UNIVERSITÄT
REGENSBURG

UNIVERSITÉ
PARIS. DIDEROT
(Paris 7)

DIE ENTWICKLUNG FUNKTIONALEN DENKENS IN DER SEKUNDARSTUFE I – VERGLEICHENDE ANALYSEN UND EMPIRISCHE STUDIEN ZUM MATHEMATIKUNTERRICHT IN DEUTSCHLAND UND FRANKREICH

LA PENSÉE FONCTIONNELLE DES ÉLÈVES DE 10 À 16 ANS – ANALYSES COMPARATIVES ET ÉTUDES EMPIRIQUES DE SON ENSEIGNEMENT EN FRANCE ET EN ALLEMAGNE

DISSERTATION ZUR ERLANGUNG DES DOKTORGRADES DER NATURWISSENSCHAFTEN (DR. RER. NAT.) AN DER NWF I – MATHEMATIK DER UNIVERSITÄT REGENSBURG

IM COTUTELLE VERFAHREN MIT DER UNIVERSITÄT PARIS 7 – DENIS DIDEROT

vorgelegt von

Pascal Stölting aus München

2008

Promotionsgesuch eingereicht am 26.11.2007

Die Arbeit wurde angeleitet von
Rudolf vom Hofe und Alain Kuzniak

Prüfungsausschuss:
Michelle Artigue, Président
Rudolf vom Hofe
Alain Kuzniak
François Pluvinage
Werner Blum
Rudolf Sträßer

Danksagung

Mein Dank gilt all jenen Personen und Organisationen, die es mir durch vielfältige Unterstützungen auf verschiedenen Ebenen ermöglicht haben, die vorliegende Arbeit zu verfassen.

Diese Arbeit ist im Rahmen einer Cotutelle-Vereinbarung zwischen der Universität Regensburg und der Universität Paris 7 – Denis Diderot entstanden. Die Organisation und Durchführung einer solchen Promotion fordert einen großen Einsatz von allen betroffenen Personen und Institutionen.
Zuallererst möchte ich mich aus diesem Grund meinen beiden Betreuern Rudolf vom Hofe und Alain Kuzniak bedanken, die mich nicht nur in wissenschaftlicher Hinsicht hervorragend unterstützt und beraten haben. Ich durfte in den letzten Jahren sehr viel von ihnen lernen, was meine Forschung stark geprägt hat.
Meinen Dank möchte ich aber auch den Universitäten Regensburg und Paris 7 – Denis Diderot aussprechen, die mich immer bei der Durchführung dieser internationalen Dissertation unterstützt haben.

Ohne Unterstützung und Rückhalt von Familie, Freunden und Kollegen hätte diese Arbeit nicht zustanden kommen können. Insbesondere möchte ich mich herzlich bei Sonia Martinez Sanz und Sebastian Wartha bedanken, die mich in den letzten drei Jahren begleitet und sowohl wissenschaftlich als auch emotional unterstützt haben.

Die finanzielle Unterstützung verdanke ich den Universitäten Regensburg und Bielefeld, an denen ich als wissenschaftlicher Angestellter tätig war. Weitere Unterstützung habe ich von der Deutschen Forschungsgemeinschaft, dem Deutschen Akademischen Austauschdienst und der Deutsch-Französischen Hochschule erhalten, wobei die letzten beiden meine Forschungen an der Universität Paris 7 – Denis Diderot ermöglicht haben.

Schließlich möchte ich mich bei allen Lehrkräften und Schülern bedanken, die durch ihre Teilnahme an den Interviewstudien oder den schriftlichen Erhebungen die Grundlage für die Erarbeitung der Ergebnisse gelegt haben.

Inhaltsverzeichnis

Einleitung

Beim Abschluss eines neuen Handyvertrages steht ein Kunde in Deutschland zurzeit vor folgender Wahl: Soll er sich, trotz der relativ hohen Flatrate-Gebühren, für eine der groß beworbenen Handy-Flatrates entscheiden, bei einem klassischen Vertrag mit Grundgebühr und Minutenpreisen bleiben oder doch eine Prepaid-Karte nehmen, bei der zwar keine Grundgebühren, aber hohe Minutenpreise anfallen?
Um eine fundierte Antwort auf diese Frage geben zu können, muss man erkennen, dass es sich um ein Problem handelt, bei dem zwei Größen voneinander abhängen. Das Kriterium zur Beurteilung ist der zu zahlende Preis in Abhängigkeit von der Dauer der geführten Gespräche. Jeder Dauer ist ein Preis zugeordnet und der Preis variiert bei jedem Angebot in unterschiedlicher Art und Weise mit Dauer.
In diesem Beispiel handelt es sich um ein lineares Wachstum der zu zahlenden Preise. Bei Geldanlagen oder der Aufnahme eines Kredites schafft erst ein Verständnis von nichtlinearen Wachstumsarten die Möglichkeit, Entwicklungen konkret zu erfassen und beurteilen zu können.

Diese beiden Beispiele zeigen exemplarisch, in welcher Vielfalt funktionale Situationen im Alltag auftreten und bei welchen Entscheidungsprozessen ein Verständnis für funktionale Zusammenhänge gefordert ist. Die Fähigkeit, mit funktionalen Abhängigkeiten im Alltag umzugehen und diese fundiert beurteilen zu können, stellt eine wichtige Vorraussetzung für einen mündigen Bürger dar. Die dazu gebrauchten Kenntnisse, Vorstellungen und Fähigkeiten sind ein zentrales Stoffgebiet der Sekundarstufe I.

Die Ergebnisse von Untersuchungen wie PISA oder PALMA zeigen aber, dass viele Schüler in Deutschland Schwierigkeiten mit Aufgaben zu funktionalen Situationen haben und ihre Leistungen hinter den Leistungen von Schülern anderer Länder zurückbleiben.

Dieser Gegensatz zwischen der zentralen Bedeutung des Stoffgebietes und den unterdurchschnittlichen Leistungen deutscher Schüler stellt den Ausgangspunkt der vorliegenden Arbeit dar. Er wirft die Fragen nach den tatsächlich geforderten Fähigkeiten und Vorstellungen, sowie nach deren Umsetzung und Förderung in den Curricula auf.

Analysen der typischen Fehler führen zu der Fragestellung, welche Veränderungen des Unterrichts dazu beitragen können, dass diese Schwierigkeiten nicht mehr oder zumindest weniger häufig auftreten.
Die vorliegende Arbeit befasst sich aus diesem Grund mit den Herangehensweisen von Deutschland und Frankreich. Diese beiden großen europäischen Länder arbeiten mit unterschiedlichen Konzepten und es besteht noch ein relativ geringer wissenschaftlicher Austausch, so dass von einem Vergleich gegenseitige Impulse erwartet werden können. Im Rahmen dieser Arbeit sollen die Theorien und Vorgehensweisen beider Länder miteinander verglichen werden um Stärken und Schwächen herauszuarbeiten und um in der Folge Veränderungsvorschläge zu entwickeln.

Im ersten Kapitel wird der Untersuchungsgegenstand detailliert beschrieben. Mit dem Begriff *funktionales Denken*, der hier klar definiert wird, werden die Vorstellungen und Fähigkeiten verbunden, die für einen Umgang mit funktionalen Situationen gebraucht werden. Die Ausbildung einer funktionalen Denkweise stellt also ein zentrales Ziel des Unterrichts der Sekundarstufe I dar. Die Möglichkeiten ihrer Ausbildung sollen in den Lehrplänen und Lehrbüchern von Deutschland und Frankreich untersucht werden. Außerdem ist es ein Ziel dieser Untersuchung, ihre tatsächliche Anwendung durch Schüler aus beiden Ländern mit Hilfe von Analysen der Ergebnisse von PISA und PALMA, und insbesondere durch eine parallel durchgeführte Interviewstudie, zu dokumentieren.

Vor den eigentlichen vergleichenden Analysen zur funktionalen Denkweise wird zunächst einige Theoriearbeit durchgeführt. Mit ihr sollen einerseits der theoretische Rahmen der funktionalen Denkweise gesetzt werden und andererseits Analysewerkzeuge entwickelt werden.

Das zweite Kapitel beschäftigt sich zunächst mit der Geschichte des Funktionsbegriffs. Es soll gezeigt werden, auf welche Schwierigkeiten die historische Entwicklung gestoßen ist, wie diese überwunden werden konnten und was die ausschlaggebenden Faktoren für substantielle Fortschritte waren. Speziell diesen Faktoren wird bei der Definition von funktionalem Denken ausreichend Gewicht verliehen. Die Identifikation von Hürden in der historischen Entwicklung ist auch für die Analyse von heutigen Schülerlösungen wichtig.

Das dritte Kapitel betrachtet Theoriekonzepte aus Deutschland, Frankreich und der internationalen Forschung. Ziele des Kapitels sind die genaue Klärung des theoretischen Fundamentes der funktionalen Denkweise und die Erarbeitung eines theoretischen Hintergrundes für später folgende Analysen. Motiviert durch die binationale Ausrichtung dieser Dissertation, wird als drittes Ziel dieses Kapitels angestrebt, die theoretischen Rahmenkonzepte beider Forschungsgemeinschaften zum betrachteten Forschungsgegenstand zusammenzuführen um dadurch einen Beitrag zum Austausch unterschiedlicher Forschungstraditionen zu leisten.

Es gibt bereits eine große Fülle an Forschungsarbeiten, die sich mit dem Erlernen und Arbeiten mit funktionalen Abhängigkeiten beschäftigen. Ziel des vierten Kapitels ist es, einen Überblick über deren Ergebnisse zu geben und diese so aufzubereiten, dass sie sich in den theoretischen Rahmen aus dem dritten Kapitel einpassen und die dort entwickelten Analysewerkzeuge besser nutzbar machen. Die Berücksichtigung von bereits bekannten Stärken und Schwächen schärft den Blick für deren Identifizierung bei den hier durchgeführten Analysen und erleichtert die Suche nach den zugrunde liegenden Ursachen, sowie nach möglichen Veränderungsmöglichkeiten.

Im Anschluss an diese theoretischen Arbeiten können die Forschungsfragen für die Analysen der Curricula im fünften Kapitel präzise formuliert werden. Sie beziehen sich nun auf eine theoretisch fundiert definierte funktionale Denkweise und für die Beantwortung der Fragen wurden vor dem zuvor entwickelten theoretischen Hintergrund mehrere Analysewerkzeuge ausgearbeitet.

Im sechsten und siebten Kapitel wird anhand der Lehrpläne und Schulbücher untersucht, inwieweit die Schüler beider Länder bei der Ausbildung einer funktionalen Denkweise unterstützt werden.

Zunächst werden im sechsten Kapitel die beiden Länder mit ihren jeweiligen Bildungssystemen gegenüber gestellt, um zu gewährleisten, dass eine grundsätzliche Vergleichbarkeit vorhanden ist. Nach einem kurzen Überblick über die historische Entwicklung der Lehrpläne werden die aktuellen Lehrpläne von Deutschland (am Beispiel von Bayern) und von Frankreich betrachtet. Dabei werden alle Klassenstufen der Sekundarstufe I analysiert und in Bayern auf alle Schulformen eingegangen. Mit dem Studium des intendierten Curriculums sollen die Möglichkeiten herausgearbeitet werden, welche die Schüler zur Ausbildung einer funktionalen Denkweise haben.

Diese Untersuchungen werden im siebten Kapitel fortgesetzt. Mit Detailanalysen des potentiellen Curriculums wird gezeigt, wie die Schulbuchautoren die Vorgaben der Lehrpläne umsetzen und welche Inhalte, Fähigkeiten und Vorstellung mit Bezug zur funktionalen Denkweise angesprochen werden.

Bei der Betrachtung der Lehrpläne und der Schulbücher sind insbesondere die Inhalte von Interesse, bei denen sich die Herangehensweisen beider Länder unterscheiden. Von diesen Unterschieden sind Impulse für Veränderungen zu erwarten, so dass ihnen bei der Untersuchung der Schülerleistung spezielle Aufmerksamkeit gewidmet wird.

In den Kapiteln acht und neun wird versucht, die nach den Analysen der vorangegangenen Kapitel erwarteten Stärken und Schwächen in der Praxis zu identifizieren. Mit zwei unterschiedlichen Vorgehensweisen soll untersucht werden, wie die Schüler mit der funktionalen Denkweise arbeiten können und welche Schwierigkeiten dabei auftreten.

Im achten Kapitel werden quantitative Analysen durchgeführt und Verbindungen zu den Resultaten der zwei vorangegangen Kapiteln hergestellt. Zunächst werden die Leistungen der deutschen und der französischen Schüler auf der Subskala *Veränderung und Beziehung* von PISA 2003 dargestellt und versucht differentiell funktionierende Items aufzudecken. Anschließend werden die Ergebnisse der bayerischen Längsschnittstudie PALMA analysiert. Auch hier wird eine Subskala mit enger Verbindung zur funktionalen Denkweise betrachtet.

Mit qualitativen Analysen werden im neunten Kapitel einige der in im sechsten und siebten Kapitel identifizierten Stärken und Schwächen dokumentiert. Eine in Deutschland und Frankreich parallel durchgeführte Interviewstudie ermöglicht es, mit Interviewausschnitten darzustellen, wie sich spezifische Aspekte der funktionalen Denkweise in konkreten Situationen auswirken. Damit wird ein detailliertes Verständnis verschiedener Antwortphänomene möglich und die Grundlage für die im Folgenden gegebenen Veränderungsvorschläge gelegt.

Diese bilden den ersten Teil des zehnten Kapitels. Dort werden auf Basis der Ergebnisse der vorliegenden Arbeit Vorschläge gemacht, wie einerseits versucht werden kann, festgestellte Schwächen in beiden Ländern zu vermeiden, und andererseits die Stärken im jeweils anderen Land konstruktiv zu nutzen.
Abschließend folgen eine zusammenfassende Übersicht über die Ergebnisse der Arbeit und ein Ausblick auf weitere Forschungsfragen, die sich durch diese Arbeit eröffnen.

1 Funktionales Denken

Funktionales Denken ist ein Schlagwort mit dem viele auf Anhieb etwas assoziieren können. Bei genauerer Betrachtung fällt jedoch auf, dass dieser Begriff häufig unklar bleibt und mit sehr unterschiedlichen Vorstellungen gefüllt werden kann. So wird er etwa im Rahmen der Meraner Reformen von 1905 (siehe Kapitel 6) sehr weit gefasst und in alle mathematischen und gesellschaftlichen Bereiche gezogen, wohingegen er von Vollrath (Vollrath, 1989) im engen Bezug mit dem Mathematikunterricht von Funktionen und dessen Anwendungen gesehen wird.
Es bedarf also einer Klärung des Begriffes, bevor mit ihm gearbeitet werden kann. Im folgenden Kapitel wird eine Definition von funktionalem Denken gegeben, die sich eng an die von Vollrath gegebene anlehnt und Ideen der Subskala „Veränderung und Beziehung“ von PISA 2003 aufgreift. Sie beinhaltet die Fähigkeiten Zusammenhänge von Variablen mit mehreren Darstellungsmöglichkeiten zu beschreiben, zwischen diesen Darstellungsmöglichkeiten zu wechseln und die Natur dieser Zusammenhänge zu erklären.

Da sich dieses Kapitel mit der Begriffsklärung beschäftigt, wird für eine genauere Erläuterung der angesprochenen Fähigkeiten und der mit ihnen einhergehenden Schwierigkeiten auf die Kapitel 3 und 4 verwiesen.

1.1 Eine Literaturauswahl

Der Begriff „funktionales Denken“ wird erstmals 1905 im Rahmen des Meraner Lehrplans verwendet und entwickelt sich zu dessen Leitbegriff. Unter diesem Begriff werden folgende Inhalte zusammengefasst:

1) Funktionsdefinition
2) Graphische Darstellungen
3) Einführung in Differential- und Integralrechnung
4) Anwendungsbezug
5) „Prinzip der Bewegung“ aus der so genannten „neueren Geometrie“

Dabei wird der Variationsaspekt von Funktionen als besonders wichtig erachtet und durch spezielle Ausrichtung des Lehrstoffes hervorgehoben. (Krüger, 2000b, S. 222)
Diese erste Auffassung von funktionalem Denken ist also ein sehr weite, die sich nicht nur auf die innermathematische Betrachtung des Funktionsbegriffs bezieht. Sie trägt den Variationsgedanken in die Geometrie, zur Untersuchung von Kurven, und aus der reinen Mathematik heraus, zu Anwendungen. Es ist von der „Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens“ die Rede (Krüger, 2000b, S. 234).

Diese „Erziehung zur Gewohnheit“ wird jedoch nicht umgesetzt. In dem nach den Meraner Ideen umgearbeiteten preußischen Lehrplan von 1925 ist mit funktionalem Denken nur noch eine gründliche Einführung des Funktionsbegriffs gemeint (Krüger, 2000b, S. 234). Diese Auffassung tritt im Laufe des 20. Jahrhunderts in den Vordergrund, wobei dem Prinzip der Bewegung und Variation weniger Bedeutung geschenkt wird (Krüger, 2000b, S. 235).

Es werden im Folgenden einige ausgewählte Definitionen von funktionalem Denken zitiert, die sich in vielen Aspekten mit der hier verwendeten decken:

Der Mathematiker Ernst Breslich versteht 1932 unter funktionalem Denken (zitiert nach Cha, 1999, S. 43):

> 1) Recognizing how a change in one of the related variables affects the values of the others,
>
> 2) Recognizing the character of the relationships between variables,
>
> 3) Determining the nature of the relationships, and
>
> 4) Expressing relationships in algebraic symbols.

Es handelt sich um das grundlegende Verständnis der Beziehung zwischen zwei Variablen und der Fähigkeit diese Beziehung in der Formeldarstellung angeben zu können. Breslich bezieht sich dabei implizit auf Funktionen und unterlässt die noch wenige Jahre zuvor geforderte Ausweitung auf sämtliche mathematische Bereiche

Hans-Joachim Vollrath stellt 1986 die Zweckmäßigkeit einer Definition von funktionalem Denken fest:

> Wir können das Verständnis des Funktionsbegriffs durch mögliche Denkleistungen beschreiben. Andererseits ist der Funktionsbegriff mathematisch eindeutig festgelegt. Es erscheint daher zweckmäßiger, diese im Zusammenhang mit dem Verständnis des Funktionsbegriffs stehende Denkleistungen allgemeiner als funktionales Denken zu bezeichnen. Wir wollen es beschreiben als „Denken in Zusammenhängen“. (Vollrath, 1986b, S. 59)

Damit gibt Vollrath eine erste sehr vage Definition von funktionalem Denken.

