INTEGRASI NUMERIK MENGGUNAKAN METODE GAUS KUADRATUR DENGAN PENDEKATAN INTERPOLASI HERMIT DAN POLINOMIAL LEGENDRE

Sutrisno, Robertus Heri
Jurusan Matematika FMIPA UNDIP Semarang

Abstract. Gaus Quadrature Formula is better alternative than Newton Cotes Formula. The principal of Gaus Quadrature Formula determine unequal interval to minimize the error of approximation of integration. Formulation Gaus Quadrature on limited interval for numerical integration can use Hermite Interpolation Formula. Then, using the properties of Legendre polynomial which orthogonal on [-1,1] can determined nodes and weights. So, based on nodes and weight can be determined a Gaus – Legendre Quadratur Formula.

Keywords*:* Gauss Quadrature Method, Legendre Polynomial, Hermite Interpolation, Lagrange Interpolation, Error, Gauss – Legendre Quadrature Formula.

1. PENDAHULUAN

Integral mempunyai banyak terapan dalam bidang sains dan rekayasa. Dalam bidang rekayasa, seringkali ditemukan fungsi yang terlalu rumit untuk diintegralkan secara analitik. Oleh sebab itu, metode numerik dapat digunakan untuk menghampiri (mengaproksimasi) integrasi fungsi tersebut. Aproksimasi integrasi dengan menggunakan polinomial adalah salah satu teknik di dalam metode numerik dan masih banyak digunakan, yang terbagi menjadi dua bagian besar berdasarkan cara pengambilan panjang interval [1], yaitu:

1. Metode Newton-Cotes
   Metode Newton-Cotes adalah Metode yang menggunakan interval yang sama panjang, meliputi : Rumus trapesium, Rumus simpson 1/3, Rumus simpson 3/8, Rumus Boole.
2. Metode Gaus Kuadratur
   Metode Gaus Kuadratur adalah Metode yang menggunakan interval yang ditentukan (disesuaikan) dan interval yang dipilih tidak harus sama panjang, meliputi : Gaus Kuadratur – Legendre, Gaus Kuadratur – Cheybesive.

Rumus trapesium, Rumus simpson 1/3, dan Rumus simpson 3/8 adalah tiga buah Rumus integasi numerik pertama dari metode Newton-Cotes. Masing – masing mendekati fungsi dengan polinomial orde 1, orde 2, dan orde 3. Dari metode Newton-Cotes dapat ditemukan metode–metode baru dengan menggunakan polinomial derajat 4, 5, 6 dan seterusnya, tetapi permasalahannya metode Newton-Cotes yang menggunakan polinomial orde tinggi tidak lebih teliti / baik daripada polinomial orde rendah.

Kedua macam metode aproksimasi tersebut bertujuan untuk memperoleh ketelitian yang lebih mendekati hasil yang dicapai bila dibandingkan metode analitis. Penyelesaian integral tentu menggunakan metode Gaus Kuadratur – Legendre membutuhkan banyak perhitungan, oleh karena itu perlu adanya program perhitungan. Dalam hal ini program yang digunakan adalah MAPLE dan MATLAB

2. PEMBAHASAN

2.1. Penentuan Rumus Gaus – Kuadratur pada Integrasi Numerik

Metode Gaus Kuadratur adalah metode integrasi numerik yang menggunakan interval-interval yang ditentukan dan interval-interval tersebut tidak harus sama panjang. Hal ini bertujuan untuk mendapatkan *error* sekecil mungkin.

Untuk mendapatkan rumus Gaus Kuadratur menggunakan n titik, terlebih dahulu dianalogikan cara mendapatkan rumus Gaus Kuadratur menggunakan 2 titik sebagai berikut .

Misalkan digunakan rumus Gaus Kuadratur-2 titik untuk menghitung $\int_{-1}^{1} f(x)dx$, maka daerah integrasi dalam selang [-1,1] didekati dengan sebuah trapesium yang luasnya adalah

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2), \qquad (1)$$

dimana:

w_1, w_2 : panjang interval yang akan ditentukan,

x_1 , x_2 : titik yang akan ditentukan.

Persamaan (1) mengandung empat variabel yang tidak diketahui, yaitu x_1, x_2, w_1, dan w_2 . Permasalahan dari persamaan (1) adalah menentukan x_1 , x_2 , w_1 , dan w_2 sehingga error integrasinya minimum. Karena ada empat buah variabel yang tidak diketahui, maka dibutuhkan empat buah persamaan simultan yang mengandung x_1, x_2, w_1, dan w_2 .

