BAB I

PENDAHULUAN

1.1. Latar Belakang.

Pelabelan graf merupakan suatu topik dalam teori graf. Objek kajiannya berupa graf yang secara umum direpresentasikan oleh titik dan sisi serta himpunan bagian bilangan asli yang disebut label. Pertama kali diperkenalkan oleh Sadlàčk (1964), kemudian Stewart (1966), Kotzig dan Rosa (1970). Hingga saat ini pemanfaatan teori pelabelan graf sangat dirasakan peranannya, terutama pada sektor sistem komunikasi dan transportasi, navigasi geografis, radar, penyimpanan data komputer, dan desain *integrated circuit* pada komponen elektronik.

Graf merupakan pasangan himpunan titik dan himpunan sisi. Pengaitan titik-titik pada graf membentuk sisi dan dapat direpresentasikan pada gambar sehingga membentuk pola graf tertentu. Pola-pola yang terbentuk didefinisikan dan dikelompokkan menjadi kelas-kelas graf. Beberapa kelas graf menurut banyaknya sisi yang insiden terhadap titik antara lain graf reguler, yang derajat setiap titiknya adalah sama dan graf irreguler, yang derajat setiap titiknya ada yang tidak sama. Terdapat pula graf petersen yang diperumum yang merupakan salah satu subkelas graf reguler.

Pelabelan merupakan pemetaan injektif yang memetakan unsur himpunan titik dan atau unsur himpunan sisi ke bilangan asli yang disebut label. Pelabelan titik adalah pelabelan dengan domain himpunan titik, pelabelan sisi adalah pelabelan dengan domain himpunan sisi, dan pelabelan total adalah pelabelan dengan domain gabungan himpunan titik dan himpunan sisi. Hingga kini dikenal beberapa jenis pelabelan pada graf, antara lain pelabelan *gracefull*, pelabelan harmoni, pelabelan total tak beraturan, pelabelan ajaib, dan pelabelan anti ajaib. Dalam pengembangan pelabelan ajaib, dikenal pula pelabelan total titik-ajaib, pelabelan total titik ajaib super, pelabelan total sisi-ajaib, dan pelabelan total sisi-ajaib super.

Pada tugas akhir ini, penulis melakukan kajian pelabelan total titik ajaib (*vertex magic total labeling*) pada salah satu subkelas graf reguler yaitu graf Petersen yang diperumum dan perulangan dua graf Petersen yang diperumum.

1.2. Perumusan Masalah

Permasalahan yang akan dibahas dalam tugas akhir ini adalah bagaimana memberikan pelabelan total titik ajaib pada graf Petersen yang diperumum dan perulangan dua graf Petersen yang diperumum.

1.3. Pembatasan Masalah

Permasalahan ini dibatasi pada pembahasan mengenai pelabelan total titik ajaib dengan graf sederhana, terbatas dan tidak berarah. Perulangan graf yang terjadi merupakan perulangan dua graf Petersen yang diperumum yang sama.

1.4. Tujuan Penulisan

Memahami pelabelan total titik ajaib dan konstanta ajaib yang ada didalamnya serta menentukan pelabelan total titik ajaib pada graf Peteresn yang diperumum dan perulangan dua graf Petersen yang diperumum yang merupakan graf tak terhubung.

1.5. Sistematika Penulisan

Sistematika Penulisan dalam tugas akhir ini terbagi menjadi 4 bab yaitu Pendahuluan, Dasar Teori, Pembahasan dan bab yang terakhir adalah Penutup.

Bab I Pendahuluan. Pada bab ini berisi latar belakang, permasalahan yang diangkat, pembatasan masalah, tujuan yang ingin dicapai dan sistematika penulisan. Bab II Dasar Teori. Pada bab ini memuat teori – teori dasar dalam pembahasan mengenai pelabelan total titik ajaib pada graf Petersen yang diperumum. Bab III Pembahasan. Bab ini memuat pembahasan mengenai Pelabelan total titik ajaib pada graf Petersen yang diperumum $P(n,m)$ dan perulangan dua graf Petersen yang diperumum $2P(n,m)$. Bab IV Penutup. Bab ini memuat tentang kesimpulan dan saran dari hasil pembahasan.

BAB II

DASAR TEORI

Untuk menjelaskan *pelabelan total titik ajaib pada graf Petersen yang diperumum* perlu adanya beberapa teori dasar untuk menunjang pembuktian dan mempermudah pemahaman. Beberapa dasar teori meliputi definisi graf, beberapa istilah dalam graf, beberapa jenis graf, definisi dan beberapa jenis pelabelan graf.