In einem weiteren Artikel definiert Vollrath genauer:

> To learn about functions and to be successful in using functions to solve problems requires a mental ability which can be characterized as follows:
>
> 1) Dependences between variables can be stated, postulated, produced and reproduced.
>
> 2) Assumptions about the dependence can be made, can be tested, and if necessary can be revised
>
> The mental activities described in 1) are fundamental for working with functions ….
> The activities in 2) are typical for “mathematical thinking”…. This ability can be called functional thinking…. (Vollrath, 1986a, S. 1)

Es wird wieder der Abhängigkeitsaspekt zwischen zwei Variablen betont. Die Fähigkeit mit den verschiedenen Darstellungsformen von Funktionen umgehen zu können wird allenfalls implizit gefordert. Die wichtige Rolle der Einbindung von Realität und physikalischer Probleme wird aber später im Rahmen eines Schülerversuchs hervorgehoben:

> Physical tasks have been criticized on the basis of their requirement of physical knowledge.... But only prephysical experience is helpful for mastering our task. On the other hand, in our opinion, experiences like these are responsible for developing functional thinking. (Vollrath, 1986a, S. 15)

1989 veröffentlicht Vollrath einen oft zitierten Artikel mit dem Titel „Funktionales Denken“. Darin geht er von folgender Auffassung funktionalen Denkens aus:

> Funktionales Denken ist eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit Funktionen ist. (Vollrath, 1989, S. 5)

Anschließend führt er genauer aus, welche Kenntnisse er als charakteristisch für eine funktionale Denkweise ansieht, die er bewusst eng an den Funktionsbegriff anlehnt:

> 1) Durch Funktionen beschreibt oder stiftet man Zusammenhänge zwischen Größen: einer Größe ist dann eine andere zugeordnet, so daß die eine Größe als abhängig gesehen wird von der anderen. (Vollrath, 1989, S. 7)
>
> 2) Durch Funktionen erfaßt man, wie Änderungen einer Größe sich auf eine abhängige Größe auswirken. (Vollrath, 1989, S. 12)
>
> 3) Mit Funktionen betrachtet man einen gegebenen oder erzeugten Zusammenhang als Ganzes. (Vollrath, 1989, S. 16)

Charakteristisch für eine funktionale Denkweise sind demnach das Erfassen der eindeutigen Zuordnung sowie der Abhängigkeit einer Größe von der anderen, das Erkennen der Kovariation und die Auffassung von Funktionen als Objekte. Dabei betont Vollrath mehrmals die Wichtigkeit des Nutzens der verschiedenen Darstellungsformen von Funktionen:

> Die Beschreibung der funktionalen Abhängigkeit und das Ausnutzen dieser Abhängigkeit beim Lösen von Problemen (z.B. Berechnen von Funktionswerten, Beweisen von Eigenschaften) erfolgt mit Hilfe der verschiedenen Darstellungsformen. (Vollrath, 1989, S. 11)

> Darstellungen werden dabei nicht in erster Linie als Hilfsmittel zur Veranschaulichung von Funktionen, sondern als Ausdrucksmittel gesehen. Die Ausprägung funktionalen Denkens zeigt sich an dem Grad der Beherrschung dieser Ausdrucksmittel zum Erfassen und Lösen von Problemen. (Vollrath, 1989, S. 12)

> Die Ausprägung des funktionalen Denkens zeigt sich an der Fähigkeit, in unterschiedlichen Darstellungen von Funktionen das Ganze der Funktion zu erfassen und in der Fähigkeit, vom Einzelnen aufs Ganze und umgekehrt vom Ganzen aufs Einzelne „umzuschalten". (Vollrath, 1989, S. 17)

Die Fähigkeit, funktionale Abhängigkeiten in den verschiedenen Darstellungsformen zu erkennen, auszudrücken und diese Darstellungen zur Problemlösung zu nutzen, wird als wichtiger Bestandteil funktionalen Denkens aufgefasst. Ebenso soll bei der Nutzung einer Darstellungsform von Funktionen die Abgrenzung zwischen dem mathematischen Konzept und seiner Darstellung stets präsent bleiben.
Es werden allerdings nicht ausdrücklich die Wechsel zwischen den verschiedenen Darstellungsformen erwähnt. Diese sind jedoch implizit enthalten, da sie beim Problemlösen zwangsläufig auftauchen und deren Beherrschung zum „Erfassen des Ganzen einer Funktion" unerlässlich ist. (siehe Kapitel 3)

1990 betont Günter Schmidt explizit, dass sich funktionales Denken auch auf außermathematische Bereiche bezieht. Das Übersetzen der realen Situation in eine der Darstellungen von Funktionen aber auch Darstellungswechsel innerhalb der Mathematik sind entscheidende Fähigkeiten, die mit funktionalem Denken assoziiert werden.

> Unter „funktionalem Denken" wird hier das Erfassen und Verstehen von funktionalen Abhängigkeiten in den unterschiedlichsten Zusammenhängen außerhalb und innerhalb der Mathematik und deren Nutzung bei der Beschreibung und Lösung von Problemen verstanden. (Schmidt, 1990, S. 6)

> Die in Situationen auftretenden funktionalen Zusammenhänge können in ganz unterschiedlicher Weise beschrieben und dargestellt werden: durch Tabellen, Graphen oder algebraische Terme. Funktionales Denken erfordert nicht nur Fähigkeiten zur Übersetzung der zugrunde liegenden Situation in eine dieser Darstellungsformen, sondern auch Übersetzungen der Darstellungsformen untereinander. (Schmidt, 1990, S. 12)

All diese Definitionen von funktionalem Denken sind eng an den Funktionsbegriff gebunden. Sie beziehen oftmals die Realität ein und fordern einen sicheren Umgang mit den verschiedenen Darstellungsformen und das Erkennen des „Ganzen der Funktion". Die hier genutzte Definition orientiert sich an diesen Ideen und wird im nächsten Abschnitt gegeben.

Es gibt jedoch auch deutlich engere Auffassungen von funktionalem Denken. So definiert zum Beispiel Didier Pihoué (1996) den Begriff *pensée fontionnelle* viel spezieller, als dies hier getan wird.
Die mit der Lösung von Problemen zu funktionalen Zusammenhängen assoziierte Denkweise wird dort in drei Aspekte unterteilt: einen arithmetischen, einen algebraischen und einen funktionalen. Der erste Aspekt findet seine Darstellung in Wertetabellen, der zweite in Formeln, der dritte in graphischen Darstellungen.
Funktionales Denken wird also als die, die Variation betreffende Denkweise angesehen die mit Graphen assoziiert ist (siehe Kapitel 3).

Zuletzt soll noch die Beschreibung Subskala *Veränderung und Beziehung* aus der OECD-Studie PISA 2003 aufgeführt werden. Diese spricht zwar nicht von funktionalem Denken, beinhaltet viele dessen charakteristischer Eigenschaften:

> *Veränderung und Beziehungen.* Dieser Bereich umfasst mathematische Darstellungen von Veränderungen sowie funktionalen Zusammenhängen und Abhängigkeiten zwischen Variablen. […] Relationen können auf unterschiedlichste Weise dargestellt werden: symbolisch, algebraisch, graphisch, tabellarisch und geometrisch. Da verschiedene Formen der Darstellung unterschiedlichen Zwecken dienen und unterschiedliche Eigenschaften haben können, spielen Verbindungen zwischen Darstellungsformen beim Umgang mit verschiedenen Situationen und Aufgaben oft eine wichtige Rolle. (OECD, 2004b, S. 42)

In PISA 2003 werden mathematische Inhaltsgebiete getestet, die zum PISA-Konzept für mathematische Grundbildung, der *mathematical literacy*, gehören, welche eng mit Problemstellungen in der Realität verknüpft ist. (Zur näheren Erläuterung von PISA 2003 und von *mathematical literacy* sei auf Kapitel 8 verwiesen). Ein dort betrachtetes Inhaltsgebiet, die Subskala *Veränderung und Beziehung*, beschäftigt sich mit Darstellungen von funktionalen Zusammenhängen von Variablen und auch mit deren Veränderungsverhalten, d.h. der Kovariation. Die verschiedenen Darstellungen und Wechsel zwischen ihnen werden für das Problemlösen als sehr wichtig erachtet. Es wird jedoch nie formal von Funktionen gesprochen oder eine Funktionsdefinition gefordert. Dennoch zeigt sich eine große Ähnlichkeit mit den oben gegebenen Definitionen von funktionalem Denken, obwohl dieser Begriff nicht auftaucht und nicht explizit gesagt wird, wie mit den Darstellungen gearbeitet werden soll.

1.2 Definition von funktionalem Denken

Da es offensichtlich keine breite Übereinstimmung über die Nutzung des Begriffs *funktionalem Denken* gibt, bedarf es einer klaren Definition, die in der vorliegenden Arbeit genutzt werden kann. Diese Definition orientiert sich stark an den von Vollrath vertretenen Standpunkten und integriert die in PISA 2003 gegebenen Ideen:

Unter funktionalem Denken versteht man eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit funktionalen Abhängigkeiten ist.

Sie äußert sich insbesondere in folgenden Fähigkeiten:

1) Funktionale Abhängigkeiten zwischen Größen können in allen üblichen Darstellungsformen festgestellt, angegeben und erzeugt werden.
2) Hypothesen über die Art der funktionalen Abhängigkeit, insbesondere den Einfluss von Änderungen, können gebildet und kontrolliert werden.

Der erste Punkt beinhaltet das Erkennen von funktionalen Abhängigkeiten sowohl in deren mathematischen Darstellungsformen als auch in der Realität. Wechsel zwischen den üblichen Darstellungsformen, also der Wertetabelle, der Formel, dem Graphen und der realitätsnahen Beschreibung, werden zur Problemlösung oder zur Darstellung vollzogen. Die eindeutige Zuordnung als charakteristische Eigenschaft von Funktionen ist ebenso wie der im zweiten Punkt hervorgehobene Aspekt der Kovariation bekannt.

Mit der Wahl des Begriffs *funktionale Abhängigkeit* wird die Beschränkung auf die mathematische Seite durch den Begriff der *Funktion* vermieden.
Durch die hier genutzte Definition wird außerdem ein großer Wert auf die Fähigkeit gelegt, die funktionale Denkweise auch in Realsituationen nutzen zu können.
Die Auffassung von Funktionen als Objekte wird nicht gefordert, um von einer funktionalen Denkweise sprechen zu können, da es sich dabei um eine weiterführende Auffassung handelt. Für viele Problemstellungen ist jedoch zumindest implizit eine Sicht der Funktion als Ganzes notwendig, so dass für eine funktionale Denkweise dennoch ein gewisses Verständnis davon aufgebaut werden muss (siehe Kapitel 3).

Durch das Wort *Größen* und den Variationsaspekt wird eine Tendenz zu reellen Funktionen mit gewissen Stetigkeitseigenschaften nahe gelegt. Vollkommen willkürliche oder rein mengentheoretische Funktionen sollen nur am Rand einbezogen werden (siehe Kapitel 3).

Die soeben gegebene Definition beinhaltet einige in der Forschung benutzten Begriffe und überschneidet sich mit vielen von ihnen. Nähere Ausführungen dazu und Erläuterungen der Entwicklung funktionalen Denkens und der dabei auftretenden Schwierigkeiten werden in den nun folgenden Kapiteln 3 und 4 gegeben.

2 Ein historischer Überblick

Die Entwicklung der heutigen Funktionsdefinition war ein langer, sich über Jahrhunderte hinstreckender Prozess. Als Funktionen Anfang des 20. Jahrhunderts erstmals in Deutschland und Frankreich im Schulunterricht auftauchten, war die in der Forschung heute genutzte mengentheoretische Definition noch nicht bekannt. Sie sollte erst in den 70er Jahren im Rahmen der „neuen Mathematik“ in beiden Ländern Einzug in die Schule finden (siehe Kapitel 6).
Viele Schülervorstellungen zum Funktionsbegriff lassen sich in der Entwicklungsgeschichte wieder finden und einige Forschungsartikel fordern zumindest für die Sekundarstufe I die Rückkehr zu einer historischen, fachlich eingeschränkten aber intuitiv einfacher fassbaren Funktionsdefinition (siehe Kapitel 3).
Im folgenden Kapitel wird ein historischer Überblick über die Entwicklung der Funktionsdefinition gegeben. Da diese schon mehrmals ausführlich dargestellt wurde (siehe u.a. Kleiner, 1989; Rüthing, 1986; Youschkevitch, 1976), wird nur eine knappe Darstellung wichtiger Entwicklungsschritte gegeben und speziell auf die verschiedenen Darstellungsweisen und die dominierende Auffassung eingegangen.

Die Entwicklungsgeschichte des Funktionsbegriffs lässt sich in zwei Abschnitte unterteilen. Während der ersten, bis in das 18. Jahrhundert andauernden Periode wird der Funktionsbegriff nur implizit verwendet. Zuordnungen werden nicht nur von Mathematikern, sondern etwa auch von Buchhaltern und Astronomen genutzt. Man verfügt noch nicht über alle Darstellungsmöglichkeiten von Funktionen und hat für diese Zuordnungen keine allgemeine Bezeichnung.

Die zweite Periode beginnt mit der ersten Hälfte des 18. Jahrhunderts. Seit dieser Zeit existiert eine Funktionsdefinition, die jedoch im Laufe der darauf folgenden Jahrhunderte an die benötigten Eigenschaften angepasst, verallgemeinert und exakter beschrieben wird.

2.1 Tabellen, Graphen und Formeln

Den ersten Gebrauch von funktionalen Zusammenhängen findet man 2000 vor Christus bei den Babyloniern. Um leichter komplizierte Rechnungen, zum Beispiel für die Bestimmung von Planetenbahnen, durchführen zu können, wurden Tabellen, etwa von Quadrat- oder Kubikzahlen, aufgestellt.
In den darauf folgenden Jahrhunderten bis zum Ende des 14 Jahrhunderts bleibt es bei der impliziten Nutzung von Funktionen in Form von Tabellen aber auch von verbalen Beschreibungen. Während der griechischen Antike werden damit Gesetzmäßigkeiten der Akustik untersucht und später die Theorie Kegelschnitte erstellt.
Die Vorstellung von funktionalen Zusammenhängen in dieser Zeit ist also hauptsächlich eine diskrete, in der eine Regel oder Rechenvorschrift im Vordergrund steht. Eindeutige Zuordnung oder gar Kovariation werden, wenn überhaupt, nur implizit verwendet.

Der erste bekannte Graph stellt Planetenpositionen in Abhängigkeit der Zeit dar und stammt aus dem 10. oder 11. Jahrhundert (Abbildung 1).

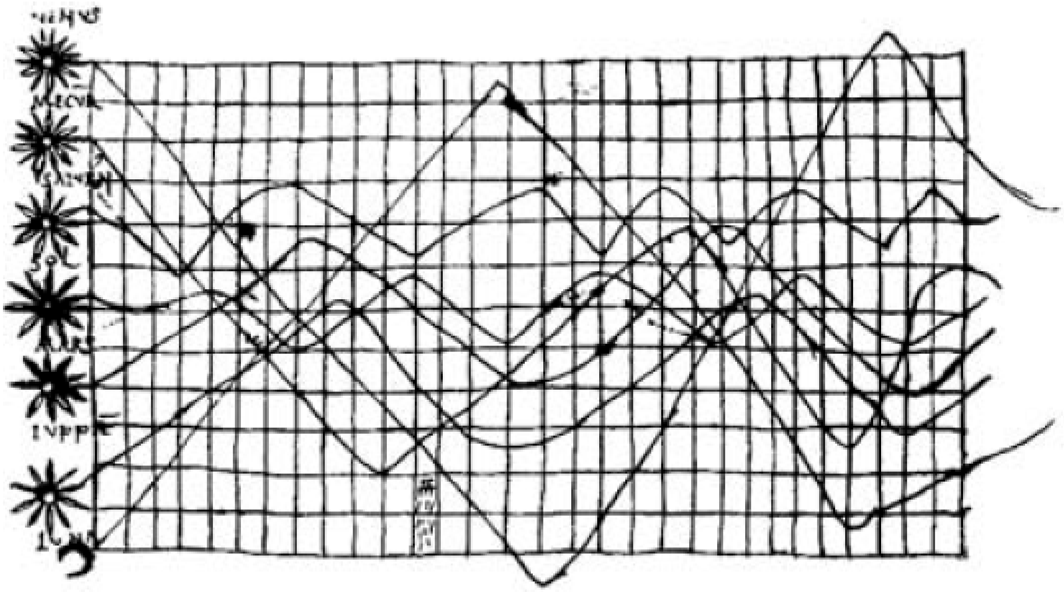


Abbildung 1: Planetenpositionen, 10. oder 11. Jahrhundert (aus Hischer, 2002)

Im 14. Jahrhundert untersucht Nicole Oresme (1323-1382) die graphischen Darstellungen von funktionalen Zusammenhängen und ihre Variationsaspekte. Die von ihm verwendeten Graphen erinnern an Balken- oder Stabdiagramme (Abbildung 2). Sie stellen die Variation von Intensitäten in Abhängigkeit von der Zeit dar. Dabei wird, wie heute auch üblich, die Zeit nach rechts angetragen. Oresme interessiert sich nicht nur für die Punktweisen Zuordnungen, die durch die Länge der Balken gegeben werden, sondern spricht von stetig veränderbaren Größen und untersucht die entstehenden geometrischen Figuren und deren krummlinige Berandung. Diese Betrachtungen der Veränderlichkeit, das heißt des Variationsverhaltens von Größen, stellen sicherlich einen großen Schritt auf dem Weg zu Bildung des Funktionsbegriffes dar. Dennoch werden dabei die Zusammenhänge ausschließlich graphisch und verbal beschrieben. Es existierte weiterhin keine allgemeine Funktionsvorstellung.

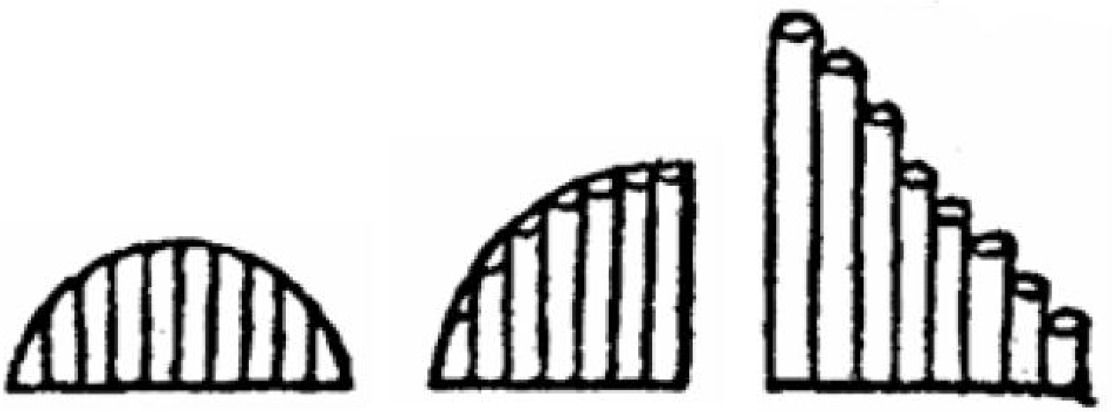


Abbildung 2: Diagramme von Oresme, 14. Jahrhundert (aus Hischer, 2002)

Anfang des 17. Jahrhunderts führen Pierre de Fermat (1601-1665) und René Descartes (1596-1650) die Koordinatenschreibweise ein und erweitern damit die graphischen Darstellungsmöglichkeiten. Der wichtigste Fortschritt von Fermat und Descartes für die Bildung des Funktionsbegriffs ist jedoch, auf Grund der durch François Viète (1540-1603) entwickelten Buchstabenschreibweise für Unbekannte, unabhängig voneinander eine Formeldarstellung

von Funktionen gefunden zu haben.
Ab dem 17. Jahrhundert sind also die heute gebräuchlichen Darstellungsformen von Funktionen bekannt und größtenteils auch miteinander verknüpft. So wird beispielsweise die Übersetzung von Formel zu Graph sowohl von Fermat als auch von Descartes explizit erwähnt (Youschkevitch, 1976, S. 25).
Bei der Beschreibung funktionaler Zusammenhänge fehlt allerdings die Forderung nach der Eindeutigkeit der Zuordnung. Formeln werden als Rechenausdrücke gesehen, mit denen man aus den Werten einer Größe die Werte einer anderen berechnen kann. Sie beschränken sich - im heutigen Sprachgebrauch - auf algebraische Funktionen, das heißt auf Kombinationen von einfachen Rechenoperationen.