Dapat ditentukan rumus integrasi numerik yang memberikan kesalahan = 0 untuk $f(x)$ derajad 3 yang diintegrasikan pada interval [-1,1]. Jika yang ditentukan rumus aproksimasi integrasi yang kesalahan = 0 maka persamaan (1) menjadi :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = w_1 f(x_1) + w_2 f(x_2), \qquad (2)$$

dengan

$f(x)$: polinomial yang berderajat $\leq$ 3.

Untuk mendapatkan rumus yang diinginkan, yang pertama dicari dulu nilai w_1, w_2 , x_1, dan x_2 .

Dengan menganggap rumus eksak untuk fungsi - fungsi $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, dan $f(x) = x^3$ maka diperoleh 4 persamaan sebagai berikut :

$$w_1 + w_2 = 2,$$

$$w_1 x_1 = -w_2 x_2 ,$$

$$w_1 x_1^2 + w_2 x_2^2 = \frac{2}{3} ,$$

$$w_1 x_1^3 = -w_2 x_2^3 .$$

Sehingga diperoleh

$$w_1 = w_2 = 1 \text{ dan} - x_1 = x_2 = 1/\sqrt{3} .$$

Jadi rumus integrasi numerik Gaus Kuadratur-2 titik adalah:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = f(1/\sqrt{3}) + f(-1/\sqrt{3}) \qquad (3).$$

Analog dengan pencarian Gaus Kuadratur-2 titik, dapat ditentukan rumus integrasi numerik Gaus Kuadratur-3 titik, dapat dilakukan dengan menganggap rumus tersebut eksak untuk fungsi - fungsi: $f(x) = 1$, $f(x) = x$, $f(x) = x^2$, $f(x) = x^3$, $f(x) = x^4$, dan $f(x) = x^5$ diperoleh interval – interval dan titik yang dicari :

$w_1 = \frac{5}{9}$, $w_2 = \frac{8}{9}$, $w_3 = \frac{5}{9}$, $x_1 = -\sqrt{3/5}$, $x_2 = 0$, dan $x_2 = \sqrt{3/5}$.

Rumus aproksimasi integrasi tersebut eksak untuk integrasi fungsi polinomial derajat ≤ 5.

Untuk menentukan rumus integrasi numerik Gaus Kuadratur yang menggunakan jumlah titik lebih besar dari 3 dengan menggunakan cara diatas tentunya kurang efesien. Untuk menghitung integrasi $\int_a^b f(x)dx$ maka dapat dilakukan transformasi, sebagai berikut :

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)}{2}\int_{-1}^{1} f\left[\frac{(a+b)+(b-a)t}{2}\right]dt \quad (4)$$

2.2. Perumusan Gaus Kuadratur – Legendre

Perumusan Gaus Kuadratur pada aproksimasi integrasi $f(x)$ dengan interval [-1,1] yang menggunakan penyelesaian eliminasi atau substitusi, untuk n titik yang besar ($n \geq 3$) membutuhkan perhitungan yang rumit. Oleh karena itu perlu cara lain untuk perhitungannya, yaitu dengan menggunakan rumus polinomial Hermit.

Interpolasi Hermit tersebut membentuk polinomial yang berderajat 2n

– 1 dengan menggunakan n titik, dengan memisalkan titik - titik yang akan ditentukan adalah titik – titik pembuat nol polinomial Legendre $\left(p_n(x)\right)$, yang dinotasikan dengan $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ dimana $-1 < x_i < 1$, $\forall i \in n$ maka didapat rumus aproksimasi integrasi numerik yang tunggal pada interval [-1,1] dan mempunyai kelebihan yaitu, rumus tersebut eksak untuk polinomial berderajat $\leq 2n-1$, yang didefinisikan sebagai berikut :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{j=1}^{n} f(x_i)w_i dx + E \quad , \quad n \geq 1 \quad (5)$$

dengan

$f(x)$: fungsi yang diintegrasi,

w_i : interval yang ditentukan (bobot),

E : *error* aproksimasi,

x_i : titik – titik pembuat nol $\left(p_n(x)\right)$,

$$w_i = \frac{-2}{(n+1)p'_n(x_i)p_{n+1}(x_i)}$$

$$E = \frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^2} \cdot \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!},\ \xi \in [-1,1]$$

dengan asumsi $f(x)$ dapat diturunkan 2n kali dan kontinyu pada [-1,1]. Karena menggunakan titik – titik pembuat nol polinomial Legendre maka persamaan (5) dinamakan rumus Gaus Kuadratur - Legendre. Untuk mendapatkan rumus tersebut dapat dilakukan langkah – langkah sebagai berikut.

