学校编码：**10384**　　　　　　　　分类号＿＿＿＿密级＿＿＿＿

学号：**19020101152521**　　　　　　　　UDC＿＿＿＿

厦门大学

硕　士　学　位　论　文

牛顿线性搜索方法检验与求解双曲型二次特征值问题

Solving and Detecting Hyperbolic Quadratic Eigenvalue Problems by Newton's Method with Exact Line Searches

张 雯

指导教师姓名：　卢 琳 璋 教授

专 业 名 称：　计 算 数 学

论文提交日期：　2013 年 5 月

论文答辩时间：　2013 年 5 月

学位授予日期：　　　年　　月

答辩委员会主席：＿＿＿＿＿＿

评　　阅　　人：＿＿＿＿＿＿

2013 年 5 月

厦门大学学位论文原创性声明

本人呈交的学位论文是本人在导师指导下,独立完成的研究成果。本人在论文写作中参考其他个人或集体已经发表的研究成果，均在文中以适当方式明确标明，并符合法律规范和《厦门大学研究生学术活动规范（试行）》。

另外，该学位论文为（ ）课题（组）的研究成果，获得（ ）课题（组）经费或实验室的资助，在（ ）实验室完成。（请在以上括号内填写课题或课题组负责人或实验室名称，未有此项声明内容的，可以不作特别声明。）

声明人（签名）：

年 月 日

厦门大学学位论文著作权使用声明

本人同意厦门大学根据《中华人民共和国学位条例暂行实施办法》等规定保留和使用此学位论文，并向主管部门或其指定机构送交学位论文（包括纸质版和电子版），允许学位论文进入厦门大学图书馆及其数据库被查阅、借阅。本人同意厦门大学将学位论文加入全国博士、硕士学位论文共建单位数据库进行检索，将学位论文的标题和摘要汇编出版，采用影印、缩印或者其它方式合理复制学位论文。

本学位论文属于：

（　　　）1.经厦门大学保密委员会审查核定的保密学位论文，于　　年　　月　　日解密，解密后适用上述授权。

（　　　）2.不保密，适用上述授权。

（请在以上相应括号内打“√”或填上相应内容。保密学位论文应是已经厦门大学保密委员会审定过的学位论文，未经厦门大学保密委员会审定的学位论文均为公开学位论文。此声明栏不填写的，默认为公开学位论文，均适用上述授权。）

声明人（签名）：

年　　月　　日

摘要

二次特征值问题(QEPs)：

$$(\lambda^2 A + \lambda B + C)x = 0$$

实际应用的范围非常广泛, 而双曲型二次特征值问题是二次特征值问题的一种特殊分类. 本文主要研究双曲型二次特征值问题和超阻尼二次特征值问题, 了解他们的定义及相关性质, 并利用他们的性质研究用简便的方法判断一个二次特征值问题是否为双曲型二次特征值问题和超阻尼二次特征值问题. 双曲型二次特征值问题相对应的双曲型二次矩阵多项式

$$Q(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C, A, B, C \in C^{n\times n}, A > 0$$

是Hermitian 矩阵多项式中的一种重要分类. 双曲型二次特征值问题的一个重要特征是: 这个问题的所有特征值都是实数. 而超阻尼二次特征值问题是双曲型二次特征值问题中一种特殊形式: 它的所有特征值都是非正实数.

根据双曲型和超阻尼(QEPs)特征值的特殊性质, 我们可以通过求解二次特征值问题的所有特征值来判断是否为双曲型或者超阻尼二次特征值问题. 本文主要将二次特征值问题转化成求解相对应矩阵方程的预解子(solvent), 并用牛顿线性搜索方法解二次特征值问题所对应的二次矩阵多项式

$$AX^2 + BX + C = 0$$

然后求解预解子和相关矩阵类的特征值来得到(QEs)的所有特征值. 从而检测出这个特征值问题是否为双曲型或者更进一步为超阻尼型二次特征值问题.

