

中国古代军事中的计和算^{*}

——以开方术在布营中的运用为例

杨涤非, 邹大海

(中国科学院自然科学史研究所, 北京 100190)

摘要: 中国古代军事家对数学在军事上的具体运用是十分重视的。《孙子》中“计”和“庙算”等概念,反映了古代军事家在进行军事运筹活动时十分重视运用具体精密的定量分析方法。《武编》中的下营算法则提供了较复杂的数学方法应用于军事的一个实例。下营算法不仅反映了军事活动中对准确计算的要求,而且表明在保证准确的前提下,通过在一定程度上降低精度来简化计算、提高效率也是同样重要的。因此,在计算精度和计算效率不能兼顾时,保持二者的平衡可能是军事数学知识的一个特点。

关键词: 古代军事; 计; 算; 宿营; 开方

中图分类号: E29 **文献标识码:** A **文章编号:** 1673-8462(2014)02-0015-06

0 引言

战争是一种始终与人类社会相伴随的剧烈的暴力活动。在中国古代人们常引用《左传》成公十三年刘子之语“国之大事,在祀与戎”,把祭祀祖先或天地神灵与开展军事行动并列为国家最重要的两种大事。战争是生死攸关的紧张、激烈的活动,要求在战前有准确的情报和缜密的计划,战时有切实的实施和快速的机变,而战后也需要认真的总结和稳妥的善后。这显然需要最讲究精确性的数学作为支撑。但是,学术界对古代军事与数学的关系往往语焉不详,给人的印象,似乎古代的军事与数学关系不大。对这一问题做全面的论述是一个很大的课题,非一二篇文章所能论定。笔者只通过一些材料说明,古代兵家重视军事与数学的关系,甚至会用到当时比较高级的数学方法。

1 兵家对数学应用于军事的重视

中国古代最重要的兵学著作要属《孙子》了。该书开宗明义的首篇名曰《计》。^①“计”的本义是总计、计算,另一个常见的意思是谋划(动词)、计谋(名词)。后者恐怕还是从前者引申而来的。

《计》篇云“兵者,国之大事,死生之地,存亡之道,不可不察也。故经之以五事,校之以计,而索其情:一曰道,二曰天,三曰地,四曰将,五曰法。”“故校之以计,而索其情,曰:主孰有道?将孰有能?天地孰得?法令孰行?兵众孰强?士卒孰练?赏罚孰明?吾以此知胜负矣。”^{[1]29-30}作者在《计》篇两次提到“校之以计,而索其情”,意即要用“计”的方法来检验、考察,进而弄清楚各种相关的情况。关于“计”字的涵义,历来有不同的理解。第一种解释是曹操所注《孙子》中的意见,认为文中的“计”是“七计”,也就是下文所述的“主孰有道”等七个方面。第二种解释

* 收稿日期: 2014-02-20.

作者简介: 杨涤非(1977-),男,江苏无锡人,中国科学院自然科学史研究所在读博士生。邹大海(1965-),男,湖南新化人,中国科学院自然科学史研究所研究员、博士生导师。

① 银雀山汉墓竹简本作“计”,传世本作“始计”,李零推测指出“始”字是后人据兵家“先计而后战”的说法增加的;今本作“故策之而知得失之计”,李零《吴孙子发微》正文仍其旧,但注释据银雀山简本《孙子》残文疑“策”、“计”互倒(第70、73页)我们以为可能性更大,今从之。

是杜牧的意见,认为文中的“计”意为计算。^[2]长期以来曹操的意见更为人们所接受,因此“校之以计,而索其情”一语常被理解为通过对敌我双方的“五事”(“道”、“天”、“地”、“将”、“法”)和“七计”(“主孰有道”、“将孰有能”、“天地孰得”、“法令孰行”、“兵众孰强”、“士卒孰练”、“赏罚孰明”)的全面对比和综合考虑来探索战争胜负的情势。

