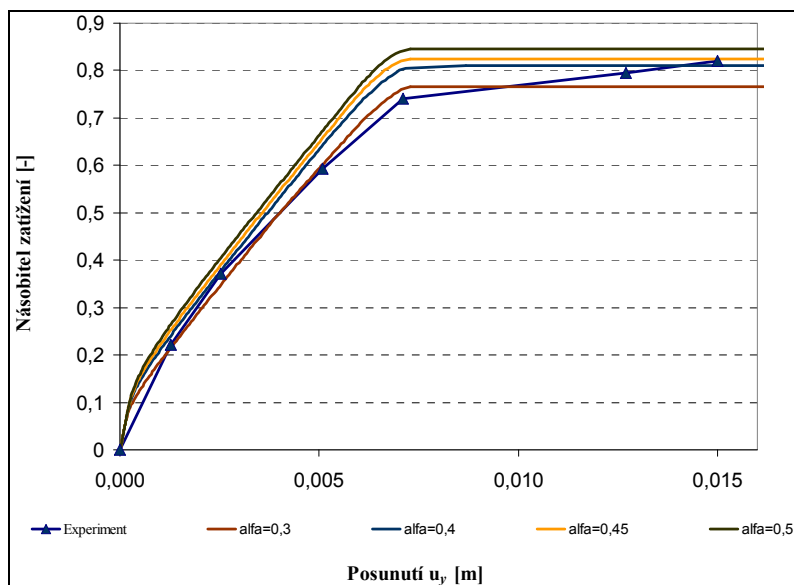
Pevnost betonu ve dvousém tlaku byla stanovena:

$$f_{ubc} = 1,2 f_{uc} \quad (10)$$

Výpočet je proveden postupně pro koeficient α s hodnotou 0,3, 0,4, 0,45 a 0,5, který se použil k výpočtu parametrů (1), (2), (3) počáteční podmínky plasticity. Stupeň vyztužení ρ železobetonového průřezu vztahený k efektivní výšce průřezu je 0,0062. Pracovní diagram výztuže se předpokládá ideálně pružnoplastický. Mez kluzu oceli f_y je 323,6 MPa a modul pružnosti E_s je 198,0 GPa. Výpočetní model je pro výpočet rovinný. Pro názornost je vizualizace výpočetního modelu provedena prostorově v preprocesoru výpočetního systému ANSYS [16] a zobrazen na obr. 3.



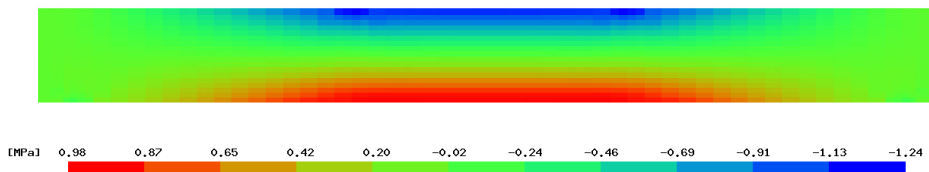
Obr. 3: Výpočetní model



Obr. 4: Výsledky výpočtu

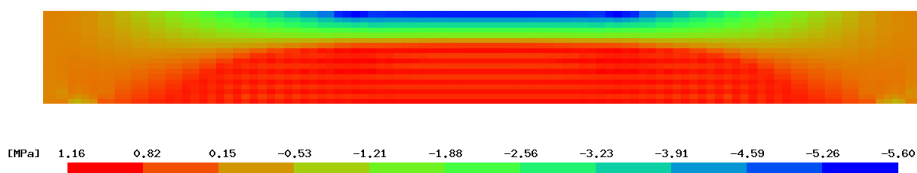
Porovnáním experimentu a výsledků numerických výpočtů je možné konstatovat, že ve většině výpočtů je mírně nadhodnocena počáteční tuhost výpočetního modelu. Pouze u výpočtu pro $\alpha = 0,30$ je tuhost výpočetního modelu mírně podhodnocená. Dále je při zatěžování rozdíl pracovních diagramů numerických výpočtů a experimentu malý. Celkový průběh pracovního diagramu experimentu a maximální únosnost nosníku nejlépe vystihuje výpočet pro $\alpha = 0,45$. Dobrou shodu celkového průběhu pracovního diagramu experimentu má také výpočet pro $\alpha = 0,40$. Pro ilustraci

provedených výpočtů jsou na obr. 5–7 uvedeny výsledky výpočtu normálového napětí pro $\alpha = 0,45$. Obrázky zobrazují počáteční stav rozvoje plastické oblasti v tažené oblasti a stav, kdy dochází ke koncentraci tlaku na horním okraji. Další zatěžování vede k plastizaci výztuže a drcení betonu a ukončení výpočtu.