2.1 Graf

2.1.1 Pengertian dan Terminologi Graf

Definisi 2.1.1.1 [10]

Graf G merupakan pasangan himpunan (V ,E) dengan

V = himpunan tidak kosong dari titik (*vertex*), dan

E = himpunan sisi (*edge*) yang menghubungkan sepasang titik atau dapat ditulis dengan notasi G = (V , E).

Titik biasa digunakan untuk melambangkan objek, sedangkan **sisi** biasa digunakan untuk melambangkan jalan penghubung antara dua objek.

Definisi graf menyatakan bahwa V tidak boleh kosong, sedangkan E boleh kosong. Jadi, sebuah graf dimungkinkan tidak mempunyai sisi satu buah pun, tetapi titiknya harus ada minimal satu. Graf dengan satu titik dan tidak mempunyai sisi disebut **graf trivial**.

Titik pada graf dapat dinomori dengan huruf, seperti a, b, c, ..., dengan bilangan asli 1, 2, 3, ..., atau gabungan keduanya. Sedangkan e

adalah sisi yang menghubungkan titik v_i dengan titik v_j, maka e dapat ditulis sebagai $e = (v_i, v_j)$ atau $e = (v_i v_j)$.

Secara geometri graf dapat digambarkan sebagai sekumpulan titik di dalam bidang dua dimensi yang dihubungkan dengan sekumpulan sisi.

Dalam mempelajari graf terdapat beberapa terminologi (istilah) yang berkaitan dengan graf. Berikut ini didefinisikan beberapa terminologi yang akan sering dipakai pada pembahasan tulisan ini.

Definisi 2.1.1.2 [10]

Misal pada graf G terdapat 2 titik v_j dan v_k, dua buah titik pada graf G dikatakan berdekatan *(adjecent)* bila keduanya terhubung langsung dengan sebuah sisi.

Definisi 2.1.1.3 [10]

Untuk sembarang sisi $e = (v_j, v_k)$, sisi e dikatakan **insiden** dengan titik v_j dan titik v_k.

Definisi 2.1.1.4 [9]

Misal terdapat dua buah titik u dan v di dalam graf, dimana u dan v saling berdekatan. Jika sisi e insiden terhadap titik u dan v, maka titik u dan v disebut **endpoint** dari sisi e.

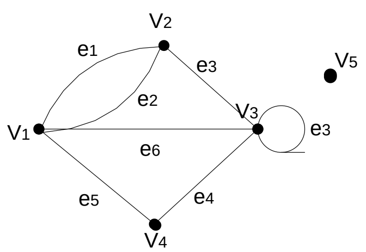
Definisi 2.1.1.5 [10]

Misal terdapat beberapa sisi berbeda pada graf yang menghubungkan pasangan titik yang sama, maka graf yang demikian dapat dikatakan mempunyai **sisi ganda** *(multiple edge)*. Sisi yang menhibingkan titik yang sama disebut **loop.**

Definisi 2.1.1.6 [11]

Derajat (*degree*) sebuah titik v pada sebuah graf G, dituliskan dengan der (v), adalah banyak sisi yang insiden pada v, dengan kata lain jumlah sisi yang memuat v sebagai titik ujung. Titik dengan derajat nol disebut **titik terisolasi** (*isolated vertex*).

Contoh :



Gambar 2.1 Graf G_1

Graf G_1 memuat $V(G_1) = \{v_1, v_2, v_3, v_4, v_5\}$ dan

$E(G_1) = \{e_1, e_2, e_3, e_4, e_5, e_6\}$.

(i) Pada graf G_1, titik v_2 dan titik v_3 merupakan titik yang berdekatan, sedangkan titik v_2 dan titik v_4 **bukan** merupakan titik yang berdekatan.

(ii) Pada graf $G_{1,}$ sisi e_3 insiden dengan titik v_2 dan titik v_3, tetapi **tidak** terdapat sisi yang insiden dengan titik v_2 dan titik v_4.