1. Mendapatkan rumus Gaus Kuadratur Legendre yang mempunyai ketelitian $2n-1$, dengan menggunakan n titik pembuat nol polinomial Legendre.
2. Menunjukkan bahwa titik – titik yang diperoleh dari interpolasi Hermit adalah tunggal dan titik – titik tersebut adalah pembuat nol polinomial Legendre.
3. Menentukan rumus bobot.
4. Menentukan rumus *error*.

2.2.1. Rumus Gaus Kuadratur – Legendre Dengan n - Titik

Berikut ini adalah langkah untuk mendapatkan rumus Gaus Kuadratur – Legendre n titik. Didefinisikan rumus interpolasi Hermit sebagai berikut .

$$H_n(x) = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)h_i(x) + \sum_{i=1}^{n} f'(x_i)\tilde{h}_i(x) \text{ ,(6)}$$

dengan

$H_n(x)$: rumus polinomial Hermit,

$f(x_i)$: nilai fungsi pada titik x_i,

$f'(x_i)$: nilai turunan fungsi pada titik x_i,

$$\tilde{h}_i(x) = (x - x_i)[l_i(x)]^2, \quad (7)$$

$$h_i(x) = [1 - 2l'_i(x_i)(x - x_i)][l_i(x)]^2, \quad (8)$$

$l_i(x)$: fungsi pengali Interpolasi Lagrange dan didefinisikan

$$l_i(x) = \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{i-1})(x-x_{i+1})\cdots(x-x_n)}{(x_i-x_1)\cdots(x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1})\cdots(x_i-x_n)} \quad (9)$$

Pendekatan $f(x)$ didefinisikan dengan:

$$f(x) = H_n(x) + \varepsilon_n(x) \quad (10)$$

$$\varepsilon_n(x) = \frac{[\psi(x)]^2}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi), \quad \xi \in [-1,1], \quad (11)$$

dimana $\psi(x) = (x - x_1)(x - x_2)\cdots(x - x_n)$. (12)

Untuk mendapatkan rumus aprosimasi integrasi pada interval [-1,1] maka kedua ruas persamaan (10) diintegrasikan pada interval [-1,1] didapat :

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \int_{-1}^{1} H_n(x)dx + \int_{-1}^{1} \varepsilon_n(x)dx. \quad (13)$$

Dari persamaan (7) diperoleh

$$\int_{-1}^{1} \tilde{h}_i(x)dx = \frac{1}{p'_n(x_i)} \int_{-1}^{1} p_n(x)l_i(x)dx.$$

Persamaan (9) menunjukkan bahwa $l_i(x)$ adalah polinomial berderajat $(n-1)$. Selanjutnya dengan menggunakan sifat – sifat polinomial Legendre berderajat n ($p_n(x)$)yang ortogonal dengan polinomial berderajat < n pada interval [-1,1] seperti yang ditunjukkan pada Teorema 1, maka diperoleh

$$\int_{-1}^{1} \tilde{h}_i(x)dx = 0 \quad (14)$$

Teorema 1.[2]

Jika $g_m(x)$ adalah polinomial yang berderajat m dan $p_n(x)$ adalah polinomial Legendre yang berderajat n dengan $m < n$, maka

$$\int_{-1}^{1} p_n(x) g_m(x) dx = 0,\ m < n.$$

Dari sifat ortogonalitas polinomial Legendre maka persamaan (13) menjadi

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx = \sum_{j=1}^{n} f(x_i)w_i + \int_{-1}^{1} \varepsilon_n(x)dx \quad (15)$$

dengan $w_i = \int_{-1}^{1} [l_i(x)]^2 (x)dx$,

$$\varepsilon_n(x) = \frac{[\psi(x)]^2}{(2n)!} f^{(2n)}(\xi),\ \xi \in [-1,1] \quad (16)$$

persamaan (15) dinamakan rumus Gaus Kuadratur – Legendre.