Im Jahr 1667 definiert James Gregory (1638-1675) eine „zusammengesetzte Größe". Diese entsteht durch Zusammensetzung mit Hilfe von Operationen aus anderen Größen. Es wird deutlich, dass diese Definition ein Vorläufer der ersten, auf Formeln basierenden Funktions-definition ist.

Isaak Newton (1643-1727) benutzt zwar noch keine Definition, entwickelt aber in seinen Arbeiten zu Fluxionen und Fluenten 1671 das, was im heutigen Sprachgebrauch „zeitliche Ableitung" heißt und deren Umkehrung, die Stammfunktion.

Durch die Formeldarstellung und die dadurch hervorgerufene Beschleunigung in der Entwicklung und Erforschung des Funktionsbegriffs ist innerhalb kurzer Zeit das Bedürfnis nach einer formalen Bezeichnung und einer Definition für funktionale Zusammenhänge gewachsen.

Gottfried Leibniz (1646-1716) verwendet 1673 wohl als erster die Bezeichnung Funktion. Dabei handelt es sich allerdings noch um eine Bezeichnung für die Länge von Strecken, die, wie die Abszisse oder Ordinate, *Funktion* eines als veränderlich gedachten Punktes der Kurve sind. Diese Idee entwickelt er zusammen mit Johann Bernoulli (1667-1748) in deren Schriftwechsel (1694-1698) weiter, sodass die erste formale Definition von Funktionen im Jahr 1718 von Bernoulli veröffentlicht werden kann:

> On appelle fonction d'une grandeur variable, une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes (nach Youschkevitch, 1976)

> Man nennt Funktion einer veränderlichen Größe eine Größe, die auf irgendeine Weise aus eben dieser veränderlichen Größe und Konstanten zusammengesetzt ist. (nach Malle, 1996)

Die Vorstellung die hinter dieser Definition steht ist also ein Rechenausdruck, der von einer Variable abhängt. Dabei ist nicht näher ausgeführt, ob dieser Rechenausdruck ein eindeutiges Ergebnis liefern muss, noch was genau „auf irgendeine Weise zusammengesetzt" heißt. Die graphische Vorstellung tritt in den Hintergrund.
Diese erste Definition von Funktionen bleibt in vielen Punkten noch vage und unhandlich. Sie stellt jedoch den Ausgangspunkt für den zwei Jahrhunderte dauernden Prozess der Exaktifizierung der Funktionsdefinition dar. Bei diesem Prozess wird die Menge der Funktionen einerseits durch Weglassen der mehrdeutigen Funktionen eingeschränkt,

andererseits erweitert, indem etwa die Forderung nach einem Rechenausdruck aufgegeben wird.

2.2 Die Verfeinerung der Definition

Leonhard Euler (1707-1783), ein Schüler Berrnoullis, trägt mit seinen Werken entscheidend zur Funktionsdefinition bei und hat erheblichen Einfluss auf die weitere Entwicklung.

1748 ersetzt er in seinem Buch „Introduction in analysin inifinitorum" in Bernoullis Definition das Wort „Größe" durch „analytischen Ausdruck":

> Eine Function einer veränderlichen Zahlgröße ist ein analytischer Ausdruck, der auf irgend eine Weise aus der veränderlichen Zahlgrösse und aus eigentlichen Zahlen oder aus constanten Zahlgrössen zusammengesetzt ist. (nach Rüthing, 1986)

Euler entfernt sich dabei weiter von einer graphischen Vorstellung und festigt mit dem Terminus „analytischer Ausdruck" die Fixierung auf die Formeldarstellung. Es bleibt jedoch offen, was genau mit „analytischer Ausdruck" gemeint ist. Außerdem lässt er keine konstanten Funktionen zu und unterscheidet zwischen eindeutigen und mehrdeutigen Funktionen.

Einen entscheidenden Impuls für die weitere Entwicklung gibt das im 18. Jahrhundert heftig diskutierte Problem der schwingenden Saite. Euler beteiligt sich an dieser Diskussion, in deren Verlauf er sich gezwungen sieht eine freihändig gezeichnete Kurve als Funktion zuzulassen. Er lässt daraufhin die Forderung nach einem analytischen Ausdruck fallen und definiert 1755 in seinem Buch „Institutiones calculi differentialis":

> Sind nun Größen auf die Art von einander abhängig, dass keine davon eine Veränderung erfahren kann, ohne zugleich eine Veränderung in der anderen zu bewirken, so nennt man diejenige, deren Veränderung man als die Wirkung von der Veränderung der anderen betrachtet, eine Funktion von dieser; eine Benennung, die sich so weit erstreckt, dass sie alle Arten, wie eine Größe durch eine andere bestimmt werden kann, unter sich begreift. (nach Rüthing, 1986)

Hiermit entfernt sich Euler von der Formeldarstellung um wieder näher an die graphische Vorstellung einer Kurve zu kommen und den Kovariationsaspekt stärker zu betonen.
Diese Definition bleibt bis in das frühe 19. Jahrhundert bestehen. Zu dieser Zeit werden insbesondere von Jean-Baptiste Fourier (1768-1830) Funktionen entdeckt, die zwar eine als zulässig erachtete Formeldarstellung haben, deren Graphen jedoch nicht zum üblichen Bild von Funktionen passen. Das Fehlen der erwarteten Stetigkeitseigenschaften wird etwa bei der durch eine Fourier-Reihe gegebene Rechteckschwingung deutlich:

$$f(x) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n+1)x}{2n+1} = \begin{cases} 1 \text{ für } x \in \left]2k\pi;(2k+1)\pi\right[, \text{ mit } k \in \mathrm{Z} \\ 0 \text{ für } x \in \{k\pi, k \in \mathrm{Z}\} \\ -1 \text{ für } x \in \left](2k-1)\pi;2k\pi\right[, \text{ mit } k \in \mathrm{Z} \end{cases}$$

Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) veröffentlicht 1829 die später nach ihm benannte Dirichletfunktion, die in keinem Punkt stetig ist:

$$f(x) = \begin{cases} 1, \text{ wenn } x \text{ rational} \\ 0, \text{ wenn } x \text{ irrational} \end{cases}$$

1837 gibt er eine Definition, in der erstmals die Forderung nach Eindeutigkeit explizit auftaucht. Diese Definition beinhaltet auch eine graphische Erklärung, bezieht sich aber nur auf stetige Funktionen. Sie umfasst also insbesondere nicht die Dirichletfunktion.

Die erste allgemeine Funktionsdefinition wird im Jahr 1870 von Hermann Hankel (1839-1873) gegeben und mit der Bezeichnung „Dirichletscher Funktionsbegriff" versehen. Sie umfasst sämtliche davor gegebenen Beispiele:

> Eine Funktion heißt y von x, wenn jedem Werte der veränderlichen Größe x innerhalb eines gewissen Intervalls ein bestimmter Wert von y entspricht; gleichviel, ob y in dem ganzen Intervalle nach demselben Gesetz von x abhängt oder nicht; ob die Abhängigkeit durch mathematische Operationen ausgedrückt werden kann oder nicht. (nach Steiner, 1969)

In dieser Definition wird Eindeutigkeit gefordert, Stetigkeit vom Funktionsbegriff getrennt und kein Bezug auf mehr auf Formel oder Graph genommen. Die benutzten Worte „veränderliche Größe" und „Abhängigkeit" deuten zwar noch auf eine gewisse Vorstellung von zwei von einander abhängigen Variablen hin, die kovariieren. Es beginnt sich allerdings die Idee einer eindeutigen Zuordnung weiter zu konkretisieren.
Damit ist eine sehr allgemeine Funktionsdefinition erreicht, deren Beschränkungen sich nur noch auf die zugelassenen Definitions- und Wertebereiche beziehen. Die Zulassung beliebiger Mengen für diese Bereiche erscheint erst mit der mengentheoretischen Definition, die sich in den darauf folgenden Jahrzehnten entwickelt.

Die Allgemeinheit dieser Definition trifft allerdings auch auf einigen Widerstand. Beispiele wie die Dirichletfunktion bewegen Mathematiker wie Henri Lebesgue (1875-1941) und Pafnuti Tschebyschow (1821-1894) dazu, eine Einschränkung auf Funktionen zu fordern, die durch Formeln gegeben sind. Sie gehen davon aus, dass nur diese tatsächlich vorkommen und andere Funktionen als „pathologisch" anzusehen sind.

1887 gibt Richard Dedekind (1831-1916) die erste mengentheoretische Funktionsdefinition. In dieser wird zwar noch von einem „Gesetz" gesprochen, das die Funktion definiert, aber auch der Grundstein für die Entwicklung zu beliebigen Definitions- und Wertebereichen gelegt. Sie führt zu einer Definition des Funktionsbegriffs mit Hilfe von Relationen, etwa von Felix Hausdorff (1862-1942) in den „Grundzügen der Mengenlehre":

> Aus zwei nichtverschwindenden Mengen A, B können wir geordnete Paare p=(a,b) bilden, deren erstes Element a ein Element von A, deren zweites Element b ein Element von B ist. … betrachten wir die Menge P solcher Paare, und zwar von der Beschaffenheit, daß jedes Element a von A in einem und nur einem Paare p von P als erstes Element auftritt. Jedes Element a bestimmt auf diese Weise ein und nur ein Element b, nämlich dasjenige, mit dem es zu einem Paare p=(a,b) verbunden auftritt; dieses durch a bestimmte, von a abhängige, dem a zugeordnete Element bezeichnen wir mit b=f(a) und sagen, dass hiermit in A … eine eindeutige Funktion von a definiert sei. (Hausdorff, 1914)

Mit diesen Definitionen ist eine vollkommen abstrakte Funktionsdefinition erreicht. Vorstellungen von Graphen oder Formeln werden nicht angesprochen. Ebenso ist kein Hinweis auf Abhängigkeit oder Kovariation mehr vorhanden. Vielmehr handelt es sich hier um eine statische Definition als rechtseindeutige Relation, die als eindeutige Zuordnung zwischen zwei abstrakten Mengen verstanden werden kann.

2.3 Zusammenfassung

Durch diese kurze Übersicht wird deutlich, dass erst mit der Entdeckung der Formeldarstellung und der Verknüpfung der Darstellungsformen die weitere Entwicklung eingeleitet wird. Daraus entsteht die erste Funktionsdefinition, die auf der Formeldarstellung basiert aber dennoch eine graphische Vorstellung beinhaltet. Die zugelassenen analytischen Ausdrücke werden mit der Zeit immer allgemeiner, bis zu einer vollkommenen Loslösung von der Formeldarstellung und der graphischen Vorstellung.

In der folgenden Tabelle (Tabelle 1) werden die Entwicklungen noch einmal verkürzt dargestellt und die jeweils benutzten Darstellungsformen oder angesprochenen Vorstellungen und Einschränkungen aufgeführt.

Zeitpunkt	Entdecker	Entdeckung, Neuerung	Bild von Funktionen
2000 v.Chr.	Babylonier	Tabelle	Rechenvorschrift Diskret
14. Jhd.	Oresme	Graph	Variationsaspekt
17. Jhd.	Fermat Descartes	Formel	Rechenausdruck Formel mit einfachen Rechenoperationen Nicht zwingend eindeutig Keine Definition
1718	Bernoulli	Rechenausdruck Erste Definition	Rechenausdruck variabler Größen Nicht zwingend eindeutig
1748	Euler	Analytischer Ausdruck	Rechenausdruck veränderlicher Größen Nicht zwingend eindeutig Keine konstanten Funktionen zugelassen
1755	Euler	Kovariation Freihandkurve	Beliebige Abhängigkeit von Größen Kein analytischer Ausdruck mehr implizit: Graph stetig und ohne Kanten
1870	Hankel „Dirichlet-Definition“	Eindeutige Zuordnung Kovariation	Beliebiger Zusammenhang Nicht mehr unbedingt stetig oder als Formel bzw. Kurve darstellbar
1914	Hausdorff	Eindeutige Zuordnung zwischen Mengen	Rechtseindeutige Relation Mengentheoretische Definition Beliebiger Definitions- und Wertebereich Nicht unbedingt als Graph oder Formel darstellbar Kovariation und Abhängigkeit nicht mehr explizit vorhanden

Tabelle 1: Übersicht

Weitere Informationen zu diesem Kapitel finden sich auch in Amra (2003), Cha (1999), Grugnetti et al. (2001), Hischer (2002), Ingrao (1991), Krüger (2000a), Luzin (1930), Malle (1996), Müller-Philipp (1992), René de Cotret (1988), Sierpinska (1992) und Steiner (1969).

3 Theoretischer Hintergrund

Im folgenden Kapitel wird zuerst der theoretische Rahmen dieser Arbeit abgesteckt. Dabei werden drei wesentliche Ziele verfolgt. Erstens soll eine solide theoretische Fundierung herausgestellt werden, die für die Wahl der Definition von funktionalem Denken ausschlaggebend ist. Zweitens werden Werkzeuge für die später folgenden Analysen entwickelt. Das dritte Ziel des theoretischen Rahmens ist es, deutsche, französische und internationale Theorienkonzepte, die sich auf den hier untersuchten Bereich beziehen, gegenüberzustellen und miteinander zu verbinden.
Zunächst wird mit Analysen der Arbeiten von Duval, Lesh und Kaput auf Darstellungen mathematischer Ideen und Übersetzungen zwischen den Darstellungen eingegangen. Vergnauds konzeptuelle Felder ermöglichen es dann der funktionalen Denkweise einen theoretischen Rahmen zu geben. Anschließend wird die funktionale Denkweise durch Grundvorstellungen von vom Hofe und den hier neu definierten Grundkenntnissen konkret mit Vorstellungen und Kenntnissen gefüllt. Schließlich werden noch weitere didaktische Konzepte, wie das action, process und object concept von Dubinsky oder dem concept image von Vinner, mit der funktionalen Denkweise verbunden und für die Analysen der späteren Kapitel nutzbar gemacht.

Der zweite und der dritte Teil dieses Kapitels beschäftigen sich im Detail mit den verschiedenen Darstellungen funktionaler Abhängigkeiten, Übersetzungen zwischen ihnen und mit der Funktionsdefinition. Erst ein detailliertes Verständnis von ihnen ermöglicht es die in den späteren Kapiteln folgenden Analysen durchzuführen.

3.1 Theorien

3.1.1 Semiotische Herangehensweise: Duval und die Registres sémiotiques

3.1.1.1 Sinn und Bedeutung

Raymond Duval beschäftigt sich mit der Theorie zu Übersetzungsprozessen in der Mathematik. Diese sind insbesondere für das Erfassen des Funktionsbegriffs von großer Bedeutung.

Ein zentraler Begriff in den Arbeiten von Duval ist das *semiotischen Darstellungsregister* (im Folgenden kurz mit Darstellungsregister bzw. Register bezeichnet; Originalbezeichnung: *registre de représentation sémiotique*).
Duval stellt folgende Forderungen an ein semiotisches System, damit man es als Darstellungsregister bezeichnen kann (Duval, 1993, S. 41). Es können:

1. erkennbar zu diesem Register gehörige Darstellungen gebildet werden
2. Umformungen einer Darstellung innerhalb des Registers durchgeführt werden (Originalbezeichnung: *traitement*)

3. Übersetzungen von einer Darstellung zu einer Darstellung in einem anderen Register durchgeführt werden. (Originalbezeichnung: *conversion*)

Folgende semiotische Vorüberlegungen von Duval ermöglichen ein tiefes Verständnis der von ihm begründeten Darstellungstheorie und stellen einen guten Einstieg in seine Übersetzungstheorie dar.
Die Wörter „Sinn“ und „Bedeutung“ (in Deutsch im französischen Originaltext) erlauben eine Unterscheidung zwischen dem Sinn, der vom gewählten Darstellungsregister abhängt, und der Bedeutung, die nur vom dargestellten Objekt abhängt (Duval, 1988a). So sind etwa der Sinn von $y=x^2$ und der Sinn des Bildes einer Normalparabel unterschiedlich, die Bedeutung von beiden ist aber dieselbe.
Besitzen zwei Ausdrücke dieselbe Bedeutung, so sind sie äquivalent und können sich gegenseitig ersetzen. Besitzen sie jedoch nur denselben Sinn, sind also semantisch kongruent, ohne von der Bedeutung her äquivalent zu sein, so führt ein gegenseitiges Identifizieren zu Fehlern.

Duval stellt weiter fest, dass Denken und Beweisführung in der Mathematik zu großen Teilen durch äquivalente Umformungen stattfindet. Diese äquivalenten Umformungen lassen sich dann durchführen, wenn gleiche Bedeutung vorliegt. Schüler erkennen meist leicht eine semantische Kongruenz zweier Ausdrücke, während sie kaum auf dieselbe Bedeutung achten. Dies führt dann zu Problemen, wenn eine äquivalente Umformung durchgeführt werden muss, aber keine semantische Kongruenz vorliegt.

Beispielhaft wird die Übersetzung zwischen dem Graphen einer Geraden und deren Gleichung vorgestellt, wo zwar gleiche Bedeutung, aber keine semantische Kongruenz gegeben ist (Duval, 1988b). Aus der Steigung der Geraden muss beim Übergang zur Formelschreibweise $y=ax+b$ eine Variable aus zwei verschiedenen Aspekten des Graphen gebildet werden: Wenn die Gerade steigt, so erhält a ein positives Vorzeichen, wenn sie fällt ein negatives. Ist der Winkel den die Gerade im durchlaufenen Quadranten mit der x-Achse bildet kleiner als der den sie mit der y-Achse bildet, so ist der Betrag von a kleiner als 1. Ist das Gegenteil der Fall, so ist der Betrag von a größer als 1, und im Grenzfall ist der Betrag von a gleich 1. Es liegt also keine semantische Kongruenz im Sinne Duvals zwischen der Steigung des Graphen einer Geraden und dem Koeffizienten a in der Formelschreibweise vor. Für die Übersetzung von der Graphendarstellung zur Formeldarstellung von Geraden sind demnach folgende Kenntnisse notwendig:

1. Aus der Richtung der Steigung (steigend oder fallend) ergibt sich das Vorzeichen von a in der Formeldarstellung $y=ax+b$
2. Aus dem Winkel mit der x-Achse ergibt sich der Betrag von a
3. Aus dem Schnittpunkt mit der y-Achse ergibt sich die zu addierende oder subtrahierende Konstante

Dieser Art von Kenntnissen wird höchste Wichtigkeit für das korrekte Benutzen von graphischen Darstellungen eingeräumt:

> Il ne peut y avoir d’utilisation correcte des représentations graphiques cartésiennes sans discrimination explicite des variables visuelles pertinentes et sans une correspondance

systématiquement établie entre les valeurs de ces variables et les unités significatives de l'écriture algébrique (Duval, 1988b, S. 243)
(Es kann keine korrekte Benutzung der graphischen Darstellungen geben, ohne dass explizit zwischen den relevanten visuellen Variablen unterschieden wird und ohne eine systematische Verbindung zwischen den Werten dieser Variablen und den signifikanten Einheiten der algebraischen Schreibweise herzustellen.)