本文主要有三章, 在文章的第一章, 我们介绍了什么是二次特征值问题. 在第二章我们介绍了二次特征值问题中的特殊分类: 双曲型二次特征值问题和超阻尼二次特征值问题. 并对相关性质做了阐述, 同时根据特征值的性质给了有效算法来验证是否为双曲型二次特征值问题. 在第三章, 我们使用牛顿线性搜索方法求解矩阵方程的预解子, 从而来求解二次特征值问题. 在第三章我们首先确认了矩阵方程解的存在性, 然后介绍了牛顿法, 再在牛顿法的基础上转变为牛顿线性搜索的方法, 并证明了它的二次收敛和全局收敛, 在最后我们给出了牛顿线性搜索方法和参考文献[11]中矩阵循环

消减法的对比. 指出了对于一般二次特征值问题矩阵循环消减法是行不通的, 即使对于双曲型二次特征值问题如果其中一步迭代中矩阵B_i奇异, 那么矩阵循环消减法的迭代也不能顺利进行下去. 对于超阻尼二次特征值问题B是正定, 也不能保证矩阵循环消减法的适用性, 因为迭代产生的一系列矩阵A_i 和C_i可能无限增大, 这样迭代就不能顺利进行下去. 另一方面, 矩阵方程解的精确性依赖于矩阵B_i的条件数, 尽管在每步迭代中B_i正定, 但也不能保证B_i不是病态的. 由参考文献[11]中的定理我们可以看出矩阵循环消减法每步迭代中B_i的条件数依赖于$\lambda_n \setminus \lambda_{n+1}$的比值, 当$\lambda_n \sim \lambda_{n+1}$时, B_i的条件数可以为无穷大, 因此精确性可能会降低. 而对于使用牛顿线性搜索的方法来求解二次矩阵方程, 要使迭代顺利进行下去, 只需要每步D_x 是非奇异的, 而D_x非奇异要求A是非奇异的, 由文章给出的定理我们可以看出, 对于双曲型二次问题迭代一定能顺利进行下去, 而且对于一般二次特征值问题我们也能求解, 因此使用范围明显比上述所提到的矩阵循环迭代的方法要广的多, 而当λ_n接近于λ_{n+1}时, 我们所得到的X的精确度也比较高. 最后用数值例子来验证牛顿线性搜索方法的优点.

关键词：二次特征值问题; 双曲型; 超阻尼; 预解子; 二次矩阵方程; 牛顿线性搜索方法.

Abstract

Quadratic eigenvalue problems (QEPs):

$$(\lambda^2 A + \lambda B + C)x = 0$$

of which, the practical application range is very extensive. Hyperbolic quadratic problems are special class of quadratic eigenvalue problems. In this paper, we focus on the hyperbolic quadratic eigenvalue problems and overdamped quadratic eigenvalue problems, learning more about their definitions and nature. Further, according to the nature of the hyperbolic quadratic eigenvalue problems and overdamped quadratic eigenvalue problems, we show that a relatively efficient test for hyperbolicity can be obtained by computing the eigenvalues of the hyperbolic quadratic eigenvalue problem.

The hyperbolic quadratic matrix polynomials of the hyperbolic quadratic eigenvalue problems:

$$Q(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C, A, B, C \in C^{n\times n}, A > 0$$

are an important class of Hermitian matrix polynomials with real eigenvalues, among which overdamped quadratics are those with nonpositive eigenvalues. For quadratic eigenvalue problems, we show that all eigenpairs can be found by finding solutions of the corresponding quadratic matrix $AX^2 + BX + C = 0$ using the Newton's method with exact line searches. This thesis comprise three chapters.

In Chapter 1, we give a brief review of the background and projection type solvers of quadratic eigenvalue problems.

In Chapter 2, we firstly give the definitions of the hyperbolic quadratic eigenvalue problems and overdamped quadratic eigenvalue problems. Then we discuss some basic nature and theories on them.