(iii) Pada graf $G_{1,}$ titik v_2 dan titik v_3 merupakan *endpoint* dari sisi $e_{3.}$

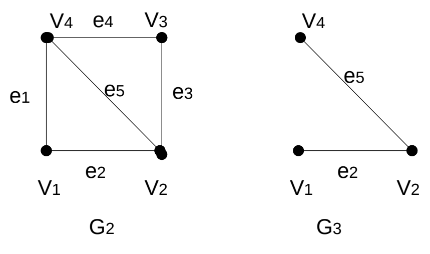
(iv) Graf $G_{1,}$ memuat sisi ganda yaitu sisi e_1 dan sisi $e_{2.}$

(v) Pada graf $G_{1,}$ der (v_3) = 5, der (v_4) = 2, dan der (v_5) = 0.

Definisi 2.1.1.7 [9]

Misalkan G = (V , E), sebuah sub graf dari graf G merupakan graf yang semua titik dan sisinya berada pada graf G. Dengan kata lain, sebuah graf H = (V_1, E_1) adalah **subgraf** dari G jika V (H)$\subseteq$ V (G), yaitu jika titik – titik dari H juga titik – titik dari G, dan E (H)$\subseteq$ E (G) yaitu, jika sisi – sisi dari H juga sisi – sisi dari G.

Contoh :



Gambar 2.2 Graf G_2 dan G_3

Graf G_2 memuat V (G_2) ={$v_{1,}$ $v_{2,}$ $v_{3,}$ v_4} dan

E (G_2) ={$e_{1,}$ $e_{2,}$ $e_{3,}$ $e_{4,}$ e_5}.

Graf G_3 memuat $V(G_3) = \{v_{1}, v_{2}, v_{4}\}$ dan $E(G_3) = \{e_{2}, e_{5}\}$.

Karena $V(G_3) \subseteq V(G_2)$ dan $E(G_3) \subseteq E(G_2)$ maka G_3 merupakan subgraf dari G_3.

Definisi 2.1.1.8 [10]

Suatu **walk** pada graf G adalah suatu urutan yang terdiri atas titik - titik dan sisi - sisi bergantian, dimana setiap sisi insiden dengan titik terdekat, dengan diawali dan diakhiri pada suatu titik.

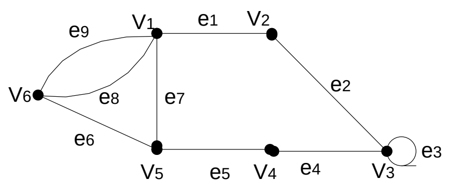
Definisi 2.1.1.9 [11]

Suatu *walk* yang setiap sisinya berbeda maka *walk* itu disebut **trail**. Suatu *trail* yang setiap titiknya berbeda, maka disebut **path**.

Definisi 2.1.1.10 [10]

Suatu *walk* tertutup dalam graf G jika semua sisinya berbeda, maka *walk* itu disebut **trail tertutup** (*closed trail).* Jika semua titik - titiknya juga berbeda serta diawali dan diakhiri dengan titik yang sama maka *trail* itu disebut **sikel** (*cycle).*

Contoh :



Gambar 2.3 Graf G_4

Walk : $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_3, e_4, v_4$

Trail : $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_3, v_3, e_4, v_4$

Path : $v_1, e_1, v_2, e_2, v_3, e_4, v_4$

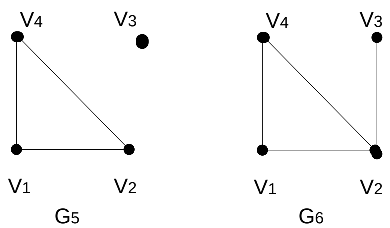
Trail tertutup : $v_1, e_7, v_5, e_6, v_6, e_8, v_1$

Sikel : $v_1, e_7, v_5, e_6, v_6, e_8, v_1$

Definisi 2.1.1.11 [9]

Graf tak berarah G disebut **graf terhubung** *(connected graphs),* jika untuk setiap pasang titik v_i dan v_j di dalam himpunan V terdapat path dari v_i ke v_j. Jika tidak, maka G disebut **graf tak terhubung** (*disconnected graph*). Graf yang hanya terdiri atas satu titik saja (tanpa sisi) tetap dikatakan terhubung, karena titik tunggalnya terhubung dengan dirinya sendiri.

Contoh :



Gambar 2.4 Graf G_5 dan G_6

Graf G_5 pada gambar 2.4 merupakan graf tak terhubung.

Graf G_6 pada gambar 2.4 merupakan graf terhubung.