李零和钟少异两位先生等采用后一种意见。李先生把“校之以计而索其情”译为“通过计算,加以核实,弄清情况”。^{[1]34}钟少异先生则有更详细的分析。他指出,从行文来看,“校之以计”是古汉语中很常见的倒装句式,即“以计校之”,意为通过计算进行比较。因此,上文中“校之以计,而索其情”一语,第一次是说对敌我双方“道”、“天”、“地”、“将”、“法”等五个方面的情况,通过计算进行比较,来探索战争胜负的情势;第二次是说,对敌我双方“主孰有道”、“将孰有能”、“天地孰得”、“法令孰行”、“兵众孰强”、“士卒孰练”、“赏罚孰明”这七个方面的情况,通过计算进行比较,来探索战争胜负的情势。孙子在考虑导致战争胜负的因素时,是以具体的、量化的计算为基础的,绝非以前一般认为的大而化之、简单笼统的对比。换言之,孙子是以具体精密的定量分析而非笼统的定性分析来作为判断战争胜负情势的基础。^[3]“计”篇在上述两段文字之后又说“夫未战而庙算胜者,①得算多也;未战而庙算不胜者,得算少也。多算胜少算,而况于无算乎!吾以此观之,胜负见矣。”这里把国家高层对战争的策划称为“庙算”,^{[1]30}其中用算筹表示对战争中有利的因素之评估值或量化单位,^[4]反映了作者心目中量化计算在军事谋划中的重要地位。

不仅如此,孙子在《形》篇还明确提出了“一曰度,二曰量,三曰数,四曰称,五曰胜。地生度,度生量,量生数,数生称,称生胜”的量化分析模式,^{[1]57}度、量、数显然属于数学的范围。在其他各篇中,孙子也阐述了很多对具体作战问题做定量分析的内容,如“虚实”篇中的“故策之而知得失之计”,^{[1]70-73}说明通过数学计算来判断一个军事计划的成败。“作战”篇中提到“凡用兵之法,驰车千驷,革车千乘,带甲十万,千里馈粮,则内外之费,宾客之用,胶漆之材,车甲之奉,日费千金,然后十万之师举矣”,^{[1]36}说明兵法讲究从人员、装备和后勤等诸多方面进行具体的计算,来对战争进行规划。这些都说明了传统兵家在军事运筹中对量化方法和数学知识的应用给予了足够的重视。

古代文献中还提到军事部门中有专门负责计算的人员。如《六韬·龙韬·王翼》云:“(周)武王问太

公曰:王者帅师,必有股肱羽翼,……太公曰:……有股肱羽翼七十二人,……腹心一人,……法算二人,主计会三军营壁、粮食、财用出入”。^[5]这里的“法算”是专职人员,主管计算军队的安营扎寨、城防壁垒和军需、财政中的计算问题。

上文论说了古代兵家重视数学在军事活动中的应用,下文将举例说明,即使比较复杂的数学方法——开方,也在军事上有所应用。

2 精密计算在古代军事中的应用: 《武编》中的下营算法及其分析

宿营是军队在执行任务中必不可少的环节。营不仅是军队驻扎时休息、生活的场所,而且具有防卫功能,甚至在某些情况下需要考虑便于后来的进攻。因此,如何布置宿营地是大有讲究的,需要对营地的地形与位置和营的具体布置方法做出优化,这就需要通过计算进行量化分析。但是在作为中国古代军事学术主要载体的兵书中,有关如何规划、安排宿营地的记载比较少见,具体到如何运用数学方法计算,以帮助安排宿营的记录更是罕见。现在明代兵书《武编》中发现了相关的内容,通过对这条史料的分析,我们可以清晰地看到开方术在中国古代军队宿营中的具体运用,这从一个侧面揭示中国古代数学与军事活动之间的紧密联系。

《武编》前集卷二营制“下营算法”条云:

“方营法:置积数为实,别置一算,为下法,从未常超一位定实。实上商置第一位得数,下法亦置上商,名曰方法。乃命上商除积,至尽而止。不尽,乃倍方法,为廉。于上商之次,续商第二位得数,廉法之次,照上商置隅。以廉、隅二法命上商除积,得尽而止。不尽,乃陪隅法,^②并为廉。又于上商置第三位得数,廉法之次,照上置隅。以廉、隅二法,皆命上商,除积,至尽而止。不尽,如法命之。

若欲为三角营,则取方营积数,倍之,得三角营得积数。布算如方营法,得三角营一面之数。凡三角得方二而一。

若欲为直营,凡直积数,如方则纵横相当,直则纵羨而横减,其所羨与所减亦相当也。既得积数,如准纵也,以为上商,而消息其横之步,以为下法。如准横也,以为上商,而消息其纵之数,以为下法。其布算大略如方营而上下法不齐为异。