In Chapter 3, we solve quadratic eigenvalue problems by finding solutions of the corresponding quadratic matrix using the Newton's method with exact line searches. Firstly, we discuss the existence of solutions with the quadratic matrix equation. Secondly, we also brief introduce the method of Newton's exact line searches, which is expected to give better global convergence and the quadratic convergence. Moreover, two different methods for the quadratic eigenvalue problem are analyzed in Chapter 3. The first one is a method basic on cyclic reduction[11], while the second one is the Newton's method with exact line searches. Comparing the two methods, there are some advantage of the Newton's method with exact line searches. We can see that Newton's method with exact line searches is of wider practical applicability and when the ratio λ_n/λ_{n+1} approaching 1 the accuracy of the eigenvalue computed by the Newton's method with exact line searches is better . At the last, some numerical examples are presented to support this claim.

Key Words: quadratic eigenvalue problem; hyperbolic; overdamped; solvent; quadratic matrix equation; Newton's method with exact line searches.

目 录

CONTENTS

第一章 二次特征值问题

二次特征值问题实际应用的范围非常广泛. 在流体力学中流量的线性稳定研究, 声学系统的动态分析, 结构力学中结构系统的振动分析, 电路仿真, 微电子力学系统(microelectronic mechanical system, MEMS) 的数学建模, 生物医学信号处理, 时间序列预报, 语音的线性预测编码, 多输入-多输出(multiple input-multiple output MiMo)系统分析, 工业应用的偏微分方程的有限元分析, 以及线性代数问题的一些应用中, 我们常会遇到一个共同的问题—二次特征值问题(QEP). 我们可以将二次特征值问题叙述为: 求标量λ和特征向量x, y 满足$Q(\lambda)x = 0$ 和$y^*Q(\lambda) = 0$ 其中

$$Q(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C,\ A, B, C \in C^{n\times n} \tag{1.1}$$

是一个二次矩阵多项式, λ是特征值, x和y分别是对应λ的右特征向量和左特征向量. 有关二次矩阵多项式的应用以及解决二次多项式的理论和算法, Tisseur 和Meerbergon 在参考文献[19]中做了详细介绍.

在本文, 我们关注的A, B, C都是Hermitian矩阵, 且A是正定的情况, 我们定义Hermitian 矩阵X, Y, 如果$X - Y$是正定(半正定)的, 则记$X > Y (X \geq Y)$.

在参考文献[1] 《矩阵计算》这本书中同样介绍了怎样把实际问题转化成二次特征值问题, 并给出了二次特征值问题的两种特殊分类: 双曲型二次特征值问题和椭圆型二次特征值问题. 在最近发表的文章中, Higham, Tisseur, 和Van Dooren [12]给出了检验双曲型二次特征值问题和椭圆形二次特征值问题的方法. 他们指出对于椭圆形二次特征值问题可以通过直接计算(QEPs)的特征向量来检验, 然而对于双曲型二次特征值问题的检验则要复杂的多, 通常我们可以通过检验两倍维数Hermitian类的确定性来判断是否为双曲型(QEPs). 而在这篇文章我们将给出简单有效的方法来判断是否为双曲型二次特征值问题.

本文我们将主要讨论双曲型二次特征值问题$Q(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C$, 其中矩阵$A > 0$ (即A是正定的), 且A, B, C 都是$n \times n$ Hermitian阵, 并对任意n 维向量x 都有

$$(x^*Bx)^2 > 4(x^*Ax)(x^*Cx)$$

和双曲型二次特征值问题的一种特殊形式: 超阻尼二次特征值问题. 它要求满足双曲型二次特征值问题条件的同时, 还要求$B > 0, C \geq 0$. 文章里还对双曲型二次特征值问题和超阻尼二次特征值问题的一些性质进行了讲解. 对于双曲型二次特征值问题, 我们可以看出他的特征值都是实数并满足一定的条件; 而超阻尼二次特征值问题的所