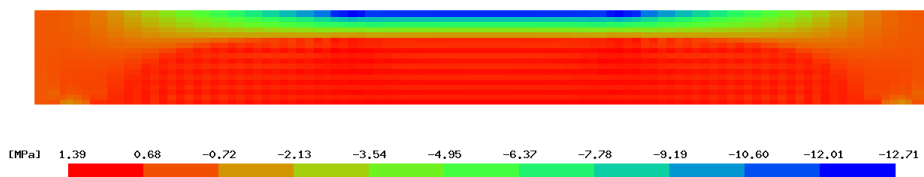
Obr. 5: Normálové napětí σ_x během zatěžování [MPa]

Násobitel zatížení = 0,10 (Max = 0,98 MPa; Min = -1,24 MPa)



Obr. 6: Normálové napětí σ_x během zatěžování [MPa]

Násobitel zatížení = 0,30 (Max = 1,16 MPa; Min = -5,60 MPa)



Obr. 7: Normálové napětí σ_x během zatěžování [MPa]

Násobitel zatížení = 0,62 (Max = 1,39 MPa; Min = -12,71 MPa)

5 VLIV TEORIE 2. ŘÁDU NA VÝPOČET

Následující analýza se zabývá vlivem teorie 2. řádu u nosníku z předešlé parametrické studie. Pro další výpočty je zvolen u počáteční podmínky plasticity koeficient $\alpha = 0,45$.

Při analýze běžných železobetonových konstrukcí namáhaných především ohybem převažuje ve většině případů vliv fyzikální nelinearity nad geometrickou. Často se proto vliv geometrické nelinearity zanedbává [9]. Pro ověření vlivu geometrické nelinearity je ve vyvíjeném programu BSA upraven výpočetní algoritmus, který je založen na použití metody Newton-Raphson [14]. Pro zvolený typ geometrické nelinearity se předpokládají malé deformace.

Pro geometrickou nelinearitu je konkrétně použitý postup dle teorie 2. řádu, kdy se podmínky rovnováhy sestavují v uzlech výpočetního modelu deformované konstrukce. Samotná implementace teorie 2. řádu spočívá v aktualizaci geometrie výpočetního modelu konstrukce pro každý zatěžovací krok nebo iteraci. Podobný postup úpravy geometrie výpočetního modelu konstrukce je také použit ve výpočetním programu ATENA [11].

Výpočty z výpočetního programu BSA jsou doplněny o výsledky z programů SCIA [20], ATENA [11] a ANSYS [16]. V alternativních programech je proveden výpočet pouze pro geometrickou nelinearitu a fyzikálně lineární výpočet. U výpočtu byl sledován průhyb uprostřed rozpětí. Je provedeno pět variant výpočtů. Jejich rozdělení uvádí tabulka 1.

Tab. 1: Parametry výpočtu a výpočetní programy

Výpočty	Parametry výpočtu			Výpočetní programy			
	geom. nelinearita	vlastní tíha konstrukce	fyzikální nelinearita	BSA	SCIA	ANSYS	ATENA
Výpočet 1	ne	ne	ne	ano	ano	ano	Ano
Výpočet 2	ano	ne	ne	ano	ano	ano	Ano
Výpočet 3	ne	ne	ano	ano	ne	ne	Ne
Výpočet 4	ano	ne	ano	ano	ne	ne	Ne
Výpočet 5	ano	ano	ano	ano	ne	ne	Ne

U výpočtu v programu BSA je do tuhosti výpočetního modelu konstrukce zahrnuta také výztuž. V programu ANSYS [16] jsou v nelineárním řešiči výpočtu nastaveny velké deformace.

Protože výsledky lineárního výpočtu se mírně odlišují pro jednotlivé programy, byl sledován poměr maximálních deformací:

$$u_1 = \frac{u_{geo.nelin.}}{u_{geo.lin.}} [-] \quad (11)$$

a rozdíl maximálních deformací:

$$u_2 = u_{geo.nelin.} - u_{geo.lin.} [m], \quad (12)$$

kde:

$u_{geo.nelin.}$ – je svislá deformace pro geometricky nelineární výpočet [m] a

$u_{geo.lin.}$ – je svislá deformace pro geometricky lineární výpočet [m].

Rozdíl maximálních svislých deformací u_2 pro všechny výpočetní programy je 2.10^{-6} m. Poměr maximálních deformací u_1 pro svislý průhyb uprostřed rozpětí nosníku pro geometricky lineární a nelineární výpočet v programech BSA, SCIA [20], ANSYS [16] a ATENA [11] je uveden v tabulce 2. Fyzikální nelinearita není zahrnuta do výpočtu. Jsou použity výpočty 1 a 2.