若欲为锐营,则取直营积数倍之,如三角营取方

① “算”字原文作“筭”,本段以下各算字同此。

② “陪”通“倍”,或为“倍”之误,下同。

营之数也。既得积数，布算如直营法。凡锐得直二而一。

若欲为圆营，则取方营之积，四乘而三归之，得圆营积数。布算如方营法，得圆营径，三之得其围。凡圆得方四而三。六花营如圆营法。

若欲为偃月营，则取圆营积数陪之，^①或取方营积数八乘而三归之，得偃月营积数。布算如方营法，得偃月弦径，半之得偃月矢径。凡偃月得圆二而一，得方八而三。”^[6]

中国古代的正规军队在作战时都需要布阵。所谓阵，对应的现代军事术语就是战斗队形。阵是为进行战斗将兵力兵器展开所形成的队形。同样的，“止则为营，行则为阵，言营阵同制也”^[7]可见营与阵具有相似之处，营也具有阵的部分功能。军队进行驻扎时，宿营地需要按照不同的地形、地貌和作战需要来布设。在布设宿营地时，通常不仅仅布成常见的方营，还需要根据作战需要和各种地形布设成直营、锐营、三角营、圆营、六花营和偃月营等诸多不同形状在营盘。各种不同形状在营盘需要根据已知的总占地面积来求得相应的长、宽或直径、圆周等数据才能进行布设。在这条史料中，各种不同形状在营盘正是通过变换转化成方营、直营或圆营这三种最基本的形状，然后用开方术来求解所需的边长或直径等数据，以便于宿营地的布设。在行军作战中这是一种必须用到的方法，具有很强的实用性。这其中，核心的方法是开方术，各种形状的布营方法都可以通过变换用开方术来求解。

在上引史料中，第一段描述的是在需要将营盘布成正方形的方营时，如何根据已知的占地总面积，求方营的边长。根据其中的描述，可以清楚地看到在求解的过程中使用了开方术。开方术是中国传统数学中具有特色的数学成就，但它究竟最早是什么时候产生的，至今还无可稽考。但其产生可能受到先秦时代以正方形及其边长感受面积大小的习惯观念的推动，而开方术的获得则与出入相补原理的应用有密切的关系。^[8]《周髀算经》中陈子用勾股定理，根据太阳的高度“日高”作为股和太阳在地面上的正投影位置（“日下”）到观测者的距离（作为勾），“勾股各自乘，并而开方除之”，求得太阳到观测者的距离（“邪至日”）就用到了开方术，虽没有给出开方程序，但可以推测在陈子活动的公元前五六世纪应该至少知道某些类型问题的开方法。《九章算术》在少广章中给出了完整的开平方、开立方的程序，分别称为开方术、开立方术。另有开圆术和立方圆术，前者即已知圆面积求圆周的方法，经过变换归结为开方术；后者即已知球体积求球径的方法，经过变换亦归结为开立方

术。因此，实际上是两种开方程序。^[9]开方是乘方的逆运算，刘徽注开方术时说“求方幂之一面也”，这就是说开平方就是已知正方形面积求其一边之长。开方术作为中国古代数学中重要的一种计算方法，在历代的算书中都有大量的记载，并发展成相当于现代求解一元高次方程数值解的一般方法，运用到许多不同的方面。这条载于兵书的史料为我们展示了如何运用开方术来解决军事活动中的具体问题，这在兵书和算书中都不多见，但它提供了中国古代军事和数学之间具有紧密关系的一个例证，表明古人注意到在军事行动中需要使用精确的数学计算方法。

上引史料提到方营、直营、锐营、三角营、圆营、六花营和偃月营等多种形状在营盘。古人要根据布营所需的面积，排成这些种类的营盘时，分别计算出相应的营盘数据。其基本的思路是，通过转换，从复杂到简单，最后都化为方营法或与之接近的直营法，最终通过开方术或除法得到基本数据，然后根据不同情况算出相应的结果，现分述如下。

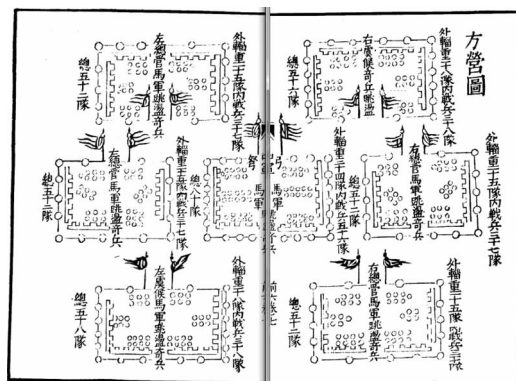


图1 方营图

Fig. 1 Diagram of FANGYING

(取自[宋]曾公亮. 武经总要(中国兵书集成第3册)[M]. 北京: 解放军出版社、辽沈书社, 1988: 229-230.)