Untuk menyederhanakan fungsi bobot (w_i) dapat dilakukan dengan mencari hubungan korespondensi persamaan (15) dengan persamaan intergasi polinomial Lagrange sehingga diperoleh

$$w_i = \int_{-1}^{1} [l_i(x)]^2 dx = \int_{-1}^{1} l_i(x)dx \quad (17)$$

2.2.2. Ketunggalan titik-titik dari interpolasi Hermit

Untuk menunjukkan ketunggalan titik-titik tersebut, yang pertama menganggap rumus integrasi numerik yang diinginkan pada persamaan (5), yaitu mempunyai kelebihan eksak untuk polinomial berderajat $\le 2n-1$, yang didefinisikan sebagai berikut:

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx \sum_{j=1}^{n} v_i f(z_i).$$

Selanjutnya titik – titik yang dibuktikan ketunggalannya dinotasikan dengan z_1, z_2, $\cdots$, z_n sebagai pembentuk polinomial berderajat $\le 2n-1$ yang menggunakan rumus polinomial Hermit, sehingga aproksimasi $f(x)$ menggunakan polinomial interpolasi Hermit pada titik – titik tersebut dapat didefinsikan sebagai

$$f(x) \approx \sum_{i=1}^{n} f(z_i)h_i(x) + \sum_{i=1}^{n} f'(z_i)\tilde{h}_i(x),$$

dari persamaan (10) maka persamaan aproksimasi $f(x)$ berlaku

$$f(x) = \sum_{i=1}^{n} f(z_i)h_i(x) + \sum_{i=1}^{n} f'(z_i)\tilde{h}_i(x),$$

derajat (*f*) $\le 2n-1$

kemudian diintegralkan pada interval $[-1,1]$ sehingga diperoleh

$$\sum_{j=1}^{n} v_i f(z_i) = \sum_{i=1}^{n} f(z_i)\int_{-1}^{1} h_i(x)dx + \sum_{i=1}^{n} f'(z_i)\int_{-1}^{1} \tilde{h}_i(x)dx \quad (18)$$

untuk setiap fungsi polinomial $f(x)$ berderajat $\le 2n-1$.

Misalkan $f(x) = \tilde{h}_i(x)$, dengan menggunakan sifat dari $\tilde{h}_i(x)$ pada persamaan (7) yang menunjukkan bahwa $\tilde{h}_i(z_i) = 0$, disubstitusikan ke persamaan (18) didapatkan,

$$0 = 0 + \sum_{i=1}^{n} f'(z_i)\int_{-1}^{1} \tilde{h}_i(x)dx \quad (19)$$

Seperti persamaan (7), dimana titik – titik yang dimisalkan adalah z_1, z_2, $\cdots$, z_n sehingga $\tilde{h}_i(x)$ dapat ditulis

$$\tilde{h}_i(x) = (x - z_i)[l_i(x)]^2$$

menjadi

$$\tilde{h}_i(x) = \frac{l_i(x)\phi_n(x)}{\phi'_n(z_i)}, \quad (20)$$

dengan $\phi_n(x) = (x - z_1)\cdots(x - z_n)$

dari persamaan (20) disubstitusikan ke persamaan (19) diperoleh

$$\int_{-1}^{1} \phi_n(x) l_i(x)dx = 0,. \quad (21)$$

Berdasarkan rumus Interpolasi Lagrange menunjukkan bahwa semua polinomial berderajat $\le n-1$ dapat ditulis sebagai kombinasi dari $l_1(x)$, $l_2(x)$, $\cdots$, $l_n(x)$, maka persamaan (3.2.2.6) menunjukkan bahwa $\phi_n(x)$ ortogonal pada semua polinomial berderajat $\le n-1$ pada interval

[-1,1]. Sehingga dapat didefinisikan sebagi berikut :

$\int_{-1}^{1} \phi_n(x) g_m(x) dx = 0$, (22)

dimana $g_m(x) =$ semua polinomial dengan derajat $\leq n-1$,

Untuk menentukan pembuat nol $\phi_n(x)$ dapat menggunakan proses gram – schmidt.

Polinomial ortogonal berderajat n yang mempunyai norm 1 (misalkan $\Phi_n(x)$) dan koefisien x^n positip maka deret $\{\Phi_n(x)\}$ adalah tunggal.[2]

Definisi .1 [2]

Suatu hasil kali dalam polinomial dan norm polinomial pada interval [-1,1] terhadap fungsi bobot w(x) = 1 dapat dinotasikan sebagai berikut :

$(g_m, h_n) = \int_{-1}^{1} g_m(x) h_n(x) dx$,

dan $\|g_m\| = \sqrt{\int_{-1}^{1} g_m(x) g_m(x) dx}$.

Jika $\phi_n(x)$ ortogonal semua polinomial dengan derajat $\leq n-1$ maka $\phi_n(x)$ ortogonal dengan $\Phi_0(x)$, $\Phi_1(x)$, $\cdots$, $\Phi_{n-1}(x)$, dengan $\Phi_n(x) = \dfrac{\phi_n(x)}{\|\phi_n\|}$.