Hierauf wird später in Abschnitt 3.1.4 genauer eingegangen.

3.1.1.2 Darstellungstheorie: Semiosis und Noesis

Diese Unterscheidung zwischen Sinn und Bedeutung von Darstellungen erfordert eine Klärung des Zusammenhangs zwischen einem mathematischen Inhalt und dessen Darstellungen. Duval fordert, dass mathematische Objekte nie mit ihren Darstellungen verwechselt werden dürfen. Eine Verschmelzung von Objekt und Darstellung macht eine Unterscheidung zwischen zwei Darstellungen desselben Objektes unmöglich und verhindert damit auch das Erkennen des Sinns von mehreren Darstellungen. (Duval, 1996, S. 359)

Dies macht die Diskriminierung zwischen Objekt und Darstellung zu einem zentralen Punkt des mathematischen Verständnisses. Die Schwierigkeit dabei ist, dass mathematische Objekte nicht fassbar sind, sondern immer eine Darstellung benötigt wird. Das führt zu folgenden Fragen:

> Comment des sujets en phase d'apprentissage pourraient-ils ne pas confondre les objets mathématiques avec leurs représentations sémiotiques s'ils ne peuvent avoir affaire qu'aux seules représentations sémiotiques ? (Duval, 1993, S. 38)
> (Wie könnten Subjekte in der Lernphase, die mathematischen Objekte nicht mit ihren semiotischen Darstellungen verwechseln, wenn sie nur mit diesen semiotischen Darstellungen zu tun haben?)

> Et, à l'inverse, comment peuvent-ils acquérir la maîtrise des traitements mathématiques nécessaires liés aux représentations sémiotiques s'ils n'ont pas déjà une appréhension conceptuelle des objets représentés ? (Duval, 1993, S. 38)
> (Und umgekehrt, wie können sie den Umgang mit den notwendigen mathematischen Techniken, die mit den semiotischen Darstellungen verbunden sind, erlernen, wenn sie nicht schon ein konzeptuelles Verständnis des dargestellten Objektes haben?)

Duval unterscheidet zwischen semiotischen Darstellungen und Vorstellungen, die er als mentale Darstellungen bezeichnet (Duval, 1993, S. 39). Vorstellungen beinhalten die Gesamtheit der Bilder und Konzepte, die ein Individuum mit einem Objekt oder einer Situation assoziiert. Eine semiotische Darstellung ist eine Produktion aus Symbolen zusammengesetzt wird, die zu einem Repräsentationssystem gehören. In dieser Arbeit werden semiotische Darstellungen verkürzt als Darstellungen bezeichnet und mentale Darstellungen als Vorstellungen bezeichnet.
Darstellungen sind nicht nur eine Ausdrucksmöglichkeit Vorstellungen, sie sind auch von großer Bedeutung bei:

1. der Entwicklung von Vorstellungen,
2. der Durchführung von Berechnungen oder Umformungen, die nicht auf mentaler Ebene durchgeführt werden können
3. der Entwicklung mathematischer Wissenssysteme (wie man deutlich an der Entwicklung des Funktionsbegriffs sieht (siehe Kapitel 2))

Es besteht also eine enge Verwebung der beiden Darstellungsarten.

Bezeichnet man das Verständnis oder die Produktion einer Darstellung mit *Semiosis* und das konzeptuelle Verständnis eines Objektes mit *Noesis*, so bekräftigt Duval, dass es keine Noesis ohne Semiosis gibt. Insbesondere ist eine Arbeit mit mehreren Darstellungen eine notwendige Vorraussetzung dafür, dass die mathematischen Objekte nicht mit ihren Darstellungen verwechselt werden und in jeder ihrer Darstelllungen wieder erkannt werden können.

> … (I)l est essentiel, dans l'activité mathématique, soit de pouvoir mobiliser plusieurs registres de représentation sémiotiques …, soit de pouvoir choisir un registre plutôt que l'autre. Et, indépendamment de toute commodité de traitement, *ce recours à plusieurs registres semble même une condition nécessaire pour que les objets mathématiques ne soient pas confondus avec leurs représentations et qu'ils puissent aussi être reconnus dans chacune de leurs représentations.* (Duval, 1993, S. 40)
> (Es ist bei der mathematischen Aktivität unerlässlich, entweder mehrere semiotische Repräsentationsregister mobilisieren zu können oder eher das eine als das andere wählen zu können. Und unabhängig von jeder Bequemlichkeit im Umgang *scheint diese Berufung auf mehrere Register eine notwenige Bedingung dafür zu sein, dass die mathematischen Objekte nicht mit ihren Darstellungen verwechselt werden und dass sie auch in jeder ihrer Darstellungen wieder erkannt werden können*).

Die Arbeit in mehreren Darstellungen stellt demnach für Duval eine Antwort auf die oben gestellten Fragen zum Erkennen der mathematischen Idee dar. Es reicht aber nicht verschieden Darstellungen zu benutzen. Übersetzungen zwischen diesen Darstellungen spielen eine besonders wichtige Rolle, da sonst etwa zwei Darstellungen desselben mathematischen Objektes als zwei verschiedene Objekte aufgefasst werden könnten. (Duval, 2006, S. 124, S. 126)

Weitere Gründe für die Betrachtung von Darstellungen mathematischer Objekte in mehreren Registern und der Übersetzungen zwischen ihnen sind (Duval, 1993, S. 49):

1. der unterschiedliche Aufwand, mit dem Berechnungen in den verschiedenen Darstellungen durchgeführt werden. Eine einfachere Durchführbarkeit von Umformungen in einer anderen Darstellung bestimmt oftmals erst die Wahl der Übersetzung (Duval, 2006, S. 127);
2. die Komplementarität der Darstellungen, da jede Darstellung nur eine Auswahl der wichtigen Eigenschaften präsentieren kann;
3. die Konzeptualisierung, die eine Koordination der Register beinhaltet.

Zum dritten Punkt präzisiert Duval, dass Personen mit fortgeschrittener mathematischer Bildung eine sorgfältig gewählte Darstellung ausreicht um ein Konzept erfassen zu können. Bei Schülern ist dies jedoch nicht der Fall, so dass sie für die Erfassung eines Konzeptes die Koordination von mindestens zwei Registern benötigen. Dabei entsteht Noesis durch den Übersetzungsprozess und dem Erkennen der Konstanten bei diesem.
Übersetzungsprozesse scheinen Duval aber trotz ihrer soeben betonten Wichtigkeit bei weitem nicht natürlich zu sein. Er beobachtet eine Abschottung der Register, die er zu großen Teilen auf die nicht-Kongruenz der Darstellungen zurückführt.

Die beobachteten Schwierigkeiten führen zu folgenden Forderungen an einen Unterricht, der die enge Verbindung von Semiosis und Noesis berücksichtigt (Duval, 1993, S. 54; Duval, 1996, S. 374):

1. Systematische Variation innerhalb eines Registers erlaubt das Finden der relevanten Variablen, die das Wiedererkennen der Darstellung ermöglichen.
2. Systematische Variation einer Darstellung innerhalb eines Registers führt zu Variation der Darstellung innerhalb eines anderen Registers. Die Beobachtung der Variation relevanter Variablen innerhalb eines Registers ermöglicht das Erkennen der Zusammenhänge und der relevanten Variablen innerhalb des anderen Registers.
3. Intensives Erlernen der Arbeit in jedem der benutzten Register
4. Doppelproduktionen im Falle von komplexen Darstellungen: Wird eine Antwort in einem komplexen Register wie der Graphik gegeben, so ist eine Beschreibung in einem einfacher erfassbaren Register anzufügen. (Diese Unterscheidung in komplexe und einfach erfassbare Register bezieht sich auf deren Linearität, die in Abschnitt 3.2.2.2 erläutert wird.)

3.1.1.3 Verbindung zu funktionalem Denken

Die im Kapitel 1 gegebene Definition von funktionalem Denken bezieht ganz wesentliche Aspekte von Duvals Theorie mit ein.
So wird dort gefordert, dass funktionale Abhängigkeiten zwischen Größen in allen üblichen Darstellungsformen festgestellt, angegeben und erzeugt werden können. Die „üblichen Darstellungsformen“ ergeben sich aus den Registern, in denen Funktionen größtenteils dargestellt werden. Diese Register sind:

1. das algebraische Register in der die Formeldarstellungen gegeben werden;
2. das graphische Register;
3. das Register der Tabellen;
4. das Register der Sprache.

Das Register der Sprache ist sicherlich ein sehr komplexes Register, das hier nicht in seiner vollen Breite einbezogen werden kann. So sind verbale Beschreibungen von Funktionen, die im Mathematikunterricht auftauchen, meistens schon eine Kondensierung und Abstrahierung von verbalen Beschreibungen des normalen Sprachgebrauchs. Sie werden außerdem oft durch

Schaubilder ergänzt, was der Praxis im täglichen Leben entspricht. Diese Beschränkung und andererseits Ergänzung ist bei den Analysen der Übersetzungsschwierigkeiten zu beachten.

In Übereinstimmung mit Duval wird also den Darstellungsformen und Übersetzungen zwischen ihnen ein großes Gewicht verliehen.
Noesis, also das konzeptuelle Erkennen und Verstehen des Funktionskonzeptes, wird im Zusammenhang mit funktionalem Denken implizit vorausgesetzt, da es eng mit der Semiosis, also dem Verstehen der Darstellungen verbunden ist.

In den späteren Analysen wird daher auf Duvals Übersetzungstheorie und insbesondere auf die Schwierigkeiten mit semantischer Kongruenz und nicht-Kongruenz geachtet.

3.1.2 Formal-logische Herangehensweise: Lesh et al. und Kaput

3.1.2.1 Lesh et al.

Auch Richard Lesh et al. beschäftigen sich mit Repräsentation und Übersetzungen. Sie unterscheiden fünf Repräsentationssysteme (Lesh et al., 1987, S. 33):

1. Auf Erfahrungen basierende Routinen bei denen Vorkommnisse aus der „realen Welt“ zur Darstellung und Problemlösung verwendet werden.
2. Manipulierbare reale Modelle
3. Bilder und Diagramme
4. Gesprochene Sprache
5. Schriftliche Symbole

Man erkennt, dass diese Systeme nicht mit der von Duval gegebenen Definition eines Repräsentationssystems in Einklang zu bringen sind. Insbesondere das erste System lässt sich nur schwer einordnen und das letzte fasst unter dem Oberbegriff „schriftliche Symbole“ mehrere Register nach Duval, wie die algebraische Schreibweise oder die natürliche geschriebene Sprache zusammen. Tabellen sind in keines der Repräsentationssysteme eindeutig einzuordnen.
Ungeachtet dieser Unterschiede in der Definition von Repräsentationssystemen betonen auch diese Autoren die Wichtigkeit der Übersetzungen zwischen den unterschiedlichen Repräsentationssystemen und der Umformungen innerhalb der Repräsentationssysteme. Die Fähigkeit die Übersetzungen und Umformungen durchzuführen beeinflussen sowohl das mathematische Lernen, als auch die Problemlösefähigkeit.

Ein Schüler „versteht“ nach Lesh et al. eine mathematische Idee, wenn er (Lesh et al., 1987, S. 36)

1. sie in mehreren verschiedenen Repräsentationssystemen wieder erkennt;
2. mit ihr innerhalb eines Repräsentationssystems arbeiten kann;
3. sie von einem Repräsentationssystem in ein anderes übersetzen kann.

Lesh et al. führen noch einen weiteren Aspekt auf, nämlich dass das Repräsentieren und Übersetzen eine plurale, instabile und sich entwickelnde Tätigkeit ist. Mit pluraler Tätigkeit ist gemeint, dass Situationen oft in mehreren Repräsentationssystemen dargestellt werden (z.B. werden verbale Beschreibungen von einer Graphik begleitet) oder dass ein Problem bei der Bearbeitung nacheinander in mehrere Repräsentationssysteme übersetzt wird. Repräsentationen entwickeln sich demnach während der Bearbeitung laufend weiter. Dies führt zu Instabilitäten wie dem Fokussieren auf einen Teilaspekt oder im Gegenteil zum Verdrängen von zuvor erkannten Teilaspekten.

Das von Lesh verwendete Verständnis einer mathematischen Idee wurde der Definition von funktionalem Denken zugrunde gelegt. In den späteren Analysen werden Pluralität und Instabilität der Darstellungen berücksichtigt werden.

3.1.2.2 Kaput

James Kaput unterstreicht in seiner Theorie die Wichtigkeit von Übersetzungen indem er eine Repräsentationstheorie entwickelt. Aufgrund eines von ihm konstatierten Mangels an theoretischen Konzepten zu Repräsentationen und deren Rolle im Mathematikunterricht (Kaput, 1987a, S. 19) definiert er *Symbolschema* (Originalbezeichnung: *symbol scheme)* und *Symbolsysteme* (Originalbezeichnung: *symbol system*):

Ein Symbolschema ist eine Menge von Symbolen zusammen mit Regeln die zu deren Kombinierung und Identifizierung dienen. Beispiele hierfür sind das Symbolschema der arabischen Zahlen oder die Koordinatenachsen mit den jeweiligen Bearbeitungsregeln.

Ein Symbolsystem besteht aus einem Symbolschema S, einem Referenzfeld F und einer Regel c, die eine Verbindung zwischen den beiden definiert. So beziehen sich das Symbolschema der arabischen Zahlen und das Symbolschema der Zahlengeraden auf dasselbe Referenzfeld der Zahlen. Als Schreibweise wird S=(S,F,c) gewählt, wobei eine Gleichbezeichnung des Symbolschemas und des Referenzfeldes vorliegt. (Kaput, 1987b, S. 162)
Kaput lässt als Referenzfeld wieder Symbolsysteme zu. Das Symbolschema E2 der Gleichungen in zwei Variablen tritt als Symbolsystem E2=(E2,RxR,c1)mit dem Referenzfeld RxR auf, das aus den Teilmengen des Kreuzproduktes der reellen Zahlen besteht.
Mit dem Symbolschema T2 der Tabellen mit zwei Spalten und demselben Referenzfeld RxR kann das Symbolsystem T2=(T2,RxR,c2) gebildet werden.
Dies führt zum Symbolsystem (E2,T2,c3), bei dem E2 als Symbolschema das Symbolsystem T2 als Referenzfeld hat. (Kaput, 1987b, S. 166)
Das heißt, dass in Kaputs Theorie Übersetzungen zwischen Darstellungen oder Symbolsystemen ein Spezialfall von Repräsentationen mathematischer Objekte sind, nämliche der, in dem das Referenzfeld selber ein Symbolsystem ist. Durch die Betrachtung von Symbolsystemen als Referenzfeld bleibt immer das Referenzfeld des repräsentierten Symbolsystems präsent.

Nach Kaput hat mathematische Bedeutung mindestens vier Quellen, die in zwei Kategorien unterteilt sind (Kaput, 1989 S. 168):

a) Referentielle Ausdehnung:
   1) durch Übersetzungen zwischen mathematischen Repräsentationssystemen

2) durch Übersetzungen zwischen mathematischen Repräsentationssystemen und der Realität

b) Konsolidierung:
3) durch Transformationen innerhalb eines Repräsentationssystems
4) durch Bildung neuer Objekte aus bekannten Vorgehensweisen und Konzepten (Reifizierung, siehe Abschnitt 3.1.5.2)

Hierbei beklagt er, dass im Unterricht vor allem Transformationen innerhalb eines Repräsentationssystems genutzt werden. Kaput geht nicht von einer absoluten Bedeutung mathematischer Begriffe aus, sondern davon, dass sich diese aus einer Vielzahl Darstellungen und deren Verbindung entwickelt. Daher führt die Beschränkung auf Transformationen innerhalb eines Repräsentationssystems insbesondere beim Konzept der Funktion zu Problemen (Kaput, 1989, S. 168).

Transformationen, also Aktionen in den Symbolschemata von Repräsentationssystemen lassen sich in zwei Gruppen unterteilen (Kaput, 1989, S. 175)

1. Syntaktische Aktionen: Transformationen werden nur mit den Regeln des Symbolsschemas durchgeführt. Beispielsweise wird beim Lösen der Gleichung 5-4x=1 auf beiden Seiten 5 abgezogen und anschließend durch -4 geteilt.
2. Semantische Aktionen: Transformationen werden durch das Referenzfeld geleitet. Im Fall von 5-4x=1 wird beispielsweise durch Versuchen herausgefunden welche Zahl vervierfacht von 5 abgezogen werden muss damit 1 herauskommt.

Dabei ist zu beachten dass Transformationen oftmals durch eine Mischung von beiden Aktionen durchgeführt werden.
Die Existenz von syntaktischen Aktionen sind eine der Stärken der Mathematik, da sie erlauben schwierige Umformungen mit den Regeln eines Symbolschemas durchzuführen. Andererseits sind semantische Aktionen Ausdruck eines tieferen Verständnisses, da sie mit Hilfe der Ebene des Referenzfeldes durchgeführt werden.

Auch Kaput legt demnach großen Wert auf Übersetzungen zwischen den verschiedenen Darstellungen und auf Transformationen. Die Entstehung von mathematischer Bedeutung hat ihre Quellen in diesen Aktionen. Diese Ideen werden auch von der hier genutzten Definition von funktionalem Denken aufgegriffen (Kapitel 1).
Für die Analysen von Schülerlösungen wird auf die Terminologie von syntaktischen und semantischen Aktionen zurückgegriffen werden.

3.1.3 Psychologische Herangehensweise: Vergnaud und die Theorie des champs conceptuels

3.1.3.1 Theorie des champs conceptuels

Gérard Vergnaud hat mit der Theorie der konzeptuellen Felder ein auf psychologischen Ideen basierendes Analysewerkzeug für mathematische Kompetenzentwicklung geschaffen. Es erlaubt die Identifizierung wichtiger Schritte im Lernprozess aus einer inhaltlichen Betrachtungsweise heraus und gibt Einsicht in die Organisation des Wissens.