2.1.2 Jenis - Jenis Graf

Berdasarkan sifatnya graf dapat dikelompokkan menjadi beberapa kategori (jenis) bergantung pada sudut pandang pengelompokannya. Pengelompokan graf dapat dipandang berdasarkan ada tidaknya sisi ganda, berdasarkan banyak titik, atau berdasarkan orientasi arah pada sisi.

Berdasarkan ada tidaknya sisi ganda pada suatu graf, maka secara umum graf dapat digolongkan menjadi 2 jenis:

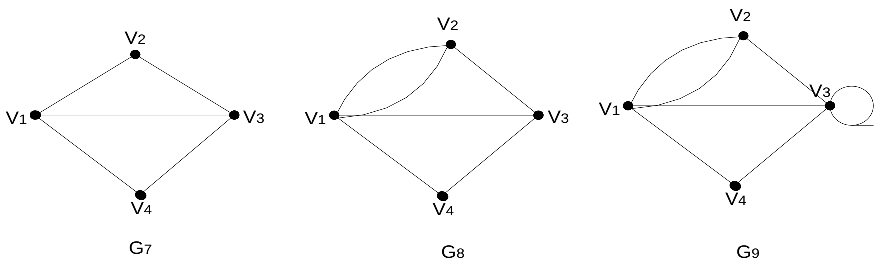
1. Graf sederhana (*simple graph*)

   Graf sederhana adalah graf yang tidak mengandung sisi ganda maupun *loop*.

2. Graf tak-sederhana (*unsimple graph*)

   Graf tak-sederhana adalah graf yang mengandung sisi ganda atau *loop*. Ada dua macam graf tak-sederhana, yaitu graf ganda *(multigraph)* dan graf semu *(pseudograph).* **Graf ganda** adalah graf yang mengandung sisi ganda. **Graf semu** adalah graf yang mengandung sisi ganda dan *loop*.

Contoh :



Gambar 2.5 Graf G_7, G_8 dan G_9

Graf G_7 pada gambar 2.5 merupakan graf sederhana.

Graf G_8 pada gambar 2.5 merupakan graf ganda.

Graf G_9 pada gambar 2.5 merupakan graf semu.

Definisi 2.1.2.1

Banyak titik atau sisi pada graf disebut sebagai kardinalitas graf, banyak titik dinyatakan dengan *p* dan banyak sisi dinyatakan dengan *q*.

Berdasarkan banyak titik pada suatu graf, maka secara umum graf dapat dikelompokkan menjadi dua jenis:

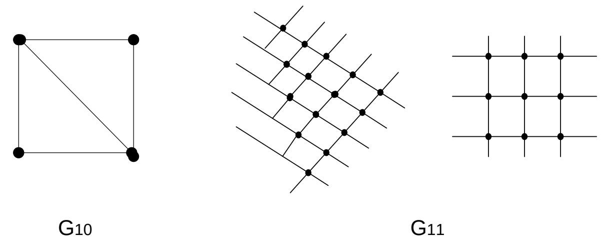
1. Graf berhingga *(limited graph)*

   Graf berhingga adalah graf yang jumlah titiknya *n*, berhingga.

2. Graf tak-berhingga *(unlimited graph)*

   Graf tak-berhingga adalah graf yang jumlah titiknya *n*, tak berhingga.

Contoh :



Gambar 2.6 Graf G_{10} dan G_{11}

Graf G_{10} pada gambar 2.6 merupakan graf berhingga.

Graf G_{11} pada gambar 2.6 merupakan graf tak berhingga.

Berdasarkan orientasi arah pada sisi, maka secara umum graf dikelompokkan menjadi dua jenis:

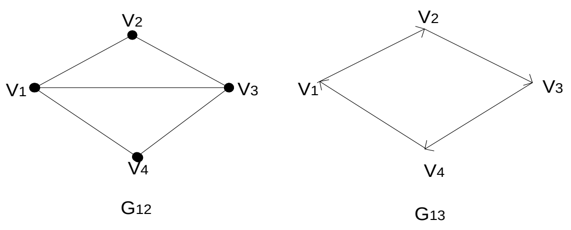
1. Graf tak-berarah *(undirected graph)*

   Graf tak-berarah adalah graf yang sisinya tidak mempunyai orientasi arah. Pada graf tak berarah, urutan pasangan titik yang dihubungkan oleh sisi tidak diperhatikan. Jadi $(v_j, v_k) = (v_k, v_j)$ adalah sisi yang sama.