Sehingga $\phi_n(x)$ dapat dibentuk dengan $\Phi_0(x)$, $\Phi_1(x)$, $\cdots$, $\Phi_{n-1}(x)$ melalui proses gram – schmidt sebagai berikut :

$\phi_n(x) = a_0\Phi_0(x) + \cdots + a_{n-1}\Phi_{n-1}(x) + x^n$

dengan $a_i = -(x^n, \Phi_i)$, $i = 1, 2, \cdots,$ n-1

sehingga $\phi_n(x)$ dapat dibentuk $\Phi_n(x)$ yang menjadi polinomial ortonormal dari polinomial Legendre.

Sehingga berlaku persamaan,

$A_n \phi_n(x) = p_n(x)$,

(23)

A_n : koefisien x^n pada polinomial Legendre derajat n $(p_n(x))$

Terlihat bahawa $\phi_n(x)$ mempunyai pembuat nol sama dengan polinomial Legendre $(p_n(x))$, sehingga menunjukkan bahwa titik – titik yang diperoleh dari interpolasi Hermit adalah tunggal, yaitu $z_i = x_i, \forall i \in n$.

2.2.3. Rumus Bobot

Rumus bobot/ koefisien – koefisien pada persamaan (17) dapat disederhanakan menjadi rumus yang mudah dikerjakan untuk n yang lebih besar, sebagai berikut :

Identitas cristoffel diperoleh dari persamaan rekursi polinomial Legendre seperti yang ditunjukkan pada Lemma 1. Persamaan rekursi polinomial Legendre dapat didefinisikan dengan

$(2n+1)xp_n(x) = (n+1)p_{n+1}(x) + (n)p_{n-1}(x)$

. (24)

Lemma 1.[3]

Persamaan identitas cristoffel polinomial Legendre didefinisikan dengan

$$\sum_{i=0}^{n} (2i+1) p_i(t) p_i(x)$$
$$= \frac{(n+1)[p_{n+1}(t)p_n(x) - p_{n+1}(x)p_n(t)]}{(t-x)}$$

(25)

Diberikan pembuat nol dari $p_n(x)$ adalah $x_i, i = 1, 2, \cdots, n$, dengan mengganti t dengan x_i pada persamaan (25) didapat sebagai berikut:

$$\sum_{i=0}^{n} (2i+1) p_i(x_i) p_i(x) .$$
$$= \frac{(n+1)[p_{n+1}(x_i)p_n(x) - p_{n+1}(x)p_n(x_i)]}{(x_i - x)}$$

(26)

Kemudian diintegralkan pada interval [-1,1] diperoleh

$$\int_{-1}^{1} \sum_{i=0}^{n} (2i+1) p_i(x_i) p_i(x) dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \frac{(n+1)[p_{n+1}(x_i)p_n(x) - p_{n+1}(x)p_n(x_i)]}{(x_i - x)} dx$$

(27)

Dapat ditulis menjadi

$$\sum_{i=0}^{n}(2i+1)p_i(x_i)\int_{-1}^{1}p_i(x)dx,$$

$$=(n+1)p_{n+1}(x_i)\int_{-1}^{1}\frac{p_n(x)}{(x_i-x)}dx \qquad (28)$$

karena $\sum_{i=1}^{n}(2i+1)p_i(x_i)\int_{-1}^{1}p_i(x)dx=0$,
maka diperoleh

$$\int_{-1}^{1}\frac{p_n(x)}{(x-x_i)}dx=\frac{-2}{(n+1)p_{n+1}(x_i)}$$

(29)

Sehingga diperoleh rumus bobot sebagai berikut :

$$w_i = \frac{-2}{(n+1)p'_n(x_i)p_{n+1}(x_i)} \qquad (30)$$

2.2.4. Rumus Kesalahan (*Error*) Gaus Kuadratur - Legendre

Untuk menentukan Rumus Error Gaus Kuadratur - Legendre sebagai berikut:

Dari persamaan (16), *error* didefinsikan sebagai berikut:

$$E_n(f)=\frac{f^{(2n)}}{(2n)!}(\xi)\int_{-1}^{1}[\psi(x)]^2dx,\ \xi\in[-1,1]$$

(31)

dengan $\psi(x)=\frac{p_n(x)}{A_n}$

dengan menggunakan sifat rekursi polinomial Legendre diperolehma ditentukan

$$\int_{-1}^{1}p_n^2(x)dx=\frac{2}{2n+1}. \qquad (32)$$

Karena A_n adalah koefisien x^n pada polinomial Legendre $(p_n(x))$ diperoleh

$$[A_n]^2=\left[\frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\right]^2$$