Ein *konzeptuelles Feld* (Originalbezeichung: *champ conceptuel)* ist definiert als eine Menge von Situationen, für deren Beherrschung mehrere untereinander verknüpfte Konzepte benötigt werden. Gleichzeitig ist es eine Menge von Konzepten, die ihre Bedeutung aus diesen Situationen erhalten. (Vergnaud, 1996, S. 225)

So besteht beispielsweise das konzeptuelle Feld der funktionalen Situationen aus all den Situationen, die funktionale Abhängigkeiten, wie auch immer, darstellen. Zu den Konzepten, die dieses Feld bestimmen, gehört natürlich das Konzept von Funktionen, aber auch die Konzepte von den Grundrechenarten, Gleichung, Umformung, Zusammenhang, Variation, Variable, Unbekannte, Ableitung, Integral etc..

Um eine genaue Definition des schon benutzten Begriffes *Konzept* geben zu können muss zuvor etwas weiter ausgeholt werden.

Beim Umgang mit Situationen treten Schemata auf. Ein *Schema* (Originalbezeichnung: *schème*) ist eine invariante Organisation der Vorgehensweise für eine bestimmte Klasse von Situationen (Vergnaud, 1996, S. 222).

Das graphische Finden des Minimums einer als Formel gegebenen quadratischen Funktion ist ein Beispiel für ein Schema. Ein Schüler muss die Funktion zuerst in ihre graphische Darstellung übersetzen und dann das Minimum mit dem niedrigsten Punkt identifizieren.

Sollte kein Minimum zu sehen sein, so muss er überlegen, ob dies am gewählten Ausschnitt oder an der gewählten quadratischen Funktion an sich liegt.

An diesem Beispiel sieht man auch, dass sich ein Schema auch aus mehreren Schemata zusammensetzen kann. Es kann für eine Situation mehrere Schemata geben, was zum Problem der richtigen Auswahl führt. Andererseits kann die Menge der Situationen, zu der ein bestimmtes Schema abgerufen wird, auf Grund mangelnder Kenntnis zu eng oder zu weit gefasst sein (Vergnaud, 1990, S. 141). Das Anwendungsfeld kann also genau wie das Schema an sich im Laufe der Zeit Änderungen und Anpassungen erfahren.

Ein Schema lässt sich noch feiner aufteilen. Es besteht aus operationalen Invarianten wie Konzepten-in-Aktion, Theoremen in Aktion und aus Folgerungsmöglichkeiten, Aktionsregeln und Zielen. Dabei sind die operationalen Invarianten von besonderer Wichtigkeit:

> Concepts and theorems are first developed – through experience – as operational invariants. Therefore a concept of scheme is essential, as it is those components of the scheme that I have called operational invariants that constitute the core of an individual’s conceptual or preconceptual representation of the world, however implicit these invariants may be. (Vergnaud, 1996, S. 224)

Ihre Bestandteile sind folgendermaßen definiert:

Ein *Theorem in Aktion* (Originalbezeichnung: *théorème en acte*) ist ein Satz, der von einem Individuum für eine bestimmte Menge der Situationsvariablen für gültig gehalten wird. Es stellt eine Verbindung zwischen einer mathematischen Eigenschaft und einer Situation dar.

Dabei muss es sich nicht um einen allgemein gültigen Satz handeln, sondern kann auch falsch sein.

> Theorems-in-action are defined as mathematical relationships that are taken into account when they choose an operation or a sequence of operations to solve a problem (Vergnaud, 1988, S. 144)

> A theorem in action is a proposition that is held to be true by the individual subject for a certain range of situation variables (Vergnaud, 1996, S. 13)

So ist etwa die Feststellung, dass bei Kauf der doppelten, dreifachen, vierfachen … Menge einer Ware auch das doppelte, dreifache, vierfache … zu zahlen, ist ein Theorem-in-Aktion. Es verbindet die Situation des Zusammenhangs zwischen Menge und Preis mit der mathematischen Eigenschaft $f(nx)=nf(x)$, die für diese Situation ausschlaggebend ist.

Ein *Konzept in Aktion* (Originalbezeichnung: *concept en acte*)ist ein Objekt, eine Eigenschaft, ein Zusammenhang, etc., das es einem Individuum erlaubt die Realität in verschieden Elemente aufzuteilen und die am besten geeignete Auswahl der Elemente für die Bearbeitung der Situation in Abhängigkeit des gewählten Schemas herauszusuchen. (Vergnaud, 1996, S. 225)

Im Gegensatz zu den Theoremen in Aktion können Konzepte in Aktion nicht richtig oder falsch sein, sondern nur relevant oder nicht relevant.

Beispielsweise sind „… ist ansteigend“ oder „… liegt oberhalb von …“ zwei Konzepte-in-Aktion, die es erlauben einen Graphen in verwertbare Informationen zu „zerlegen“.

Jetzt kann ein *Konzept* C formal definiert werden. Es ist ein Tripel C=(S, I, *S*). S bezeichnet die Situationen, die dem Konzept Sinn verleihen. I ist die Menge der operationalen Invarianten, die den Schemata angehören, die zur Bearbeitung der Situationen S benötigt werden. *S* ist die Menge der symbolischen Repräsentationen, die zur Darstellung und Bearbeitung der Situation gebraucht werden.

Das Funktionskonzept besteht also aus den Situationen, die funktionale Zusammenhänge beinhalten, den Theoremen in Aktion und den Konzepten-in-Aktion, die zur Arbeit mit den Situationen benötigt werden, und aus den Darstellungen von Funktionen, wie Graphen, Formeln oder Tabellen.

Im Unterschied zum konzeptuellen Feld der funktionalen Situationen enthält das Konzept von Funktion keine anderen Konzepte und eine direkte Verbindung zu den Darstellungsarten. In diesem speziellen Fall stimmen die Situationen des konzeptuellen Feldes mit denen des Konzeptes überein. Betrachtet man allerdings das Konzept der Addition, das auch im konzeptuellen Feld der funktionalen Situationen enthalten ist, so liegt nur noch eine teilweise Übereinstimmung vor.

Es zeigt sich, dass Situationen eine herausragende Rolle in der Theorie von Vergnaud spielen. Um eine Klassifizierung von ihnen zu ermöglichen führt er den Begriff von *Basisrelation* (Originalbezeichnung: *relation de base*) ein. Aus diesen Basisrelationen eines konzeptuellen Feldes konstruieren sich durch Kombination und Hinzufügen von Daten zum Feld gehörende

Situationen (Vergnaud, 1990, S. 151). Allerdings sieht er in ihnen einen beschränkten didaktischen Nutzen:

> Les relations élémentaires distinguées ici et les classes de problèmes qu'elles permettent d'engendrer ne présentent, telles quelles, qu'un intérêt didactique modéré, justement parce qu'elles sont trop élémentaires. Ce sont d'abord des instruments pour l'analyse des difficultés conceptuelles rencontrées par les élèves. (Vergnaud, 1990, S. 157)
> (Die hier identifizierten Basisrelationen und die Klassen von Problemen, die durch sie erzeugt werden können, haben, so wie sie sind, nur einen beschränkten didaktischen Nutzen, genau deswegen weil sie zu elementar sind. Es sind in erster Linie Instrumente für die Analyse der konzeptuellen Schwierigkeiten, auf die die Schüler treffen.)

Andererseits zieht er eine Parallele zwischen den Basisrelationen und Fischbeins *intuitive meanings* und erklärt, dass Schüler aus diesen Basisrelationen ein Verständnis von vielen Situationen aufbauen müssen (Vergnaud, 1996, S. 226). Im Abschnitt 3.1.4 wird darauf noch einmal eingegangen.

Auch Vergnaud besteht wie Duval auf der klaren Unterscheidung zwischen dem Konzept der Funktion, das durch die Invarianten I des Konzeptes beschrieben wird, und den Darstellungsmöglichkeiten *S* (Vergnaud, 1996, S. 223). Dies stellt jedoch nicht den Hauptteil seiner Arbeit da, weswegen hier nicht weiter darauf eingegangen wird.

3.1.3.2 Verbindung zu funktionalem Denken

Es sind auch enger gefasst konzeptuelle Felder zu Funktionen definierbar. So kann zum Beispiel das konzeptuelle Feld der Situationen einfacher funktionaler Abhängigkeit betrachtet werden, das in dem oben untersuchten Feld der funktionalen Abhängigkeiten enthalten ist. Dieses Feld wird definitionsgemäß von den Situationen erzeugt, zu deren Bearbeitung nur bestimmte Funktionstypen (wie lineare Funktionen, Polynome niedrigen Grades oder Exponentialfunktionen) und einfache Konzepte (also zum Beispiel keine abstrakten Konzepte von Ableitung oder Integral) benötigt werden.

Betrachtet man die Denkweise, die zur Beherrschung dieses konzeptuellen Feldes notwendig ist, so ist eine große Übereinstimmung mit der Definition von funktionalem Denken (siehe Kapitel 1) festzustellen. Dort ist allerdings nicht von einer Beschränkung auf bestimmte Funktionsklassen die Rede. Diese Beschränkung wurde deswegen vorgenommen, da für die Ausbildung der funktionalen Denkweise die Kenntnis von mehreren Funktionsklassen, aber nicht von allen notwendig ist. Es gibt sozusagen ein minimales konzeptuelles Feld, dessen Situationen eine funktionale Denkweise für eine erfolgreiche Bearbeitung erfordern.

Es stellt sich aus der Perspektive dieser Arbeit die Frage, ob und wie dieses minimale konzeptuelle Feld in Deutschland und Frankreich bearbeitet wird.
Wie oben erwähnt, sind die operationalen Invarianten der Schlüssel für ein erfolgreiches Arbeiten mit konzeptuellen Feldern. In dieser Arbeit wird besonders auf Theoreme in Aktion geachtet, auf die in Abschnitt 3.1.4 zurückgekommen wird.

Bei den späteren Analysen ist weiterhin zu beachten, dass zwar hauptsächlich das Funktionskonzept betrachtet wird, dieses aber nicht isoliert auftritt, sondern mit vielen anderen Konzepten in Interaktion steht.

In den vorangegangenen Abschnitten wurde der theoretische Hintergrund der Definition von funktionalem Denken dargestellt. Im den folgenden Abschnitten wird nun eine Verbindung zwischen funktionalem Denken und konkreten Vorstellungen, Wissen und Fähigkeiten hergestellt und auf bekannte Probleme der Schüler in diesem Zusammenhang eingegangen.

3.1.4 Konstruktivistische Herangehensweise: Grundvorstellungen von vom Hofe und Grundkenntnisse

Rudolf vom Hofe gibt mit dem Grundvorstellungskonzept ein Werkzeug an, mit dem sowohl normativ Zielvorstellungen für bestimmte mathematische Inhaltsbereiche angegeben, als auch deskriptiv Schülerlösungen analysiert werden können. Dieses Konzept hat mit den Arbeiten von Pestalozzi (1803), Diesterweg (1850), Wittmann (1924), Oehl (1965) und Griesel (1971) (um nur eine Auswahl zu nennen; siehe vom Hofe, 1995, S. 23) eine lange Tradition in der deutschen Mathematikdidaktik. International lassen sich ähnliche Konzepte etwa in den *intuitive meanings* von Fischbein oder den *use meanings* von Usiskin finden (vom Hofe, 1995, S. 99).

Es wird im Folgenden gezeigt, wie sich Grundvorstellungen in bisher gegebenen Theorien einordnen und wie sie sich für die Analyse des funktionalen Denkens nutzen lassen. Dabei wird zusätzlich der Begriff *Grundkenntnis* eingeführt, der sich als eine sinnvolle Ergänzung der Grundvorstellungen erweist.

3.1.4.1 Grundvorstellungen

> Die *Grundvorstellungsidee* beschreibt Beziehungen zwischen mathematischen Inhalten und dem Phänomen der individuellen Begriffsbildung. In ihren unterschiedlichen Ausprägungen charakterisiert sie mit jeweils unterschiedlichen Schwerpunkten insbesondere drei Aspekte dieses Phänomens:
>
> Sinnkonstruierung eines Begriffs durch Anknüpfung an bekannte Sach- oder Handlungszusammenhänge bzw. Handlungsvorstellungen,
>
> Aufbau entsprechender (visueller) Repräsentationen, bzw. „Verinnerlichungen“, die operatives Handeln auf der Vorstellungsebene ermöglichen,
>
> Fähigkeit zur Anwendung eines Begriffs auf die Wirklichkeit durch Erkennen der entsprechenden Struktur in Sachzusammenhängen oder durch Modellieren des Sachproblems mit Hilfe der mathematischen Struktur.
>
> (vom Hofe, 1995, S. 97)

Grundvorstellungen bilden somit das Bindeglied zwischen dem Individuum, mathematischen Inhalten und deren Ausprägungen in realen Situationen, was sie für alle Übersetzungsprozesse unabdingbar macht. Sie sind zeitlich nicht konstant, sondern entwickeln sich und interagieren untereinander, oder müssen auf Grund des fortschreitenden Lernprozesses neu formuliert werden.
Es lassen sich zwei Aspekte bei Grundvorstellungen ausmachen (vom Hofe, 1995; Blum, 2002, S. 5):

1. *Normativer Aspekt*: Grundvorstellungen werden aus theoretischen Überlegungen zu mathematischen Inhalten und didaktischen Analysen abgeleitet. Sie bilden eine didaktische Leitlinie dessen, was die Schüler lernen sollten.
2. *Deskriptiver Aspekt*: Grundvorstellung beschreiben tatsächliche Vorstellungen der Schüler. Idealerweise stimmen die beobachteten Grundvorstellung mit den normativ ermittelten Grundvorstellung überein, müssen dies aber nicht. Im Gegensatz zum normativen Aspekt lässt der deskriptive Aspekt der Grundvorstellung auch mathematisch falsche Vorstellungen zu, so genannte *Fehlvorstellungen.*

Beispiele für Grundvorstellungen sind die Vorstellungen von Funktionen als (eindeutige) Zuordnungen oder von Funktionen als kovariierende Variablen. Diese Grundvorstellungen stellen somit das Bindeglied zwischen den mentalen Vorstellungen des Schülers, dem Funktionskonzept und den realen Situationen dar, in denen die funktionale Abhängigkeit als Zuordnung bzw. Kovariation auftritt (siehe Abschnitt 3.3.1).

Hat ein Schüler die Funktionsgrundvorstellung einer Formel oder eines Rechenausdrucks, bei dem zu jeder Zahl, die eingegeben wird, eine andere Zahl herauskommt (Rechenmaschine, Blackbox), so ist dies in funktionalen Situationen, die durch Formeln oder Rechenausdrücke gegeben sind, eine angebrachte Grundvorstellung. In Situationen wie der Zuordnung der Temperatur zur Tageszeit muss der Schüler etwa die Grundvorstellung einer Zuordnung aktivieren, da er sonst die funktionale Situation nicht erkennt und sich damit den Zugang zu den benötigten Bearbeitungsinstrumenten versperrt. (Lengnink, 2002, S. 304)

Es gibt, wie oben gesehen, zu einem mathematischen Konzept mehrere Grundvorstellungen die sich ergänzen. Ihre Kombination und Interaktion führt zu einem tiefen Verständnis des betrachteten Konzeptes bzw. überhaupt erst zur Konzeptbildung. Demzufolge ist es ein Hauptziel des Mathematikunterrichtes die Schüler dabei zu unterstützen ein Netzwerk von zutreffenden Grundvorstellungen aufzubauen (vom Hofe et al., 2005, S. 69).

Das Vorhandensein von mehreren Grundvorstellungen zu einem mathematischen Konzept wird dann besonders deutlich, wenn eine Situation eine komplexe mentale Verarbeitung erfordert.

Betrachtet man beispielsweise die Aufgabe, die zurückgelegte Strecke eines mit konstanter Geschwindigkeit fahrenden Autos in Abhängigkeit von der Zeit darzustellen.
Die Grundvorstellung von Funktionen als Kovariation zweier Variablen (siehe Abschnitt 3.3.1) erlaubt die Identifikation der funktionalen Situation. Die Grundvorstellung von funktionalen Zusammenhängen als Graphen ermöglicht dann eine richtige Wahl der Darstellung.

Die Grundvorstellungstheorie beinhaltet auch einen konstruktiven Aspekt. Im Falle von auftretenden Differenzen zwischen den normativ ermittelten Grundvorstellungen mathematischer Inhalte und den deskriptiv festgestellten Grundvorstellungen von Schülern lassen sich diese Differenzen beheben oder ganz neue Grundvorstellungen aufbauen. Diese Tätigkeit liegt naturgemäß beim Schüler, kann aber durch Wahl geeigneter Situationen, mit denen der Schüler konfrontiert wird, didaktisch unterstützt werden (vom Hofe, 1995, S. 123).

Die oben gegebene Beschreibung von Grundvorstellungen beinhaltet einen Bezug zu realen Situationen. Eine Erweiterung des Konzeptes ist es, Grundvorstellungen auch für Übersetzungsvorgänge zwischen zwei beliebigen Repräsentationssystemen zu definieren, ohne dass ein Bezug zur Realität bestehen muss. Zur Unterscheidung von den hauptsächlich bei Übersetzungen zur Realität auftretenden *primären Grundvorstellungen* werden diese *sekundäre Grundvorstellungen* genannt. In diesem Fall sind Grundvorstellungen also das Bindeglied zwischen dem Individuum, mathematischen Ideen und einem Repräsentationssystem.
Primäre Grundvorstellungen treten somit beim Übergang zwischen Mathematik und Realität auf, während sich sekundäre auch auf innermathematische Übergänge beziehen. Bei den meisten Grundvorstellungen zu funktionale Zusammenhänge handelt es sich also um sekundäre Grundvorstellungen. (siehe Abschnitt 3.1.4.1).

Auf die Verbindung des Grundvorstellungskonzeptes mit den bisher dargestellten Theorien wird weiter unten eingegangen. Dort wird auch eine Liste der mit dem Funktionskonzept assoziierten Grundvorstellungen gegeben.