2. Graf berarah *(directed graph)*

   Graf berarah adalah graf yang setiap sisinya diberikan orientasi arah. Pada graf berarah (v_j, v_k) dan (v_k, v_j) menyatakan dua buah sisi yang berbeda, dengan kata lain $(v_j, v_k) \neq (v_k, v_j)$. Untuk sisi (v_j, v_k) titik v_j dinamakan **titik asal** *(initial vertex)* dan simpul v_k dinamakan **titik terminal** *(terminal vertex)*.

Contoh :



Gambar 2.7 Graf G_{12} dan G_{13}

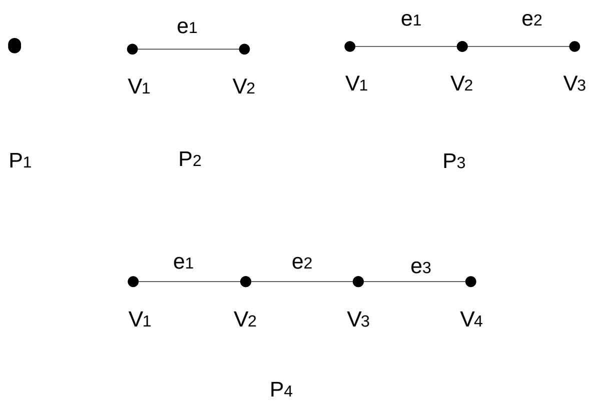
Graf G_{12} pada gambar 2.7 merupakan graf tak berarah.

Graf G_{13} pada gambar 2.7 merupakan graf berarah.

Terdapat beberapa jenis graf sederhana khusus. Berikut ini didefinisikan beberapa graf khusus yang sering ditemukan :

a) Graf Path *(Path Graph)*

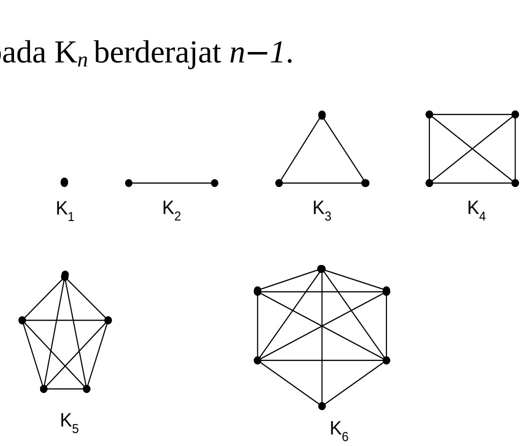
Graf path dengan *n* titik dinotasikan dengan P_n, yaitu graf yang terdiri dari path tunggal. P_n memiliki *n*-1 sisi.



Gambar 2.8 Graf Path

b) Graf Lengkap *(Complete Graph)*

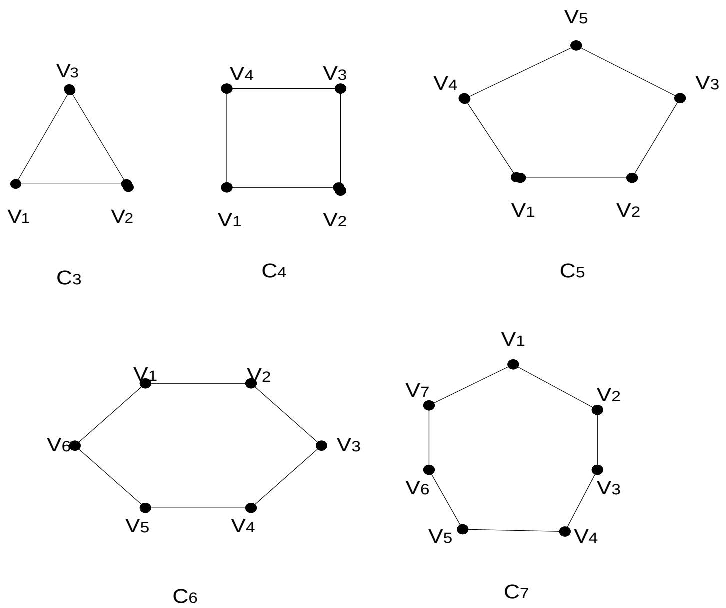
Graf Lengkap dengan *n* titik dinotasikan K_n yaitu sebuah graf jika setiap titik adalah terhubung kepada setiap titik lainnya. Setiap titik pada K_n berderajat $n-1$.