当需要布设成直营即长方形营时，在面积已知的情况下，根据需要布设的长方形营的纵（或横）求得相应的横（或纵）。这时只要用除法即可求解。

当需要布设成三角营即等腰三角形的营盘（这里默认其底边与底边上的高等）时，要求得三角营之一面，即等腰三角形的底边长。方法是通过将排成方营所占的面积乘以2，得到三角营面积的两倍，它等于其高与底的乘积，亦即底的平方。所以再开平方，就是等腰三角形的边长。

当需要布设成锐营时，要求得锐营的径底或锐

① 这里有算理错误，或为作者疏忽，或为流传之误，详后。

长,即等腰三角形的底边长或高.在这里,锐营实际上是底边长和高不等的等腰三角形,是另一种形式的三角营.求解方法是通过对应的直营面积乘以2,得到的面积等于三角形的底与高的乘积.根据已知的底或高,参照直营法以除法求解,得到等腰三角形的高或底边长.

当需要布设成圆营时,预设它与对应的方营面积相等,要求得圆营直径.作者取先秦就采用的近似圆周率3,很可能根据上古时代的公式圆面积=直径²×3÷4,得直径²=方营面积×4÷3,然后通过开方术求得直径,最后乘以圆周率3得到周长.圆周率3在今天看来不是很精确,但在一般的应用中,这个值的误差也不算大.我们可以看到古人在实际运用中为简化运算而采用它的例子.^①六花营在这里被设定为与圆营的轮廓形状相同,所以采取和圆营一样的方法进行计算.

当需要布设成偃月营即半圆形的营盘时,假设它与对应的圆营或方营的面积相等,求其直径和矢长.设偃月营的弦径(半圆直径)为 d ,仍取圆周率3,其面积= $(d^2 \times 3 \div 4) \div 2 = d^2 \times 3 \div 8 =$ 对应的方营面积 S ,可推出 $d^2 = S \times 8 \div 3$,因此作者即将方营面积乘以8除以3,再开方,得到偃月营的弦径,再折半得到其矢径.值得注意的是,原文“则取圆营积数陪之,或取方营积数八乘而三归之,得偃月营积数.布算如方营法得偃月弦径,半之得偃月矢径”中,“圆营积数”并不是圆营的面积,而是圆营直径的平方.设圆营的直径为 d_1 ,则其面积为 $\pi d_1^2 / 4$,它与偃月营的面积($\pi d^2 / 4$) / 2相等,可以推知 $d^2 = 2 d_1^2$,因此将 $2 d_1^2$ 开平方,便得到 d ,所以原文说“圆营积数陪之,……得偃月营积数.布算如方营法得偃月弦径”.

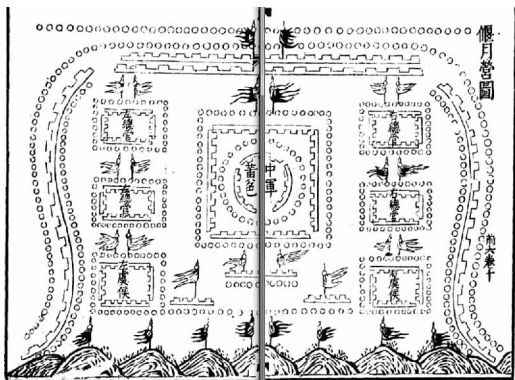


图2 偃月营

Fig. 2 Diagram of YANYUEYING

(取自[宋]曾公亮.武经总要(中国兵书集成第3册)[M].北京:解放军出版社、辽沈书社,1988:235-236.)

注意到,布营中最基本的是面积,如果直接布营,

只需根据形状从面积出发计算相应的参数即可,但原文大多从一种营的积数或其他数据出发进行计算.比如三角营、圆营由方营,锐营由直营,偃月营由圆营或方营,等等.原文讲到直营时,虽然未说从“方营积数”出发计算,但说到如果是方营则纵横相等,而直营则纵横一增一减,增加的部分与减少的部分要相当(“其所羨与所减亦相当也”,实际是指所增部分对面积的增加效应与所减部分对面积的减少效应相等).如果纵确定了,则通过增或减调整(“消息”)横的长度,如果横确定了,则通过增或减调整纵的长度,显然这个说法考虑的是从方营到直营的转换.上述其他营的对应关系实际也反映营盘之间的转换.这很可能反映了作者考虑到在实战中,有时因为地形或军情的变化,需要从一种形状的营盘改布为另一种形状的营盘,这种方式增加了实际军事行动中的可操作性.