3.1.4.2 Grundkenntnisse

Grundvorstellungen bilden ein Bindeglied zwischen Individuum, Realität und Mathematik bzw. Schüler, Repräsentationssystemen und Mathematik. Sie erlauben insbesondere das Erkennen eines mathematischen Konzeptes in Realsituationen und dessen Überführung in die Mathematik oder andersherum.
In konkreten Übersetzungsprozessen müssen Grundvorstellungen in bestimmten Situationen und mit den darin auftretenden mathematischen Konzepten und Objekte verwendet werden. Dazu sind Kenntnisse über spezifische Eigenschaften der mathematischen Konzepte und Objekte in Zusammenhang mit der zu nutzenden Grundvorstellung notwendig.
Diese Kenntnisse ermöglichen also die Nutzung von Grundvorstellungen und werden in dieser Arbeit wegen ihrer engen Verknüpfung mit dem Grundvorstellungsbegriff als *Grundkenntnisse* bezeichnet.
Bei Grundkenntnissen handelt es sich also nicht um Vorstellungen von mathematischen Konzepten. Grundkenntnisse sind Kenntnisse zu Auswirkungen von Eigenschaften mathematischer Konzepte bei Übersetzungsprozessen. Mit Übersetzungsprozessen sind hier sowohl innermathematische als auch solche zwischen Mathematik und Realität gemeint.
Andererseits können Grundkenntnisse auch als konkrete Ausprägungen von Grundvorstellungen aufgefasst werden. Eine oder mehrere Grundvorstellungen konkretisieren sich in einer spezifischen Situation so, dass sie direkt im Übersetzungsprozess einsetzbar sind.
Beispiele für Grundkenntnisse sind:

- Das Vorzeichen von a in der Formeldarstellung $f(x)=ax+b$ einer linearen Funktion gibt an ob der Graph der Funktion steigt oder fällt
  (Es handelt sich um eine Kenntnis, die für Übersetzungen zwischen Formel und graphischen Darstellung eingesetzt wird. Sie kann als Ausprägung der Kovariations-Grundvorstellung und der Grundvorstellung funktionaler Abhängigkeiten als Graphen bei der Arbeit mit linearen Funktionen gesehen werden.)
- Der Graph einer linearen Funktion ist eine Gerade.
  (Kenntnis für Übersetzungen zu oder von der graphischen Darstellung. Konkrete Ausprägung der Graphengrundvorstellung bei der Arbeit mit Geraden.)
- Ein charakteristisches Merkmal von linearen Funktionen ist, dass Änderung in der einen Variablen immer die gleiche Änderung in der anderen Variable zur Folge hat („Die Zuwächse sind konstant“). Mathematisch ausgedrückt bedeutet das $f(x+n)-f(x)=f(n)-f(0)$.
  (Kenntnis für Übersetzungen zu oder von der Realität. Konkrete Ausprägung der Kovariations-Grundvorstellung bei der Arbeit mit linearen Funktionen.)

Für einen Übersetzungsprozess werden teilweise auch mehrere Grundkenntnisse mobilisiert. Dies wird in einer weiteren Ausarbeitung des oben benutzten Beispieles zur Darstellung der zurückgelegten Strecke eines mit konstanter Geschwindigkeit fahrenden Autos deutlich:

Die funktionale Situation ist mit Hilfe der Kovariations-Grundvorstellung zu erkennen. Steht zusätzlich die Grundkenntnis zu Verfügung, dass proportionale Zuwächse auf eine lineare Situation hindeuten, so wird klar, dass mit einer linearen Funktion gearbeitet werden muss. Mit Hilfe der Grundvorstellung von Graphen als Darstellung für funktionale Zusammenhänge kann die Wahl eines geeigneten Darstellungsregisters getroffen werden. Für die effiziente Erstellung des Graphen sind aber wiederum Grundkenntnisse notwendig. Steht die Grundkenntnis zur Verfügung, dass jede lineare Funktion eine Gerade als Graphen hat, so wird ist es möglich – in Zusammenspiel mit weiteren Grundkenntnissen zu Geraden und Punkten - zwei Punkte berechnen um eine Gerade zu zeichnen. Steht diese Grundkenntnis nicht zur Verfügung, so werden bei der Erstellung des Graphen möglicherweise viele Punkte berechnet um die Gerade zu zeichnen und eventuelle Fehler im Graphen nicht erkannt.

Grundkenntnisse sind also für die Anwendung von Grundvorstellungen zu komplexen mathematischen Inhalten unerlässlich. Andererseits sind Grundkenntnisse ohne zugehörige Grundvorstellungen nicht tragfähig, da die Grundkenntnisse keinen Ansatzpunkt für ihre Anwendung haben. Es besteht somit eine enge Vernetzung zwischen Grundvorstellungen und dem Grundkenntnissen.

Auf Schülerseite können Grundkenntnisse auf zwei verschiedene Weisen verinnerlicht werden. Einerseits findet man *kontextlos verinnerlichte Grundkenntnisse* (kurz *träge Grundkenntnisse*), die ohne Bezug auf die ihm zugrunden liegenden Grundvorstellungen auswendig gelernt werden. Andererseits treten auch *in Verbindung mit Grundvorstellungen verinnerlichte Grundkenntnisse* (kurz: *intelligente Grundkenntnisse*) auf, die mit den für sie relevanten Grundvorstellungen verwoben sind.
Kurz: Grundvorstellungen konkretisieren sich zu intelligenten Grundkenntnissen und intelligente Grundkenntnisse lassen sich zu Grundvorstellungen abstrahieren.
Richard Skemp unterscheidet zwischen relationalem und instrumentellen Verständnis, wobei das erste durch „wissen was zu tun ist und warum“ und das zweite durch „auswendig gelernte Regeln“ charakterisiert werden kann. Die Vor- und Nachteile die jeweils damit assoziiert werden lassen sich auf intelligente bzw. träge Grundkenntnisse übertragen:
Skemp gibt als Vorteile für ein instrumentelles Verständnis dessen leichteres Erfassen und damit dessen schnellere Anwendung an. Es ist allerdings im Gegensatz zu relationalem Verständnis schlechter auf neue Situationen anzuwenden und schwieriger langfristig zu behalten. Dies liegt vor allem daran, dass bei relationalem Verständnis nicht für jede einzelne Situation eine Regel gelernt werden muss, sondern diese aus allgemeinen Überlegungen abgeleitet werden können (Skemp, 1976, S. 23).
Mit Hilfe von Kaputs syntaktischen und semantischen Aktionen (siehe Abschnitt 3.1.2.2) lässt sich ein anderer Blickwinkel auf intelligente und träge Grundkenntnisse finden: träge Grundkenntnisse können viel mehr mit syntaktischen Aktionen assoziiert werden als intelligente Grundkenntnisse (vgl. Kaput, 1987b S. 178).

In den nächsten Abschnitten wird die Einbindung von Grundkenntnissen in die bis jetzt verwendete Theorie erläutert und anschließend eine Aufzählung von Grundkenntnissen gegeben, die im Zusammenhang mit Funktionen stehen.

3.1.4.3 Verbindung zu funktionalem Denken

Die von Duval geforderten Registerwechsel werden im Grundvorstellungskonzept implizit vorausgesetzt. Das Augenmerk liegt hier auf deren tatsächlicher Durchführung und den dazu benötigten Grundvorstellungen und Grundkenntnissen.

In Abschnitt 3.1.1 wird beispielhaft aufgeführt, was für Kenntnisse nach Duval für Übersetzungen zwischen der Formeldarstellung einer Geraden und deren Graphen benötigt werden (Duval, 1988b, S. 239). Diese Kenntnisse decken sich mit den Grundkenntnissen, die zu diesem Übersetzungsvorgang unten aufgeführten sind.
Bei Duval wird jedoch nicht erklärt, wie es zur tatsächlichen Anwendung der Grundkenntnisse kommt. Diese Aktivierung der Grundkenntnisse übernehmen die Grundvorstellungen.

Aus der Registertheorie ist auch ersichtlich, warum oft mehrere Kenntnisse für einen Übersetzungsvorgang abgerufen werden müssen. Insbesondere dann, wenn keine semantische Kongruenz vorliegt müssen zwei unterschiedliche Grundkenntnisse für eine Übersetzung aktiviert werden, was im Beispiel zum Vorzeichen und Betrag des Proportionalitätsfaktors linearer Funktionen deutlich wird (siehe Abschnitt 3.1.1).

Demnach ergänzen sich Registertheorie und Grundvorstellungstheorie. Während Duvals Arbeiten die Theorie zu Registern und den benötigten Übersetzungen liefert, erlauben diejenigen von vom Hofe eine genaue Klärung des Ablaufs des Übersetzungsprozesses und die Analyse der praktischen Umsetzung durch die Schüler.

Zu den von Kaput definierten syntaktischen und semantischen Transformationen (Abschnitt 3.1.2.2) lässt sich anführen, dass für erstere kein Rückgriff auf Grundvorstellungen notwendig ist, wohingegen die letzteren ohne adäquate Grundvorstellungen nicht durchgeführt werden können. Diese Tatsache entspricht der Behauptung von Kaput, dass semantische Aktionen Ausdruck von einem tieferen Verständnis sind.

Die von Vergnaud definierten Basisrelationen zum Aufbau eines konzeptuellen Feldes entsprechen in vielen Zügen den Grundvorstellungen. Allerdings wird von Vergnaud der normative Aspekt betont (Basisrelationen können nicht falsch sein) und nicht auf den deskriptiven Aspekt eingegangen. Basisrelationen dienen hier hauptsächlich dazu eine Menge von Situationen aufzubauen. Sie sind somit ein Bindeglied zwischen mathematischem Inhalten und Situationen. Grundvorstellungen beziehen hier außerdem noch das Individuum mit ein.
Während Vergnaud (1990, S.157) den didaktischen Nutzen dieser Basisrelationen noch bezweifelt, tritt er 1996 (Vergnaud, 1996, S. 226) dafür ein, dass Schüler über diese Basisrelationen zu einem Verständnis von vielen Situationen gelangen sollen, wobei er sich explizit auf Fischbeins intuitive meanings bezieht. Diese Sichtweise erinnert stark an den normativen Aspekt von Grundvorstellungen.
Die Umkehrung dieses Vorganges, also durch Situationen ein Verständnis der Basisrelationen zu erhalten wird von vom Hofe als Generierung von Grundvorstellungen bezeichnet. Vergnaud geht darauf allerdings nicht ein, da sich die Basisrelationen in seiner Theorie aus innermathematischen Überlegungen ergeben und nicht durch den Schüler generiert werden müssen.

Es lässt sich die Frage stellen, ob es nicht gerade die Basisrelationen/Grundvorstellungen sind, die es einem Schüler erlauben eine für ihn neue Situation einer bekannten Situationsklasse zuzuordnen? Dadurch wird er erst in die Lage versetzt ein passendes Schema abzurufen. Diese Sichtweise definiert allerdings die Rolle der Basisrelationen von Vergnaud neu, also Aktivierungshilfe von Schemata.

Auch das Konzept der Theoreme in Aktion lässt sich in Relation zu den Grundkenntnissen setzen. Beide erlauben die Anwendung von mathematischen Sätzen oder mathematischen Operationen in bestimmte Situationen.
Bei Theoremen in Aktion steht die Verbindung zwischen einer Situation und der konkreten Formulierung eines mathematischen Satzes oder einer Operation für diese eine Situation im Vordergrund. Das Vorhandensein eines Theorems in Aktion erlaubt erst die Auswahl eines Satzes oder einer Operation für eine Situation.
Grundkenntnisse dagegen bauen auf Grundvorstellungen auf. Sie erlauben erst die konkrete Umsetzung von komplexen Grundvorstellungen, da sie Eigenschaften, die sich aus mathematischen Sätzen ergeben, für den mit Hilfe der Grundvorstellung angestoßenen Übersetzungsprozess abrufbar machen.

Funktionales Denken beinhaltet insbesondere das Erkennen von funktionalen Situationen und das Übersetzen zwischen den verschiedenen Darstellungen. Dies sind zentrale Punkte des Grundvorstellungskonzeptes, welches durch Grundkenntnisse flankiert wird. So sind alle Grundvorstellungen zum Funktionskonzept und die meisten in Abschnitt 3.1.4.4 gegebenen Grundkenntnisse für funktionales Denken notwendig. Dies wird dort genauer erläutert.

Wie oben beschrieben unterstützt die Wahl der behandelten Situationen die Ausbildung von Grundvorstellungen durch die Schüler. Auch das Erlernen von Grundkenntnissen wird durch die behandelten Aufgaben entscheidend beeinflusst. Aus diesem Grund werden in späteren Kapiteln Lehrpläne und besonders Lehrbücher untersucht, da sie Aufschluss darüber geben, welche normativen Aspekte der Grundvorstellungen zu funktionalem Denken besonders gefördert werden. Durch die später analysierten Schülerinterviews und Lösungen der PISA-Aufgaben ist ein Einblick in die Tatsächlich vorhandenen Grundvorstellungen bei Schülern möglich.

In diesem Zusammenhang wird auch allgemeiner mit dem Begriff concept image gearbeitet, das Grundvorstellungen und Grundkenntnisse umfasst (siehe Abschnitt 3.1.6).

3.1.4.4 Listen von Grundvorstellungen und Grundkenntnissen

In diesem Abschnitt wird eine Aufstellung von Grundvorstellungen und Grundkenntnissen zu funktionalen Abhängigkeiten gegeben.

3.1.4.4.1 Grundvorstellungen

Grundvorstellungen, die sich zu Funktionen identifizieren lassen, können in zwei Gruppen aufgeteilt werden. Die erste Gruppe besteht aus den Grundvorstellungen, die mit Aspekten des funktionalen Denkens zusammenhängen. Die zweite Gruppe umfasst die Grundvorstellungen, die sich aus den verschiedenen Darstellungsformen funktionaler Abhängigkeiten ergeben.

Grundvorstellungen im Zusammenhang mit Aspekten funktionalen Denkens

Folgende Grundvorstellungen sind für die Arbeit mit funktionalen Abhängigkeiten charakteristisch:

1. **Zuordnungs-Grundvorstellung**:
   Einer Variablen wird eine andere zugeordnet. Dies lässt sich durch „Zu jedem… gibt es ein …“ umgangssprachlich ausdrücken.
   Bei dieser Grundvorstellung ist der Eindeutigkeitsaspekt von funktionalen Zuordnungen am deutlichsten zu erkennen. Abgesehen vom Wort Variable, ist sie aber frei von jedem Variationsgedanken und von jeder Abhängigkeitsvorstellung.
   Ein Beispiel für eine Situation, in der diese Grundvorstellung sehr deutlich hervortritt, ist die Funktion, die jedem Schüler sein Alter zuordnet.

2. **Kovariations-Grundvorstellung**:
   Eine Variable variiert in Abhängigkeit von den Änderungen in einer anderen Variablen. Umgangssprachlich wird dies durch „Was passiert wenn …“ ausgedrückt.
   Wie man schon aus dem Namen ersehen kann, steht hier der Variationsaspekt im Vordergrund. Diese Vorstellung lässt sich allerdings nur dann anwenden, wenn der Definitions- und der Wertebereich in den reellen Zahlen liegen. Der Eindeutigkeitsaspekt ist hier nur implizit enthalten.
   Eine typische Situation in der diese Kovariationsvorstellung zum tragen kommt ist die Variation des Flächeninhalts eines Rechtecks mit festem Umfang in Abhängigkeit einer Seitenlänge.
   Diese Grundvorstellung erweist sich wegen eines Teilaspektes als besonders wichtig: Durch die Vorstellung von Kovariation wird systematische Variation und damit das Erkennen des Variationsverhaltens möglich. Mit dieser Grundvorstellung kann gezielt auf die Qualität des Variationsverhaltens geachtet werden. Dadurch kann dann die Auswahl des geeigneten Funktionstyps mit Hilfe der Grundkenntnisse vorgenommen werden. Umgangssprachlich lässt sich das folgendermaßen ausdrücken: „Das Variationsverhalten der Variablen verstimmt den Funktionstyp“

3. **Objekt-Grundvorstellung:**
   Funktionen sind Objekte die man in mathematischen Operationen als Ganzes einsetzen kann. „Man kann auch Funktionen in eine Variable einsetzen“ kommt dieser Vorstellung umgangssprachlich wohl am nächsten.
   Diese Grundvorstellung bewegt sich auf einem deutlich höheren Niveau als die vorherigen (siehe auch Abschnitt 3.1.5).Typische Situationen, in denen sie zum Einsatz kommt, sind die Addition von Funktionen, das Hintereinanderschalten von Funktionen oder Differentialgleichungen. Es ist zu beachten, dass zu einem objektartigen Umgang mit Funktionen keine Objekt-Grundvorstellung notwendig ist (siehe Abschnitt 3.1.5). Eine Objekt-Grundvorstellung ermöglicht aber erst das reflektierte Arbeiten mit Prozessen, die auf einer Menge von Funktionen agieren.

In vielen Situationen können auch mehrere Grundvorstellungen angebracht sein. Es ist sogar typisch, dass Grundvorstellungen nicht situationsspezifisch sind.

Ein Beispiel eine Situation, in der mehrer Grundvorstellungen aktiviert werden können, ist die Zuordnung, die jeder Minute die Temperatur eines bestimmten Ortes zuordnet. Es ist leicht zu erkennen, dass hier die Zuordnungs-Grundvorstellung benutzt werden kann. Aber auch die Kovariations-Grundvorstellung ist angebracht, wenn man eine Variation der Temperatur in Abhängigkeit der Zeit sieht.

Im Abschnitt 3.2.2 wird erklärt, dass manche Darstellungen sich für bestimmte Grundvorstellungen besser eignen als andere. So steht etwa in einer Tabelle der Zuordnungsaspekt im Vordergrund, während sich Kovariation an einem Graphen gut ablesen lässt. Das heißt die Darstellung einer funktionalen Abhängigkeit hat einen wichtigen Einfluss auf die Aktivierung der Grundvorstellungen.

Andererseits ermöglicht erst die Grundvorstellung einer funktionalen Abhängigkeit in einer bestimmten Darstellungsform die Möglichkeit der Nutzung eben dieser Darstellungsform. Daraus ergibt sich die zweite Gruppe der Grundvorstellungen:

Grundvorstellungen im Zusammenhang mit den Darstellungsformen

Alle oben genannten Grundvorstellungen beziehen sich auf Aspekte von funktionalem Denken. Die Grundvorstellungen der zweiten Gruppe beziehen sich auf die Darstellungsformen von funktionalen Abhängigkeiten.
Wenn ein Schüler die Grundvorstellung zu einer Darstellungsform ausgebildet hat, so kann er innerhalb des dazu gehörigen Darstellungsregisters mental operieren und funktionale Abhängigkeiten entsprechend konkretisieren.
Registergebundene Grundvorstellungen haben jedoch eine begrenzte Reichweite. Sie sind nur auf eine bestimmte Klasse von funktionalen Abhängigkeiten anwendbar, nämlich auf jene, die sich im zugrunde liegenden Darstellungsregister wiedergeben lässt. Beispielsweise kann die funktionale Zuordnung, die jedem Schüler seine Haarfarbe zuordnet nicht im algebraischen Register dargestellt werden.
Das heißt, dass die Grundvorstelllungen zu den Darstellungsformen hier einerseits dem Schüler die Möglichkeit eröffnet ein Darstellungsregister für die Darstellung funktionaler Abhängigkeiten zu nutzen. Andererseits erfordern sie auch das Bewusstsein der Beschränkung dass, erst geprüft werden muss, ob eine konkrete funktionale Abhängigkeit in dem vorliegenden Darstellungsregister überhaupt darstellbar ist.

4. **Grundvorstellung funktionaler Abhängigkeiten als Formel**
   Das algebraische Register kann als Darstellungsform für bestimmte funktionale Abhängigkeiten genutzt werden.
5. **Grundvorstellung funktionaler Abhängigkeiten als Graph**
   Das graphische Register kann als Darstellungsform für bestimmte funktionale Abhängigkeiten genutzt werden.
6. **Grundvorstellung funktionaler Abhängigkeiten als Tabelle**
   Das tabellarische Register kann als Darstellungsform für bestimmte funktionale Abhängigkeiten genutzt werden.