Tab. 2: Poměr deformací u_1 pro geometricky nelineární a lineární výpočet

Výpočetní program	BSA	SCIA	ANSYS	ATENA
$u_1 [-]$	1,0008410	1,0009528	1,0009040	1,0008610

Další výpočty se prováděly pouze v programu BSA. Ve výpočtech byla vždy zahrnuta fyzikální nelinearita. Poměr deformací u_1 u geometricky lineárního a nelineárního výpočtu v programu BSA pro vybrané hodnoty násobitele zatížení uvádí tab. 3. Ve výpočtu se vlastní tíha konstrukce neuvážovala. Jsou použity výpočty 3 a 4. Maximální dosažená hodnota násobitele zatížení pro výpočet 4 byla 0,83.

Tab. 3: Poměr deformací u_1 pro geometricky nelineární a lineární výpočet – program BSA

Násobitel zatížení	0,3	0,6	0,8
$u_1 [-]$	1,000281	1,000868	1,001593

6 VLIV VLASTNÍ TÍHY KONSTRUKCE NA VÝPOČET

Pro ověření vlivu vlastní tíhy konstrukce byl proveden nelineární výpočet v programu BSA. Pro výpočet vlastní tíhy konstrukce nosníku se uvažovalo s objemovou hmotností betonu 2500 kg/m³ a oceli 7850 kg/m³. Srovnávané výpočty zahrnovaly fyzikální nelinearitu. U výpočtu zahrnující pouze zatížení nebyla geometrická nelinearita zahrnuta. U výpočtu zahrnující zatížení a vlastní tíhu konstrukce byla geometrická nelinearita zahrnuta. Podobně jako v předešlém výpočtu se určil poměr maximálních deformací:

$$u_3 = \frac{u_{vl.tiha+zatižení}}{u_{zatižení}} [-], \quad (13)$$

kde:

$u_{vl.tiha+zatižení}$ – je svislá deformace od vlastní tíhy konstrukce a zatížení [m] a

$u_{zatižení}$ – je svislá deformace od zatížení [m].

Poměr deformací u_3 pro svislý průhyb uprostřed rozpětí nosníku vypočtený v programu BSA pro vybrané hodnoty násobitele zatížení uvádí tab. 4. Jsou použity výpočty 3 a 5. Maximální dosažená hodnota násobitele zatížení pro výpočet 5 byla 0,80. Průběhy pracovních diagramů svislého průhybu uprostřed rozpětí nosníku se u výpočtu 3 a 5 odlišovaly do 5,0 %, pouze hodnota pro násobitel zatížení 0,8 byla 6,44 %.

Tab. 4: Poměr deformací u_3 pro geometricky nelineární a lineární výpočet – program BSA

Násobitel zatížení	0,3	0,6	0,8
$u_3 [-]$	1,038484	1,032328	1,064438

7 ZÁVĚR

Příspěvek se zabývá volbou parametrů počáteční podmínky plasticity u pružnoplastické analýzy železobetonových konstrukcí. Postupně je provedena parametrická studie pro čtyři hodnoty koeficientu α . Za jeden z nevhodnějších koeficientů α pro počáteční podmínku plasticity je hodnota 0,45, kdy ta je shodná s doporučením [12].

Dále se příspěvek zabýval vlivem geometrické nelinearity a vlastní tíhy konstrukce u pružnoplastické analýzy. Geometrická nelinearita byla zahrnuta do výpočtu dle teorie druhého řádu. U provedených výpočtů byl pro nosník s obdélníkovým průřezem zatíženým dvěma silami vliv geometrické nelinearity v řádech maximálně jednotek promile. U výpočtu zohledňující také vlastní tíhu konstrukce byl vliv u konkrétních hodnot pracovního diagramu do 6,44 %.

PODĚKOVÁNÍ

Projekt byl realizován za finanční podpory ze státních prostředků České republiky prostřednictvím Studentské grantové soutěže v rámci specifického výzkumu na Vysoké škole báňské – Technické univerzitě Ostrava. Registrační číslo projektu je SP2012/94.

LITERATURA

- [1] ČERVENKA, J., PAPANIKOLAOU, V.,K. *Three dimensional combined fracture – plastic material model for concrete*. Int J Plasticity. 2008, 24, 12, pp. 2192–2220, ISSN 0749-6419.
- [2] CHEN, A. C. T., CHEN, W. F. *Constitutive Relations for Concrete*. Journal of the Engineering Mechanics Division ASCE, 1975.
- [3] CHEN, W. F. *Plasticity in Reinforced Concrete*. Mc. New York: Graw Hill, 1982.