上述营盘问题要计算平方根,古代有一种简单易学的盈不足方法可以求解,但这种方法往往求得的是近似值.^[10]而《武编》则把开方术这种可以相当精确地求出方根但较难掌握的计算方法,用于布设营盘这种极为常见的古代军事行动中.由于这类方法的记载比较少见,而且《武编》的作者与一般的兵书作者相比,其身份和经历都显得比较特殊,下文将从《武编》的作者及其生平与学术背景的角度来考察作者将其收入书中的原因与目的.

3 《武编》的作者及其生平与学术背景

《武编》,又名《唐荆川纂辑武编》,是明中叶唐顺之所纂辑的一部军事类书.唐顺之(1507-1560),字应德,一字义修,号荆川,学者称“荆川先生”,江苏武进(今属江苏常州)人.《明史》卷205有传.唐顺之出生于书香门第,其父唐宝曾任永州知府.唐顺之天资聪颖,于嘉靖八年(1529)参加会试,名列第一,年方23虚岁.四年后官翰林编修,参校累朝《实录》.后调兵部主事,曾奉命视师浙江,与胡宗宪共同抵御倭寇.因战功升任右金督御史,代凤阳巡抚.唐顺之“于学无所不窥.自天文、乐律、地理、兵法、弧矢、勾股、壬奇、禽乙,莫不究极原委.”^{[11]5422-5424}可见他涉猎极广,且勤于思考.他一生著述甚多,其中有六篇数学文

^① 如郭守敬的《授时历》,参见钱宝琮.中国数学史(李俨钱宝琮科学史全集第5册)[M].沈阳:辽宁教育出版社,1998:211.

章称为《数论六篇》。唐顺之还是一位打算盘的高手。^①他曾“尽取古今载籍,剖裂补缀,区别部居,为左、右、文、武、儒、稗六编传于世”。^{[11]5424}其中《武编》,乃因他有感于明代中期武备不振,从历代兵书以及其他著述中广泛搜集各种军事资料,编纂而成。

从唐顺之的背景及其经历来看,他是一位典型的传统文人和经世济用的官员,但同时又拥有当时一般的文人和官员所不具备的丰富的数理、天文等自然科学知识和军事阅历,可以认为他是一位文理兼通的将军学者。

《明史》“唐顺之传”中提到,在一次抗倭之战中,唐顺之驰援三沙,督促部下卢镛、刘显进击,在失利的情况下,“顺之愤,亲跃马布阵,贼搆高楼望官军,见顺之军整,坚壁不出”。^{[11]5423}可见唐顺之不仅在实战中布阵,而且阵布得很有水平,致使敌军见阵而不敢出战。很明显,唐顺之的《武编》含有上述下营算法,决不是偶然的,有着很强的实战背景。

上引史料中各种营的计算,从具体描述来看,不是典型的传统算书体例,但无疑所述内容已构成了真正的算题术文,而其中求方营一边长时对开方的描述,已是完整的开方程序,而关于其他各营,亦给出了解决方法的关键思路。同时这条兵书史料中用实、商、廉、隅等概念描述开平方,与唐顺之《弧矢论》等论文一致。^②另外,上引文字中用珠算术语“归”代替“除”,也与唐顺之善珠算一致。所以我们推测,尽管这段材料可能渊源有自,但很可能作者在纂辑《武编》的过程中进行了修订。还值得注意的是,作者把六花营的面积设定为与圆营的面积相等,所以采取和圆营一样的方法来进行计算,但是按照其他史料中的记载,六花营与圆营的布设还是有区别的,所以同样直径的两种营阵的面积并不完全相等。同时,史料中圆周率取为3,可能是源自前代的作法,并非唐顺之不知道有比它精确的圆周率。营阵是军队在驻扎和战斗时的不同形态,满编、缺编和超编的情况在现实中是经常会遇到的,而且在实战中必然会有伤亡、疾病等导致的减员,而且实际的营盘与营的名称所标识的几何形状也只是近似,^③所以在实践中肯定会在计算结果的基础上根据地形、兵员、战术意图等具体情况,进行一定程度的调整来布设营盘。因此,在这种情况下,由圆周率3造成的误差并不算大,却可以大大简化实际运用中的计算,为军事行动节省时间。上述情况反映了军事行动在需要精确的同时还必须追求效率的特点。军事运筹追求的是兼顾快速和精确,在两者之间达到平衡,以便尽量发挥最大的战斗力。中国古代兵家深谙此道。