(33)

dengan mensubstitusikan persamaan (32) dan (33) ke persamaan (31) diperoleh

$$E_n(f)=\frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^2}\cdot\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}$$

(34)

Untuk membuat bentuk error ke bentuk yang lebih mudah dipahami, pertama dinotasikan nilai maksimum fungsi $f(x)$ pada turunan ke-m sebagai

$$M_m=\underset{-1\le x\le 1}{Max}\frac{\left|f^{(m)}(x)\right|}{m!},\ m\ge 0, \qquad (35)$$

dengan $f(x)$: fungsi yang dapat diturunkan tak terbatas pada $[-1,1]$, terdapat supremum untuk $_{m\ge 0}\ M_m<\infty$.

Secara umum, sebagian besar fungsi $f(x)$, $M_m\to 0$ seiring $m\to\infty$ contohnya, $f(x)=e^x$ dan $f(x)=\cos(x)$.

Jika dimisalkan

$$e_n=\frac{2^{2n+1}(n!)^4}{(2n+1)[(2n)!]^2}, \qquad (36)$$

didefinisikan rumus *stirling* sebagai berikut :

$$n!\cong e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}, \qquad (37)$$

maka diperoleh

$$e_n\cong\frac{\pi}{4^n}, \qquad (38)$$

yang menunjukkan bahwa seiring dengan $n\to\infty$ maka $e_n\to 0$, sehingga didapatkan bentuk *error* yang lebih mudah dipahami kecepatan konvergensinya sebagai berikut :

$$\left|E_n(f)\right|\le\frac{\pi}{4^n}M_{2n}. \qquad (39)$$

3. PENUTUP

Berdasarkan pembahasan tentang integrasi numerik yang menggunakan metode Gaus Kuadratur - Legendre, dapat disimpulkan bahwa:

1. Rumus Gaus Kuadratur – Legendre merupakan rumus khusus dari rumus interpolasi Hermit, yang menggunakan sifat ortogonalitas polinomial Legendre.
2. Jika dibandingkan dengan rumus Newton Cotes, Rumus Gaus Kuadratur – Legendre jauh lebih baik karena titik yang digunakan lebih sedikit.
3. Jika $f(x)$ polinomial berderajat $\le 2n-1$ maka dengan mengambil n titik dihasilkan nilai eksak atau error sama dengan nol.

4. DAFTAR PUSTAKA

[1] Munir, Rinaldi, *Metode Numerik*, Edisi ke-5, Informatika, Bandung, 2003.

[2] Atkinson, E, Kendall., *An Introduction to Numerical Analysis*, Second Edition, John Wiley, 1989.

[3] Suyanto., *Algoritma Genetika dalam Matlab*, Edisi ke-1, Andi, Yogyakarta, 2005.

[4] J.Leon, Steven, *Aljabar Linear dan Aplikasinya*, Edisi ke-5, Alih bahasa oleh Drs. Alit Bondan, M.Kom, Erlangga, Jakarta, 2001.

[5] Scheid, Francis, *Analisis Numerik*, Edisi ke-5, Alih bahasa oleh Pantur Silaban, Erlangga, Jakarta, 1995.

[6] Anton, Howard, *Aljabar Linear Elementer*, Edisi ke-5, Alih bahasa oleh Pantur Silaban dan I Nyoman Susila, Erlangga, Jakarta, 1995.

[7] Mathews, H, John., *Numerical Mehods Using Matlabs* , Pearson Prentice Hall, John Wiley, 2004.

[8] Drs. Kartono, M.Si. 2002, *Aljabar Linier, Vektor, dan Eksplorasinya Dengan Maple*, Yogyakarta: Graha Ilmu.

[9] Kaplan, W.1974. *Advanced Calculus*, Second Editon .Massachusetts : Addison – Wesley Publishing Company.

[10] Kaw, Autar. *Gauss Quadradrature Rule, Based on the book : "Gauss Quadradrature Rule"* : General Enginering. *(didowload* pada 3 Mei 2008). http://www.numericalmethods.eng.u sfedu

[11] http://en.wikipedia.org/wiki/ Gaussian quadrature *Gaussian quadrature.* Wikipedia, the free encyclopedia. (*didownload* pada 28 April 2008).