- [4] GASTON JR, SIESS CP, NEWMARK NM. A layered finite element non-linear analysis of reinforced concrete plates and shells. Civil Engineering Studies, SRS No. 389, Univ. of Illinois, Urbana, 1972.
- [5] KRÁLIK, J, KRÁLIK, J. Seismic analysis of reinforced concrete frame-wall systems considering ductility effects in accordance to Eurocode. Engineering Structures. 2009, roč. 31, č. 12, str. 2865-2872. ISSN 0141-0296.
- [6] KUPFER H., HILSDORF H., K., RÜSCH H. *Behaviour of Concrete Under Biaxial Stress*, Journal ACI, Proc. V. 66, č. 8, 1969.
- [7] KWAK, H., G, KIM, S., P, Bond-slip behavior under monotonic uniaxial loads, Journal Engineering Structures, Vol. 23, Iss.: 3, pp. 298-309, 2001. ISSN 0141-0296.
- [8] MIKOLAŠEK, D., SUCHARDA, O., BROŽOVSKÝ, J. Přístup k modelování a analýze železobetonových konstrukcí. Konstrukce. 2011, roč. 10, č. 5, s. 12-17. ISSN 1213-8762.
- [9] NĚMEC, I., BUČEK J., Metody výpočtu - porovnání různých výpočetních metod, FEM consulting, s.r.o, 2006.
- [10] OHTANI, Y., CHEN, W. F. *Multiple Hardening Plasticity for Concrete Materials*. Journal of the EDM ASCE, 1988.
- [11] Programový systém ATENA 2D: Theory Manual. Praha: Červenka Consulting, 2000.
- [12] PROCHÁZKA, J. a kol. Navrhování betonových konstrukcí 1. 2 vyd. Praha: ČVUT v Praze, 2006. ISBN 80-903807-1-9.
- [13] RAVINGER, J. Modelovanie nelineárneho pôsobenia železobetonového nosníka použitím MKP. Stavebnický časopis. 35, 1987-8, 571-589.
- [14] RAVINGER, J. Programy – statika, stabilita a dynamika stavebných konštrukcií. Alfa, Bratislava, 1990.
- [15] ROMBACH, G. *Anwendung der Finite-Elemente-Methode im Betonbau*. 2. Auflage. Berlin: Ernst & Sohn, 2007. ISBN 978-3-433-01701-2.
- [16] RELEASE 11 DOCUMENTATION FOR ANSYS, SAS IP, INC., 2007
- [17] SUCHARDA, O., BROŽOVSKÝ, J. Pružnoplastické modelování železobetonového nosníku: implementace a srovnání s experimentem. Sborník vědeckých prací VŠB-TUO, řada stavební. 2011, roč. 11, č. 1, s. 237-244. ISSN 1213-1962.
- [18] SUCHARDA, O., BROŽOVSKÝ, J. Modely betonářské výztuže pro konečněprvkovou analýzu konstrukcí. *Sborník vědeckých prací VŠB-TUO, řada stavební*, 2011, roč. 11, č. 2, s. 249-258. ISSN 1213-1962.
- [19] SUCHARDA, O., BROŽOVSKÝ, J. Dílčí výzkumná zpráva CIDEAS za rok 2011 Analýza železobetonových konstrukcí využívají fyzikálně nelineární chování materiálu. (1.1.3.1), MŠMT ČR, registrační číslo projektu 1M0579.
- [20] *Scia Engineer* [online]. 2012 [cit. 2012-01-01]. Dostupný z WWW: <<http://www.scia-online.com>>.
- [21] VESELÝ, V., FRANTÍK, P., VODÁK, O., KERŠNER, Z., Lokalizace průběhu porušování v betonových vzorcích stanovená pomocí akustické a elektromagnetické emise a numerických simulací. *Sborník vědeckých prací VŠB-TUO, řada stavební*, 2011, roč. 11, č. 2, s. 269-278. ISSN 1213-1962.
- [22] VECCHIO, F., J., BUCCI, F., Analysis of Repaired Reinforced Concrete Structures, ASCE J. of Structural Engineering, vol. 125, No. 6, pp. 644-652, 1999.

Oponentní posudek vypracoval:

Prof. Ing. Alois Materna, CSc., MBA, ČKAIT, Brno.

Doc. Ing. Eva Kormaníková, PhD., Katedra stavební mechaniky, Stavební fakulta, TU v Košiciach.