7. **Grundvorstellung funktionaler Abhängigkeiten als geordnete Paare**
   Geordnete Paarmengen können als Darstellungsform für funktionale Abhängigkeiten genutzt werden.
   Diese Vorstellung wird hier hauptsächlich aus historischen Gründen aufgeführt, da sie kaum mehr im Unterricht genutzt wird. (siehe Kapitel 6 und 7)

Natürlich können diese Grundvorstellungen zu den Darstellungsformen auch dann aktiviert werden, wenn einer Darstellung in einem Register vorliegt und zu erkennen ist, dass es sich um eine funktionalen Zuordnung handelt.
Grundvorstellungen zu den Darstellungsformen erlauben es eine vorliegende funktionale Abhängigkeit mit einer Darstellungsform zu verbinden und andersherum eine vorliegende Darstellung mit einer funktionalen Abhängigkeit zu assoziieren.

Eine besondere Schwierigkeit beim Aufbau der Grundvorstellungen dieser Gruppe besteht in der mit zu generierenden Einschränkung auf die im jeweiligen Register darstellbaren funktionalen Abhängigkeiten. Im Abschnitt 3.1.6 wird darauf hingewiesen, dass sich durch das Fehlen dieser Einschränkung (z.B.: „Eine Formel stellt eine funktionale Abhängigkeit dar“) fehlerhafte Funktionsdefinitionen und Fehlvorstellungen entwickeln können.
Es gibt natürlich noch weitere Grundvorstellungen zu Darstellungsformen funktionaler Abhängigkeiten. Die oben aufgeführten stellen aber die weitaus am meisten genutzten dar, so dass nur sie im Folgenden betrachtet werden.

Im Kapitel 2 wurde gezeigt, wie sich durch neue Darstellungen und die damit verbundenen Vorstellungen der Funktionsbegriff entwickelt hat.
In den Tabellen der ersten bekannten funktionalen Situationen lässt sich auch eine rudimentäre Ausführung der Zuordnungs-Grundvorstellung erkennen. Tonangebend für die historische Entwicklung des Funktionsbegriffs war allerdings über einen sehr großen Zeitraum die Kovariations-Grundvorstellung. Aber erst eine Kombination mehrerer Grundvorstellungen zu Aspekten funktionalen Denkens und der Ausbildung vieler Grundvorstellungen zu Darstellungsformen funktionaler Abhängigkeiten hat die Entstehung der heute benutzten Funktionsdefinition ermöglicht.

Grundvorstellungen zu den Aspekten funktionalen Denkens sind ohne eine Grundvorstellungen zu den Darstellungsformen funktionaler Abhängigkeiten nicht nutzbar. Aber auch andersherum können Grundvorstellungen zu den Darstellungsformen funktionaler Abhängigkeiten ohne Grundvorstellung zu einem Aspekt funktionalen Denkens nicht ausgebildet werden. Demnach besteht also auch in dieser Hinsicht eine enge Verwebung und gegenseitig Abhängigkeit Grundvorstellungen aus den beiden Gruppen.

Im Zusammenhang mit funktionalem Denken wird ein ganzes Netzwerk an weiteren Grundvorstellungen angesprochen. Dazu gehören alle Grundvorstellungen die zu den Konzepten gehören, die im zum funktionalen Denken gehörenden konzeptuellen Feld sind (siehe Abschnitt 3.1.3). Deren Aufzählung würde allerdings den Rahmen der Arbeit bei weitem überschreiten, so dass hier eine Beschränkung auf die direkt zum Funktionskonzept gehörenden Grundvorstellungen vorgenommen wird.
Zu Teilaspekten des Funktionskonzepts wie der Ableitung oder dem Integral gibt es auch

Grundvorstellungen, die aber über den Rahmen des im Kapitel 1 definierten funktionalen Denkens hinausführen.

Alle oben genannten Grundvorstellungen können auch in eingeschränkten oder fälschlich erweiterten Variationen auftreten. In bestimmten Situationen erweisen sich diese Variationen allerdings durchaus als angebracht.
So kann etwa Zuordnungs-Grundvorstellung um einen Berechenbarkeitsaspekt erweitert werden. Das heißt, dass die Zuordnung keine willkürliche Zuordnung sein darf, sondern durch eine Formel gegeben wird, sodass die zugeordneten Werte ausgerechnet werden können.. Diese dann ausgebildete Fehlvorstellung lässt sich durch „Eine Variable ist einer anderen durch eine Formel zugeordnet, so dass man sie genau berechnen kann“ in Worte fassen.

3.1.4.4.2 Grundkenntnisse

Grundkenntnisse beziehen sich auf spezifische Situationen. Sie können als Auswirkungen von Grundvorstellungen in konkreten Situationen aufgefasst werden. So ist beispielsweise das Grundwissen *Das Vorzeichen von a in f(x)=ax gibt Auskunft, ob der Graph der Funktion steigt oder fällt* eine Konkretisierung der Kovariations-Grundvorstellung bei proportionalen Zuordnungen.

In diesem Abschnitt wird eine Liste von Grundkenntnissen gegeben, die mit ausgewählten Funktionstypen assoziiert sind. Dabei handelt es sich um die wichtigsten Funktionstypen, die in den Situationen des konzeptuellen Feldes zu funktionalem Denken und in den in dieser Arbeit untersuchten Klassenstufen vorkommen (siehe Abschnitt 3.1.3). Zu jeder Grundkenntnis wird angegeben, auf welche der sieben Grundvorstellungen sie sich hauptsächlich bezieht (Abkürzung: GV1-7).

Grundkenntnisse zu Funktionen vom Typ *f(x)=ax*

1. Proportionale Funktionen haben die Formeldarstellung $f(x)=ax$ (GV4)
2. Proportionale Funktionen haben eine Ursprungsgrade als Graphen (GV5)
3. Das Vorzeichen von a gibt Auskunft, ob der Graph der Funktion steigt oder fällt (GV2, GV5, GV4)
4. Der Betrag von a gibt die Steilheit des Graphen an (GV2, GV5, GV4)
5. Bei (einschrittigen) Tabellen zu proportionalen Funktionen erhöht sich die Spalte $f(x)$ immer um den selben Betrag (GV2, GV6) (Erhöhung um a (GV4))
6. a gibt die Änderung von $f(x)$ bei der Erhöhung von x um 1 an. (Zusatz: Zusammen mit $f(0)=0$ folgt: a entspricht dem Funktionswert bei 1) (GV2, GV4)
7. Quotientengleichheit: $f(x)/x$ ist konstant gleich a (GV1, GV4)
8. Vervielfacht man eine Variable um einen Faktor, so vervielfacht sich die andere um den selben Faktor (GV1, GV2) (In der Formeldarstellung $f(n\cdot x)=n\cdot f(x)$ (GV4))
9. Gleiche Änderung in einer Variablen bringen gleiche Änderung in der anderen Variable (Die Zuwächse sind konstant) (GV1, GV2) (In der Formeldarstellung $f(x+n)-f(x)=f(n)-f(0)$ (GV4))

Grundkenntnisse zu Funktionen vom Typ: *f(x)=ax+b*

1. Lineare Funktionen haben die Formeldarstellung $f(x)=ax+b$ (GV4)
2. Lineare Funktionen haben eine Gerade als Graphen (GV5)
3. Das Vorzeichen von a gibt Auskunft, ob der Graph der Funktion steigt oder fällt (GV2, GV5, GV4)
4. Der Betrag von a gibt die Steilheit des Graphen an (GV2, GV5, GV4)
5. b gibt den Wert der Funktion bei 0 an. (Zusätzliche graphische Deutung: b gibt den Startpunkt, den y-Achsenabschnitt an) (GV1, GV5, GV4)
6. Bei (einschrittigen) Tabellen zu linearen Funktionen erhöht sich die Spalte $f(x)$ immer um den selben Betrag (GV2, GV6) (Erhöhung um a (GV4))
7. a gibt die Änderung von $f(x)$ bei der Erhöhung von x um 1 an. (GV2, GV4)
8. Gleiche Änderung in einer Variablen bringen gleiche Änderung in der anderen Variable (Die Zuwächse sind konstant). (GV1, GV2) (In der Formeldarstellung $f(x+n)-f(x)=f(n)-f(0)$ (GV4))

Grundkenntnisse zu Funktionen vom Typ*: f(x)=a/x*

1. Indirekt Proportionale Funktionen haben die Formeldarstellung $f(x)=k/x$ (GV4)
2. Indirekt Proportionale Funktionen haben eine Hyperbel als Graphen (GV5)
3. Bei positivem a besteht die Hyperbel aus zwei fallenden Ästen, bei negativem a aus zwei steigenden Ästen (GV2, GV5, GV4)
4. Je größer der Betrag von a, desto langsamer fällt die Hyperbel (bei positiven a) (GV2, GV5, GV4)
5. In der Tabelle: eine n-fache Vervielfachung des Argumentes bewirkt eine Division durch n des Funktionswertes (GV2, GV6)
6. Produktgleichheit: $f(x)\cdot x$ ist konstant und gleich a (GV1, GV4)

Grundkenntnisse zu Funktionen vom Typ: *f(x)=ax²+bx+c*

1. Quadratische Funktionen haben die Formeldarstellung $f(x)=ax^2+bx+c$ (GV4)
2. Quadratische Funktionen haben die Formeldarstellung $f(x)=a(x+b)^2+c$ (Scheitelform) (GV4)
3. Quadratische Funktionen haben eine Parabel als Graphen (GV5)
4. Das Vorzeichen von a gibt an in welche Richtung die Parabel geöffnet ist (GV2, GV5, GV4)
5. Der Betrag von a gibt an, wie offen die Parabel ist (GV2, GV5, GV4)

6. In der Scheitelform gibt der Betrag von *b* den Betrag x-Koordinate des Scheitels an. Aus dem Vorzeichen von *b* kann das Vorzeichen der x-Koordinate abgeleitet werden, wobei ein negatives Vorzeichen von *b* ein positives Vorzeichen der x-Koordinate ergibt (GV1, GV5, GV4)
7. Das Vorzeichen *b* in der Normalform gibt an, ob der Scheitel links (bei positiven *b*) oder rechts (bei negativem b) von der y-Achse ist (GV1, GV5, GV4)
8. *c* in der Scheitelform gibt die y-Koordinate des Scheitels an (GV1, GV5, GV4)
9. *c* in der Normalform gibt den y-Achsenabschnitt an (GV1, GV5, GV4)
10. Das Wachstumsverhalten Wesentlichen Quadratisch. (GV2)

Grundkenntnisse zu Funktionen vom Typ: $f(x)=a^x$ mit $a>0$

1. Exponentialfunktionen haben die Formeldarstellung $f(x)=a^x$ mit a>0 (GV4)
2. Ist *a* größer als 1 so steigt die Exponentialfunktion, ist $0<a<1$ so fällt sie (GV2, GV5, GV4)
3. Exponentialfunktionen wachsen in Richtung plus unendlich sehr schnell (bei $a>1$, sonst analog) (Zusatz: schneller als jede Polynomfunktion) (GV2, GV5)
4. Exponentialfunktionen nähern sich Richtung minus unendlich der x-Achse an (bei $a>1$, sonst analog) (GV2, GV5)
5. Bei (einschrittigen) Tabellen zu Exponentialfunktionen wird die Spalte von *f(x)* immer mit einem festen Betrag multipliziert (GV2, GV6) (Multiplikation mit *a* (GV4))
6. *a* ist der Wert der Funktion bei 1 (GV1, GV4)
7. Prozentuales Wachstum (GV1) (In der Formeldarstellung $f(x+n)/f(x)=f(n)/f(0)$ (GV4))

Um diese Liste abzuschließen wird noch eine Vorgehensweise vorgestellt, die als Basis für die Erstellung einer Liste von Grundkenntnissen für einen beliebigen Funktionstyp genutzt werden kann.

Grundkenntnisse zu einer beliebige Funktion *f(x)*

1. Typische Darstellung(en) von *f* im algebraischen Register (GV4)
2. Typische Darstellung von *f* im graphischen Register (GV5)
3. Auswirkung im graphischen Register von Änderungen der Parametern im algebraischen Register (GV1, GV2, GV4, GV5)
4. Änderung von *f(x)* in (einschrittigen) Tabellen (GV2, GV6). (Rückführung der Änderung auf Parameter der algebraischen Darstellung (GV4))
5. Wachstumsverhalten von *f* (GV1, GV2) (Rückführung auf die algebraische Darstellung (GV4))

Eine ähnliche Aufstellung kann unter zu Hilfenahme der letzten Aufstellung für alle Funktionstypen gebildet werden. Dabei ist für funktionales Denken auf dem Niveau der Sekundarstufe I noch die Grundkenntnisse zu Wurzelfunktionen, Logarithmusfunktionen, allgemeinen Polynomfunktionen und zu einfachen trigonometrischen Funktionen wichtig. Auf eine genaue Aufstellung wird aber verzichtet, da diese Listen analog zu den oben aufgeführten Beispielen leicht erstellt werden können.
Es ist auch zu beachten, dass die Grundkenntnisse immer spezifischer werden, je feiner zwischen verschiedenen Funktionstypen unterschieden wird.
Die oben aufgeführte Liste der Grundkenntnisse umfasst sicherlich nicht die gesamten Grundkenntnisse zu den einzelnen Funktionstypen. Betrachtet man etwa den Graph und die Variationseigenschaften genauer, so sind den Grundkenntnissen noch alle Grundkenntnisse hinzuzufügen, die mit den Symmetrieeigenschaften des Graphen zusammenhängen.

Einige dieser Grundkenntnisse sind etwa bei Duval als Kenntnisse zu Übersetzungen zwischen linearen Funktionen und deren Graphen (Duval, 1988b, S. 239-242) oder als Grundvorstellungen bei Malle (Malle, ohne Jahr) zu finden.

3.1.5 Konstruktivistische Herangehensweise: Funktionen als Objekte

Im folgenden Abschnitt werden zwei eng verbundene Theorien präsentiert, die in dieser Arbeit vor allem für die Erfassung von Funktionen als Objekte von Bedeutung sind. Gleichzeitig zeigen sie auch die Grenzen dessen auf, was an funktionalem Denken in der in dieser Arbeit betrachteten Altersgruppe erreicht werden kann.

3.1.5.1 Aktion, Prozess, Objekt von Dubinsky

Ed Dubinsky unterscheidet zwischen vier Konzepten, die Schüler von Funktionen haben können (Dubinsky, Harel, 1992, S. 85; Breidenbach et al., 1992, S. 249):

1. *Prefunktion*: Es liegt keinerlei belastbare Auffassung dessen vor was eine Funktion ist. Im Umgang mit funktionalen Abhängigkeiten können sich Schüler mit einem Prefunktion-Kozept auf keine generalisierbare Idee berufen. (Originalbezeichnung: *Prefunction*)

2. *Aktion*: Eine Aktion ist eine wiederholbare mentale oder physische Manipulation, die für eine bestimmte Eingabe ein bestimmtes Ergebnis hervorbringt. Ein Aktions-Konzept zu funktionalen Abhängigkeiten liegt vor, wenn ein Schüler Funktionen als eine Aneinanderreihung von Rechenregeln sieht. In diese wird eine Zahl eingegeben damit sie Schritt für Schritt nacheinander ausgeführt schließlich eine Zahl als Ergebnis liefern. Eine Funktion wird demnach nicht als Einheit, sondern als Folge einzelner Rechnungen gesehen. . (Originalbezeichnung: *Action)*

3. *Prozess*: Schüler mit einem Prozess-Konzept von Funktionen können dagegen Funktionen als vollständigen Prozess erfassen, der einem Element ein anderes Element zuordnet. Sie beschränken die Variablen somit auch nicht auf Zahlen. Die Operationen, die im Aktions-Konzept noch die Funktion an sich darstellen, müssen nicht mehr ausgeführt werden um über

das Ergebnis reden zu können. Das heißt, dass Aktions-Konzept wurde zu einem einzigen Prozess zusammengefasst, es wurde interiorisiert. . (Originalbezeichnung: *Process)*

4. *Objekt*: Wird eine Funktion als Objekt aufgefasst, so können Schüler bewusst Funktionen in eine Variable einsetzen und sie in andere Prozesse oder Aktionen einsetzen.
Ein Objekt wird durch einkapseln eines Prozesses gewonnen, wobei zur Lösung vieler Probleme eine ständige Pendelbewegung zwischen dem Prozess-Konzept und dem Objekt-Konzept benötigt wird. Das Einkapseln ist also ein reversibler, vielfach durchzuführender Vorgang (Dubinsky & Harel, 1992 S. 85; Breidenbach et al., 1992, S. 250; Schwingendorf et al., 1992 S. 135). Aus diesem Grund steht das Objekt-Konzept im engen Zusammenhang mit dem Prozess-Konzept. . (Originalbezeichnung: *Object)*

Als Beispiel wird das Hintereinanderschalten von Funktionen betrachtet:
Ein Schüler mit einem Aktions-Konzept von Funktionen kann in der Lage sein mit Hilfe von algebraischen Regeln und durch Hintereinanderausführen der Rechnungen einen Funktionswert zu berechnen. Sind die Funktionen allerdings nicht durch Formeln gegeben oder haben sie Unstetigkeitsstellen, so wird das Hintereinanderschalten mit einem Aktions-Konzept schwierig.
Ein Prozess-Konzept von Funktionen verspricht bei dieser Aufgabenstellung besseren Erfolg, da die Beschränkung auf Formeln und Berechnungen nicht vorhanden ist und eine Funktion als ganzer Prozess gesehen wird. Es werden also zwei Prozesse zu einem vereint.
Nicht zu verwechseln ist diese Auffassung mit einem Objekt-Konzept. Zwar wird beim Hintereinanderschalten immer objektartig mit der Funktion umgegangen, ob aber tatsächlich ein Objekt-Konzept vorliegt hängt von der gegebenenfalls durchgeführten Einkapselung ab. Bei einem Objekt-Konzept wird beim Hintereinanderschalten ein Objekt „Funktion 1“ in einen Prozess „Funktion 2“ eingesetzt.

Die Unterscheidung zwischen Aktions-Konzept und Prozess-Konzept erweist sich in der Praxis oft als schwierig (Breidenbach et al., 1992, S. 251). Die Annie und John Selden schlagen vor beide Konzepte als entgegen gesetzte Pole eines kontinuierlichen Spektrums zu sehen, zwischen denen sich die Schüler im Lernprozess nicht immer gradlinig bewegen (Selden & Selden, 1992, S. 3).

Das Objekt-Konzept von Funktionen entwickelt sich bei den meisten Schülern erst deutlich nach der in dieser Arbeit betrachteten Alterklasse (siehe Abschnitt 4.1.1). Wie im obigen Beispiel sei noch einmal darauf hingewiesen, dass das Objekt-Konzept nicht mit einem objektartigen Umgang mit Funktionen verwechselt werden darf, dem auch das Aktions-Konzept oder das Prozess-Konzept zugrunde liegen können (vgl. Thompson, 1994, S. 9).