Gambar 2.9 Graf Lengkap

c) Graf Sikel *(Cycle Graph)*

Graf sikel adalah graf sederhana yang setiap titik nya berderajat dua. Graf sikel dengan n titik dilambangkan dengan C_n, $n \geq 3$ adalah graf dengan n titik yaitu $v_1, v_2, \ldots, v_n$ dan sisi - sisi $(v_1, v_2), (v_2, v_3), \ldots, (v_{n-1}, v_n), (v_n, v_1)$.



Gambar 2.10 Graf Sikel

2.2 Pemetaan

Definisi 2.2.1 [9]

Misalkan A dan B adalah dua himpunan yang tidak kosong. Suatu cara atau aturan yang memasangkan setiap elemen dari himpunan A dengan tepat satu elemen di himpunan B disebut pemetaan dari himpunan A ke himpunan B. Pemetaan dari himpunan A ke himpunan B diberi notasi λ, yaitu: $\lambda : A \to B$

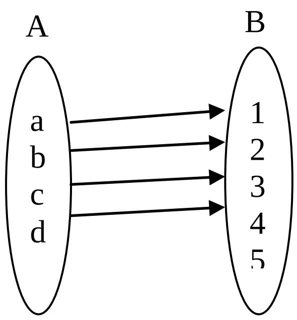
Selanjutnya himpunan *A* disebut sebagai daerah asal (*domain*) dan himpunan *B* disebut daerah kawan (*kodomain*).

Secara umum, pemetaan dapat digolongkan menjadi 3 golongan sebagai berikut :

Definisi 2.2.2 [9]

Pemetaan satu-satu (*injektif*) adalah pemetaan dimana setiap elemen di daerah kodomain yang berpasangan mempunyai pasangan elemen tepat satu di daerah domain, dapat dituliskan secara matematika berikut : Pemetaan $\lambda : A \rightarrow B$, injektif $\Leftrightarrow \forall x, y \in A, \lambda(x) = \lambda(y) \Rightarrow x = y$.

Contoh :

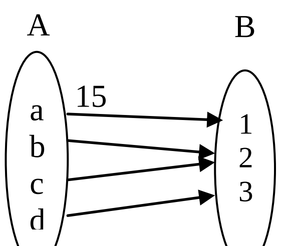


Gambar 2.11 Pemetaan injektif

Definisi 2.2.3 [9]

Pemetaan pada (*surjektif*) adalah pemetaan dimana semua elemen didaerah kodomain mempunyai pasangan elemen didaerah domain, dapat dituliskan secara matematika berikut : Pemetaan $\lambda : A \rightarrow B$, surjektif $\Leftrightarrow \forall x \in A, \exists y \in B, \ni \lambda(x) = y$.

Contoh :

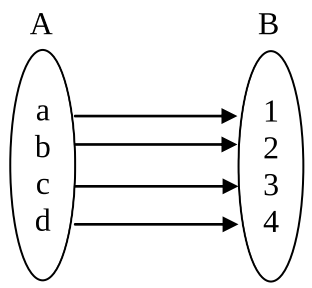


Gambar 2.12 Pemetaan surjektif

Definisi 2.2.4 [9]

Pemetaan korespondensi satu-satu (*bijektif*) adalah pemetaan yang memenuhi pemetaan *injektif* dan pemetaan *surjektif*. Istilah ini berasal dari kenyataan bahwa setiap elemen domain akan berkorespondensi secara unik ke elemen kodomain dan sebaliknya

Contoh :



Gambar 2.13 Pemetaan bijektif

2.3 Pelabelan Graf

Definisi 2.3.1 [1]

Pelabelan pada suatu graf adalah sebarang pemetaan atau fungsi yang memasangkan unsur – unsur graf (titik atau sisi) dengan bilangan (biasanya bilangan bulat positif). Jika domain dari pemetaan adalah titik, maka pelabelan disebut pelabelan titik (*vertex labeling*). Jika domainnya adalah sisi, maka disebut pelabelan sisi (*edge labeling*), dan jika domainnya titik dan sisi, maka disebut pelabelan total (*total labeling*). Pada graf terdapat banyak jenis pelabelan.

Definisi 2.3.2 [1]

Misalkan G graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E. **Pelabelan ajaib** (*magic labeling*) pada graf G adalah pemetaan bijektif λ dari E ke himpunan bilangan integer positif yang berbeda, sehingga untuk setiap titik $v \in V$, penjumlahan semua label sisi e yang insiden terhadap titik v sama.