4 结语

尽管有关中国古代的军事与数学密切关系的材料并不太多,但中国古代军事家对数学在军事上的运用却是十分重视的。《孙子》中的“计”和“庙算”等概念,反映了军事家对具体精密的定量分析(而非笼统的定性分析)对军事运筹的重要性有充分的重视。《武编》中的下营算法则提供了较复杂的数学方法应用于军事的一个实例,说明精密的计算和先进的数学方法,确是中国古代军事活动的需要。下营算法不仅反映了军事活动中对准确计算的要求,而且表明在保证所需准确度的前提下,通过在一定程度上降低精度来简化计算、提高效率也是同样重要的。因此,在理想化的计算精度和计算效率不能兼顾时,适当降低对精度或效率的要求,尽量使军事行动获得最好的效果,可能是军事数学知识的一个特点。考虑到《武编》的作者是一位文理兼通的数学家和有着抗倭实战经历的将军,其编纂的兵学著作运用了像开方术这种相对比较艰深的数学方法,是否属于特例,在其之前和之后的兵学著作中还有多少类似的情况,^④这些都需要进一步挖掘材料,进行更广泛而深入的研究来加以论定。

[参 考 文 献]

- [1]李零.吴孙子发微[M].北京:中华书局,1997:29;29-30;34;30;30;57;70;73;36.
- [2][东汉]曹操等注,郭化若译.十一家注孙子(附今译)[M].北京:中华书局,1962:2.
- [3]钟少异.孙子“校之以计而索其情”解[A]军事科学院战争理论和战略研究部,中国孙子兵法研究会编.孙子兵法与现代战略——第七届孙子兵法国际研讨会论文集[C].北京:军事科学出版社,2007:75-76.
- [4]邹大海.从出土简牍文献看中国早期的正负数概念[J].考古学报,2010(4):490.
- [5]六韬(四部丛刊本)[M].上海:商务印书馆,1936:10.
- [6][明]唐顺之:武编(中国兵书集成第13册)[M].北京:解放军出版社、辽沈书社,1989:370-372.
- [7][宋]曾公亮.武经总要(中国兵书集成第3册)[M].北京:解放军

① 唐顺之生平,参考李伊.中国数学大纲(李伊钱宝琮科学史全集卷三)[M].沈阳:辽宁教育出版社,1998;郭书春、李兆华.中国科学技术史·数学卷[M].北京:科学出版社,2010;李迪主编.中国数学史大系(第六卷西夏金元明)[M].北京:北京师范大学出版社,1999:482-483.

② 唐顺之的数学论文,见于《重刊荆川先生文集》卷十七,《四部丛刊》本。

③ 《武经总要》的营图(如图1、2)与营名所标识的几何形状即有出入。

④ 明人茅元仪所撰《武备志》中的军资乘·营三·下营算法条引用了几乎完全一样的文字,很可能抄录于《武编》。

出版社、辽沈书社,1988:218.

[8]邹大海.中国数学的兴起与先秦数学[M].石家庄:河北科学技术出版社,2001:138-141;邹大海.从先秦文献和《算数书》看出入相补原理的早期应用[J].中国文化研究,2004,冬之卷:52-60.

[9]郭书春,李兆华.中国科学技术史·数学卷[M].北京:科学出版社,2010:145.

[10]邹大海.从《算数书》盈不足问题看上古时代的盈不足方法[J].

自然科学史研究,2007,26(3):312-323.

[11][清]张廷玉.明史(第18册)[M].北京:中华书局,1974:5422-5424;5424;5423.

[责任编辑 黄祖宾]

[责任校对 苏 琴]

The Calculation and Calculating in Military of Ancient Chinese

——For the methods to calculate roots used in the barracks arrangement

YANG Di-fei, ZOU Da-hai

(Institute for the History of Natural Sciences, Chinese Academy of Sciences, Beijing 100190, China)

Abstract: The ancient Chinese military strategist attaches great importance to the application of mathematics. Barracks arrangement algorithm in *WUBIAN*(《武编》) not only reflects the accurate calculation of the required military activities, but also that in ensuring the accuracy of the premise, to a certain extent by reduced accuracy to simplify the calculation, improve efficiency is also important. Therefore, when the accuracy and efficiency is not taken into account, a balance between the two may be the characteristic among the military mathematics.

Key Words: Military Of Ancient Chinese; Calculation And Calculating; barracks arrangement; calculate roots