有特征值都是非正的实数. 根据它们有关特征值的性质，我们可以通过求解二次特征值问题的特征值来判断是否为双曲型二次特征值问题或者超阻尼(QEPs). 同时利用相关性质我们给出了具体算法来检验是否为双曲型二次特征值问题. 要求解二次特征值问题, 通常需要研究和这个二次特征值问题相关的二次矩阵方程

$$Q(X) = AX^2 + BX + C = 0 \tag{1.2}$$

A, B, C 都是Hermitian矩阵来自二次特征值问题. 我们把上述方程的解称作为预解子[4], 更精确的说X 是一个右预解子. 而满足方程$X^2A + XB + C = 0$ 的解我们称为左预解子. 对于双曲型二次特征值问题所有的特征值都是实数, 而对于超阻尼二次特征值问题所有的特征值不仅都是实数而且都是半单的和非正的. 并且在前n 个较大的特征值和后n 个较小的特征值之间存在一个间隔, 即λ_n与λ_{n+1} 不相等; 对于超阻尼二次特征值问题矩阵方程((1.2)), 至少存在两个预解子$X^{(1)}$ 和$X^{(2)}$, 并且$X^{(1)}$ 对应二次特征值问题的前n 个特征值, $X^{(2)}$ 对应二次特征值问题的后n个特征值.

求解二次特征值问题(1.1)的特征值和特征向量的标准方法是将（QEPs）线性化, 但是通过计算(1.2)求解矩阵方程的预解子X 和矩阵类$\lambda A + AX + B$ 的特征值来得到二次特征值问题的特征值是一个相比将二次特征值问题线性化更有效的方法. 这篇文章中我们使用牛顿线性搜索的方法来对矩阵方程进行迭代从而得到预解子X , 并对预解子进行QR分解, 同时对矩阵$-X - A^{-1}B$ 进行QR分解, 两者所得特征值加起来就是二次问题的全部特征值. 在参考文献[11]中, 使用矩阵循环消减迭代的方法来求解矩阵方程. 但是相比而言, 牛顿线性搜索的方法适用范围更广, 要求条件更低, 有着明显的优点.

本文的第一章, 我们介绍了什么是二次特征值问题. 在第二章我们将介绍二次特征值问题中的特殊分类: 双曲型二次特征值问题和超阻尼二次特征值问题. 并对相关性质做了阐述, 同时根据特征值的性质给了有效算法来验证是否为双曲型二次特征值问题. 在第三章, 我们使用牛顿法求解矩阵方程的预解子, 来求解二次特征值问题. 在第三章我们首先确认了矩阵方程解的存在性, 然后介绍了牛顿法, 再在牛顿法的基础上转变为牛顿线性搜索的方法, 并证明了它的二次收敛和全局收敛. 然后我们介绍了两种不同的求解矩阵方程的算法, 并对两种算法进行了对比. 最后我们通过数值例子来阐述了这两种方法对比的结论.

第二章　双曲型二次特征值问题及其检测

在上一章中, 已经介绍了二次特征值特征值问题, 现在我们来介绍双曲型和超阻尼二次特征值问题及其性质定理。

2.1 双曲型二次特征值问题定义及相关定理

定义 2.1: 式子(1.1) $Q(\lambda)$ 是双曲型的二次特征值问题, 如果矩阵A, B, C 都是$n \times n$ Hermitian阵, $A > 0$ 且对任意n 维向量x 都有

$$x^*Bx^2 > 4(x^*Ax)(x^*Cx) \tag{2.1}$$

对于二次特征值问题$Q(\lambda)$的任何特征对(λ, x)都有

$$\lambda = \frac{-x^*Bx \pm \sqrt{(x^*Bx)^2 - 4(x^*Ax)(x^*Cx)}}{2x^*Ax} \tag{2.2}$$

由此可以看出双曲型二次特征值问题的所有特征值都是实数.