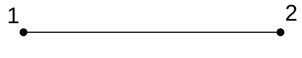
Berikut ini beberapa jenis pelabelan ajaib pada suatu graf.

a. Misalkan G graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E. Banyak titik di G adalah p dan banyak sisi di G adalah q. **Pelabelan titik sisi ajaib** (*edge-magic vertex labeling*) pada graf G adalah pemetaan bijektif λ dari V pada himpunan $\{1, 2, 3, \ldots, p\}$ sehingga untuk sebarang sisi $(x\ y)$ di G berlaku

$$\lambda(x) + \lambda(y) = k$$

untuk suatu konstanta k. Selanjutnya k disebut konstanta ajaib pada G dan G disebut graf **titik sisi ajaib**.

Contoh:



Gambar 2.14 Pelabelan Titik Sisi Ajaib Graf P_2

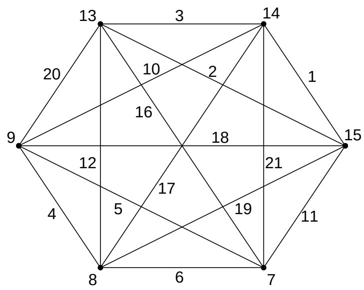
Pelabelan titik sisi ajaib graf P_2 pada gambar 2.14 mempunyai k=3.

b. Misalkan G graf dengan himpunan titik *V* dan himpunan sisi *E*. Banyak titik di G adalah *p*, banyak sisi di G adalah *q dan h* merupakan banyak titik dan sisi pada graf G atau $h = p+q$. **Pelabelan total titik ajaib** (*vertex-magic total labeling*) pada graf G adalah pemetaan bijektif λ dari $V \cup E$ pada himpunan {1, 2, 3, …, *h*} sehingga untuk sebarang titik *x* di G berlaku

$$\lambda(x) + \sum \lambda(xy) = k$$

dengan *y merupakan titik yang berdekatan dengan titik x*. Selanjutnya *k* disebut konstanta ajaib pada G dan G disebut **graf total titik ajaib.**

Contoh **:**



Gambar 2.15 Pelabelan Total Titik Ajaib Graf K_6

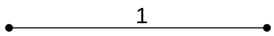
Pelabelan total titik ajaib graf K_6 pada gambar 2.15 mempunyai k=66.

c. Misalkan G graf dengan himpunan titik *V* dan himpunan sisi *E*. Banyak titik di G adalah *p* dan banyak sisi di G adalah *q*. **Pelabelan sisi titik ajaib** (*vertex-magic edge labeling*) pada graf G adalah pemetaan bijektif λ dari *E* pada himpunan {1, 2, 3, …, *q*} sehingga untuk sebarang titik *x* di G berlaku

$$\sum \lambda(xy) = k$$

dengan *y merupakan titik yang berdekatan dengan titik x*. Selanjutnya *k* disebut konstanta ajaib pada G dan G disebut graf **sisi titik ajaib.**

Contoh:



Gambar 2.16 Pelabelan Sisi Titik Ajaib Graf P_2

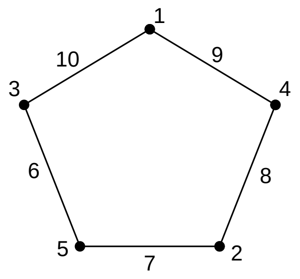
Pelabelan sisi titik ajaib Graf P_2 pada gambar 2.16 mempunyai k=1.

d. Misalkan G graf dengan himpunan titik V dan himpunan sisi E. Banyak titik di G adalah p, banyak sisi di G adalah q *dan* h merupakan banyak titik dan sisi pada graf G atau $h = p+q$. **Pelabelan total sisi ajaib** (*edge-magic total labeling*) pada graf G adalah pemetaan bijektif λ dari $V \cup E$ pada himpunan $\{1, 2, 3, \ldots, h\}$ sehingga untuk sebarang sisi (xy) di G berlaku

$$\lambda(x) + \lambda(xy) + \lambda(y) = k$$

untuk suatu konstanta k. Selanjutnya k disebut konstanta ajaib pada G dan G disebut graf total sisi ajaib.

Contoh :



Gambar 2.17 Pelabelan Total Sisi Ajaib Graf C_5

Pelabelan total sisi ajaib graf C_5 pada gambar 2.17 mempunyai k=14.