下面的结论给出了三个条件, 每个条件都等价于双曲型的二次特征值问题定义中的条件2.1[10]

定理 2.1: $Q(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C$是$n \times n$维的Hermitian阵, $A > 0$

$$r = \min_{\|x\|_2}[x^*Bx^2 - 4(x^*Ax)(x^*Cx)]$$

则下列四个表达式等价

(a) $Q(\lambda)$是双曲型二次特征值问题；
(b) $r > 0$;
(c) 对所有非零向量x, $x^*Q(\lambda)x = 0$有两个不同的实数零点；
(d) $\exists \mu \in R$, 使得$Q(\mu) < 0$;

双曲型二次特征值问题的一些性质[16]

定理 2.2: $Q(\lambda) = \lambda^2 A + \lambda B + C$是$n \times n$维的双曲型二次特征值问题, 则有

(a) $Q(\lambda)$的$2n$个特征值都是实数且是半单的；

(b) 在$Q(\lambda)$的前n个大的特征值和后n个小的特征值之间存在一个间隔即 $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq ... \geq \lambda_n > \lambda_{n+1} \geq ... \geq \lambda_{2n}$;

(c) $\forall\lambda \in (\lambda_{n+1}, \lambda_n)$,有$Q(\lambda) < 0$; $\forall\lambda \in (-\propto, \lambda_{2n}) \cup (\lambda_1, +\propto)$,有$Q(\lambda) > 0$;

(d) 对于前n个特征值存在n个线性无关的特征向量与之对应, 同样对于后n个特征值存在n个线性无关的特征向量与之对应;

(e) 二次矩阵方程存在两个预解子$X^{(1)}, X^{(2)}$, 其中$X^{(1)}$对应前n个较大特征值$\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$; $X^{(2)}$对应后n 个较小特征值$\lambda_{n+1}, \lambda_{n+2}, ..., \lambda_{2n}$. 更有

$$Q(\lambda) = (\lambda I - X^{(2)*})A(\lambda I - X^{(1)}) = (\lambda I - X^{(1)*})A(\lambda I - X^{(2)})$$

上述定理中$(a), (b)$是显然成立的, 而(c)的证明在参考文献[16]中有给出. 在证明过程中把$Q(\lambda)$ 看成是一个Hermitian矩阵, 如果λ_k 是$Q(\lambda)$ 的一个特征值, 当且仅当0是$Q(\lambda_k)$ 的一个特征值. 因为$Q(\lambda)$ 是一个Hermitian矩阵, 所以它的特征值的代数重数和几何重数相等. 又因为$Q(\lambda)$ 的所有特征值都是半单的, 所以0 作为$Q(\lambda_k)$的特征值的代数重数和λ_k作为$Q(\lambda)$的特征值的代数重数相等. 由此来得出(c) 的结论. 同样参考文献[11] 中关于(c) 的证明是非常标准的, 在参考文献[15]和参考文献[14] 中相似的相似的结论被使用. 由2.2中的(c)我们可以看出对$\forall\lambda \in (\lambda_{n+1}, \lambda_n)$, 有$Q(\lambda) < 0$; 而其他$\lambda$ 都不满足. 因此我们我们可以利用上述结论给出一个数值程序来确定$Q(\lambda)$ 是否为双曲型二次特征值问题. 它比在参考文献[3]中更有效.

算法:

1. 计算二次特征值问题$Q(\lambda)$ 的$2n$ 个特征值;

2. 判断特征值是否满足定理2.2 中的(b), 如果不满足则不是双曲型二次特征值问题;

3. 如果满足定理2.2 中的(b), 且有$Q(\frac{\lambda_n+\lambda_{n+1}}{2}) < 0$, 则这个二次特征值问题是双曲型, 否则就不是双曲型;

寻找二次特征值问题的$2n$ 个特征值的方法, 我们将会在第三章具体介绍. 如果$W = Q(\frac{\lambda_n+\lambda_{n+1}}{2}) < 0$, 我们可以进一步在确定$-W$ 是否能进行Cholesky 分解或者W上的特征值是否为负的. 这就给出了超阻尼二次特征值问题的一些相关知识.

2.2 超阻尼二次特征值问题

定义 2.2: 式子(1.1)中$Q(\lambda)$ 是超阻尼的二次特征值问题, 如果$Q(\lambda)$ 是双曲型的, 且$B > 0, C \geq 0$.