Die Objekt-Grundvorstellung (Abschnitt 3.1.4.4.1) ist direkt mit dem Objekt-Konzept von Funktionen in Verbindung zu setzen. Die Zuordnungs- und Variations-Grundvorstellungen sind nicht mit den hier beschriebenen Konzepten zu beschreiben. Die Zuordnungs-Grundvorstellung wird sowohl im Aktions-Konzept in einer elementaren Ausprägung angesprochen, als auch im Prozess-Konzept in ihrer vollen Ausprägung benötigt. Die Kovariations-Grundvorstellung tritt dagegen erst im Rahmen eines Prozess-Konzeptes auf. (vgl. Schwingendorf et al., 1992, S. 139)

Funktionales Denken bezieht das Aktions-Konzept und das Prozess-Konzept mit ein. Für eine funktionale Denkweise ist also ein Prozess-Konzept von Funktionen nötig, ein Objekt-Konzept kann sich allerdings noch im Aufbau befinden und durch objektartigen Umgang mit Funktionen ersetzt werden.

Mit den verschiedenen Konzepten können auch unterschiedliche Darstellungen, bzw. Sichtweise der Darstellungen assoziiert werden. So lässt sich in einem Graphen oder einer Tabelle eher der Prozess-Konzept Charakter erkennen, während in einer Formel das Aktions-Konzept zum Ausdruck kommt. Mehr dazu im Abschnitt 3.2.2.

3.1.5.2 Reifizierung und struktureller bzw. operationaler Aspekt von Funktionen von Sfard

Es kann eine enge Verknüpfung zwischen der oben geschilderten Theorie und der von Ana Sfard ausgemacht werden. Auch sie beschäftigt sich mit dem Übergang zu einem Objekt und einer dualen Sichtweise, wie sie im Prozess- und Objekt-Konzept von Funktionen zum Ausdruck kommt.

Die von ihr eingeführte Bezeichnung ist die Unterscheidung zwischen einem *operationalem* und einem *strukturellem Aspekt* von mathematischen Begriffen. (Originalbezeichnungen: *operational, structural aspect)*. Der operationale Aspekt bezieht sich auf eine Sichtweise als Prozess, während der strukturelle Aspekt eine objektartige Sichtweise eines mathematischen Begriffes bezeichnet. Sfard betont dabei, dass es sich nicht um entgegen gesetzte Aspekte handelt, die sich gegenseitig ausschließen, sondern vielmehr um Aspekte, die sich gegenseitig ergänzen (Sfard, 1989, S. 151; Sfard, 1991, S. 9; Sfard, 1992, S. 60). Kurz lässt sich dies folgendermaßen beschreiben:

> The structural approach generates insight; the operational approach generates result
> (Sfard, 1991, S. 28)

Bei der Beschreibung der Aspekte benutzt sie selbst die von Dubinsky (siehe oben) bekannte Unterscheidung zwischen Prozess und Objekt (Sfard, 1987, S. 162), sodass für eine genaue Erläuterung auf diesen Abschnitt verwiesen wird.
Sfards Interesse liegt auf der Beziehung zwischen den beiden Aspekten und auf dem Übergang von einem Aspekt zum anderen. An der historischen Entwicklung des Funktionsbegriffes kann beispielhaft erkannt werden, dass sich viele mathematische Begriffe aus einer operationalen Auffassung heraus entwickelt haben und später durch strukturelle Betrachtungsweisen für abstrakte Anwendungen nutzbar gemacht wurden. Dieser Übergang zum Objekt, die *Reifizierung* . (Originalbezeichnung: *reification)* hat sich besonders im Fall von Funktionen als schwierig, aber sehr nützlich erwiesen (Sfard, 1991, S. 15; Sfard, 1992, S. 62ff).

Sfard unterteilt den Übergang in drei Schritte:

- Interiorisierung: der Schüler macht sich mit dem Prozess vertraut und kann am Ende Aussagen über ihn machen, ohne ihn tatsächlich ausführen zu müssen.

- Kondensierung: Der Schüler kann immer mehr über den Prozess als Ganzen nachdenken ohne Teilschritte betrachten zu müssen, die er zu Einheiten kondensiert.
- Reifizierung: Im Gegensatz zu den beiden ersten Schritten handelt sich hier um keinen kontinuierlichen Prozess, sondern um eine Erkenntnis, die der Schüler erlangt. Alle Darstellungen werden auf einmal in einem abstrakten, mentalem Konstrukt vereint, das sich schnell von diesen Darstellungen löst. (Sfard, 1991, S. 18ff).
  Dieser letzte Schritt erweist sich auch deswegen als besonders kompliziert, da die Reifizierung eines Objektes oft mit der Interiorisierung eines Prozesses einer höheren Ebene einhergeht. Dabei besteht eine gegenseitige Abhängigkeit: die Interiorisierung des höheren Prozesses benötigt eine durchgeführte Reifizierung, während die Reifizierung eines interiorisierten Prozess einer höheren Ebene bedarf (Sfard, 1989, S. 158; Sfard, 1991, S. 31).

Aus den Schwierigkeiten, die sich bei der Reifizierung ergeben, und aus ihren Untersuchungen leitet Sfard ab, dass der operationale Aspekt im Lernprozess meistens vor dem strukturellen ausgebildet wird (Sfard, 1987, S. 164; Sfard, 1992, S. 61). Dies steht im Widerspruch zur Unterrichtspraxis, in der viele Begriffe strukturell eingeführt werden (Sfard, 1988, S. 560). Daraus ergeben sich folgende zwei Forderungen:

- Mathematische Begriffe sollen über ihren operationalen Aspekt eingeführt werden
- Der strukturelle Aspekt sollte nicht benutzt werden, solange er nicht für die weitere Entwicklung unumgänglich ist. (Sfard, 1989, S. 152; Sfard, 1992 S. 68)

Analog zu den Arbeiten zum Objekt-Konzept stellt auch Sfard fest, dass eine strukturelle Sichtweise unter den Schülern in der hier betrachteten Altersgruppe nicht zu erwarten ist, bzw. dass der strukturelle Aspekt manchen Schülern ganz verschlossen bleiben wird (Sfard, 1989, S. 153, S. 158; Sfard, 1992, S. 83). Allerdings sind bei vielen Schülern *pseudostrukturelle* Sichtweisen zu beobachten, bei denen eine Darstellung mit dem Objekt identifiziert wird (Sfard, 1992, S. 75). Diese führen zu bekannten Fehlern und Übersetzungsproblemen auf die im Abschnitt 3.2.2 eingegangen wird.

Wie leicht zu erkennen ist, liegt eine große Übereinstimmung zur oben erklärten Theorie von Dubinsky vor. Die von Sfard betonte strukturelle und operationelle Komplementarität findet man bei Dubinsky in der Betonung der Wichtigkeit der Einkapselung und dessen Umkehrung wieder (Pihoué, 1996). Die Theorie von Sfard wird vor allem deswegen hier aufgeführt, da sie ein besseres Verständnis des Übergangs zur Betrachtung als Objekt, also zur Objekt-Grundvorstellung erlaubt.

Es kann auf eine Verbindung zu Duval (Siehe Abschnitt 3.1.1) hingewiesen werden. Der pseudostrukturelle Aspekt bildet sich dann aus, wenn eine Identifikation einer Darstellung und dem mathematischen Objekt an sich stattfindet. Sfard schlägt vor dies durch die Betrachtung von möglichst vielen verschiedenen Darstellungen zu vermeiden (Sfard, 1992 S. 79). Dies entspricht den Feststellungen und Forderungen von Duval (siehe Abschnitt 3.1.1.2).

Schüler in der in dieser Arbeit betrachteten Altersgruppe werden, wie oben erwähnt, nur sehr eingeschränkt zu einer strukturellen Sichtweise gelangen. Dieser Aspekt wird auch nicht in die Definition von funktionalem Denken aufgenommen. Das wäre außerdem gegen die

Forderung von Sfard erst möglichst spät eine strukturelle Sichtweise einzuführen, da in den betrachteten Klassenstufen sehr lange der operationale Aspekt ausreicht (Sfard, 1992, S. 69). Es muss aber in den folgenden Analysen auf pseudostrukturelle Aspekte geachtet werden, die sich wahrscheinlich bei Schülern ausbilden werden, sich aber nicht festigen dürfen.

3.1.5.3 Slavits eigenschaftsorientierte Reifizierung

In Zusammenhang mit Reifizierung sind auch die Arbeiten von David Slavit zu erwähnen. Er schlägt eine eigenschaftsorientierte Herangehensweise an die Reifizierung vor (Slavit, 1995; Slavit, 1997). Schüler sollen über die systematische Untersuchung der Variationseigenschaften von Funktionen in unterschiedlichen Darstellungen dazu gebracht werden Eigenschaften von ganzen Funktionsklassen zu erkennen um schließlich durch eine weitere Abstrahierung zu einer Objekt-Auffassung von Funktionen zu gelangen.

> A student can reify the notion of function as a mathematical object capable of possessing or not possessing these properties (Slavit, 1997, S. 266)

Der hier angesprochene Aspekt der Objekt-Auffassung erinnert stark an Noesis von Duval (siehe Abschnitt 3.1.1), während bei Dubinsky und Sfard der tatsächliche Objektcharakter für höher liegende Prozesse im Vordergrund steht. Allerdings sind diese Auffassungen eng miteinander verwandt.
Diese von Slavit geforderte Herangehensweise erfordert den Umgang mit vielen Funktionsklassen in mehreren Darstellungen, so dass sie sehr zeitaufwändig ist (Slavit, 1997, S. 268). Aber gerade diese breite Fächerung ist für die Ausbildung einer funktionalen Denkweise unumgänglich. Anders ausgedrückt: Bereits die funktionale Denkweise beinhaltet die ersten Schritte zur Reifizierung.

3.1.6 Konstruktivistische Herangehensweise: Concept image und concept definition von Vinner

Eine weitere Theorie zur Beschreibung der Bilder, die Schüler mit Funktionen verbinden, ist die Theorie zu concept image und concept definition von Shlomo Vinner. Sie ist entstanden, um ein Erklärungsmodell dafür zu geben, warum Schüler oftmals andere Eigenschaften mathematischer Konzepte in ihren Überlegungen benutzen als sich durch die ihnen beigebrachte mathematische Definition ergeben (Thompson, 1994, S. 3).

Unter einem *concept image* zu einem mathematischen Konzept wird die gesamte kognitive Struktur verstanden, die mit diesem Konzept assoziiert ist. Dies schließt alle mentalen Bilder (d.h. alle möglichen speziellen und allgemeinen Repräsentationen) und deren Eigenschaften mit ein (Vinner & Dreyfus, 1989, S. 356). Das concept image wird über einen langen Zeitraum durch viele individuelle Erfahrungen von jedem Schüler unterschiedlich aufgebaut und kann auch beschränkende oder falsche, sich gegenseitig widersprechende Elemente enthalten. Zur Wichtigkeit des concept image betont Vinner:

> My basic assumption is that to acquire a concept means to form a concept image for its name. (Vinner, 1992, S. 197)

Oftmals werden nur Teile des concept image abgerufen, so dass Widersprüche erst dann auffallen, wenn die sich widersprechenden Teile gleichzeitig abgerufen werden. Dies kann auch erst sehr spät oder überhaupt nie passieren, so dass die gegensätzlichen Bilder dauerhaft mit dem mathematischen Konzept assoziiert bleiben. (Tall & Vinner, 1981, S. 152)
Zu einem concept image von Funktionen können etwa das Bild einer durchgezogenen Kurve im Koordinatensystem, eine Formeldarstellung wie *f(x)*=… oder das allgemeine Bild einer Zuordnung mit ihren jeweiligen Eigenschaften gehören.

Mit *concept definition* wird eine wörtliche Definition eines Konzeptes bezeichnet. Diese kann auswendig gelernt oder verstanden sein, sie kann richtig oder falsch sein, und sie kann auch ein persönlicher Definitionsversuch eines einzelnen Schülers auf Grund seines concept images sein. Die concept definition ist demnach eine variierende individuelle Definition, die nicht mit einer formalen Definition verwechselt werden darf. Sie kann Vorstellungen generieren, die sich in das concept image des Schülers einfügen.
Hat ein Schüler etwa gelernt, dass eine Funktion eine Relation ist, die jedem Element einer Menge A genau ein Element einer Menge B zuordnet, so kann dies seine concept definition sein. Wird im Unterricht aber ausschließlich mit Funktionen gearbeitet die durch Formeln gegeben sind, so wird er diese Einschränkung in sein concept image aufnehmen und seine concept definition nur dann abrufen, wenn er explizit nach einer Definition gefragt wird. Solange dieser Schüler nur mit solchen Funktionen zu tun hat, die durch Formeln gegeben sind, wird er keinerlei Schwierigkeiten in der Arbeit mit ihnen erfahren. Wenn jedoch Funktionen auftauchen, die keine Darstellung im algebraischen Register haben, wird er sich wahrscheinlich in einer Situation befinden, mit der er nicht umgehen kann (Tall & Vinner, 1981, S. 153).
Diese Abschottung von concept image und concept definition und das dadurch resultierende inkonsistente Verhalten eines Schülers werden als *compartmentalization* bezeichnet (Vinner & Dreyfus, 1989, S. 356). Hier zeigt sich eine Stärke der Theorie von Vinner, da abweichende Verhalten bei Definitionsabfragen und Aufgaben durch das Abrufen der concept definition bzw. des concept image erklärt werden können.
Der oben geschilderte Fall erweist sich dann als besonders problematisch, wenn die concept definition abgeschottet wird und keine Vorstellung im concept image ausbildet. Dann kann es nie zu einem Konflikt und dadurch zu einem Lernprozess kommen.
Dieser Fall tritt nach Vinner insbesondere dann auf, wenn früh eine abstrakte Definition eingeführt wird und anschließend erst ein concept image aufgebaut wird.

> Concept definitions (where the concept was introduced by means of a definition) will remain inactive or even will be forgotten. In thinking almost always the concept image will be evoked (Vinner, 1983, S. 293)

Mathematische Objekte können also über eine formale Definition eingeführt werden, oder sich aus der Arbeit mit einer Vielzahl von Beispielen entwickeln, um schließlich durch die formale Definition gefestigt zu werden. Wird der erste Weg gewählt, so besteht die Gefahr,

dass die im Anschluss an die Definition gesehenen Beispiele das concept image einschränken (Vinner, 1992, S. 198). Aus diesem Grund fordert Vinner eine späte Einführung der Definition.
In diesem Zusammenhang kann erwähnt werden, dass in der historischen Entwicklung des Funktionsbegriffes eine ständige Anpassung des concept images an die concept definition und andersherum vollzogen wurde. In manchen Fällen erwies sich die Definition als zu eng für die im concept image erfassten funktionalen Zusammenhänge, in anderen musste das concept image wegen einer breiter gefassten Definition erweitert werden. Beides war ein langwieriger Prozess, der oft mit starken Widerständen gegen die Erweiterungen verbunden war (Siehe Kapitel 2).

Eine andere problematische Situation ist dann gegeben, wenn die concept definition nicht mit der formalen Definition des Konzeptes übereinstimmt, zum Beispiel wenn sie aus einem falschen concept image gebildet wurde. Auch in diesem Fall muss es zu keinem Konflikt kommen, da das theoretische Gebäude des Schülers in sich schlüssig ist. Deswegen schlägt Vinner eine ständige Erweiterung des Spektrums der betrachteten Beispiele vor, so dass Schüler in so einer Situation gezwungen werden, ihre concept definition dem erweiterten concept image anzupassen (Vinner, 1983, S. 305).

Schwierigkeiten bei der Arbeit mit dem concept image ergeben sich dadurch, dass das concept image eines Schülers für Außenstehende nicht zu erfassen ist. Bei der Bearbeitung von Aufgaben ist es möglich, dass nur Teile des concept images abgerufen werden, so dass immer nur Aussagen über den in dieser Situation abgerufenen Teil des concept image gemacht werden können (Vinner, 1983, S. 297).

Grundvorstellungen und Grundkenntnisse sind Teil des concept images und bauen dieses auf. Solange das concept image keine Grundvorstellungen oder Grundkenntnisse enthält, kann es nicht effektiv zum Lösen von Aufgaben eingesetzt werden. Das concept image umfasst aber auch konkrete Beispiele und Bilder, die vom Schüler mit dem Konzept assoziiert werden. Insbesondere in den Interviewanalysen erweisen sich concept image und concept definition deswegen als sehr nützlich, da sich Schüler beim Bearbeiten der Aufgaben oft auf Bilder, Formeln und Eigenschaften berufen, die sie mit Funktionen assoziieren. Da sie sich ihr concept image zu großen Teilen in der Arbeit mit ihren Lehrbüchern aneignen wird in der vergleichenden Analyse der Lehrbücher von Deutschland und Frankreich auch darauf geachtet, welches concept image mit den dort behandelten Aufgaben aufgebaut werden kann.

Für die Entwicklung der funktionalen Denkweise muss also ein möglichst allgemeines concept image zu Funktionen aufgebaut werden. Bestimmte Einschränkungen bezüglich abstrakter Zuordnungen zwischen Mengen werden die funktionale Denkweise wenig behindern. Sollte jedoch das concept image eines Schülers zu Funktionen nur die Formeldarstellung enthalten, so wird er kein Verständnis für Übersetzungsprozesse entwickeln können und funktionale Zusammenhänge nur in einer der möglichen Darstellungen problemlos erkennen und erstellen können.

3.1.7 Epistemologische Herangehensweise: Sierpinska

Einige der weiter unten aufgeführten Schwierigkeiten mit dem Funktionskonzept können als epistemologische Hürden gesehen werden. Das Funktionskonzept wurde von Anna Sierpinska mit Hilfe dieses von Guy Brousseau geprägten Begriffes untersucht.

Die Theorie zu epistemologischen Hürden geht von folgender Grundannahme aus:
Neues Wissen wird sowohl auf der Basis von älterem Wissen als auch gegen dieses aufgebaut. Sobald ein Teil des Wissens sich als erfolgreich einsetzbar herausgestellt hat, kann es nur noch gegen starke Widerstände abgeändert werden.

Daraus ergibt sich, dass der Prozess der Wissensentwicklung nicht als eine stetig ansteigende Kurve gesehen werden kann, sondern durch abrupte Brüche mit alten Denkweisen und Sprünge auf höhere Entwicklungsstufen geprägt ist (Artigue, 1992 S. 110; Sierpinska, 1992, S. 58). Die Hürden, die diese Sprünge erfordern werden als *epistemologische Hürden* . (Originalbezeichnung: *obstacle épistémologique)* bezeichnet. Damit sind nicht etwa individuelle Lernschwierigkeiten gemeint, sondern unvermeidbare Hürden, die unabhängig vom Individuum auftreten und zum Beispiel auch in der historischen Entwicklung eines Konzeptes gefunden werden können. Aus diesem Grund spielen bei der Identifikation von epistemologischen Hürden historische Analysen eine große Rolle.

Ein Beispiel für eine epistemologische Hürde ist die Identifikation von Funktionen mit ihrer Formeldarstellung. Wie im Kapitel 2 beschrieben lag in der historischen Entwicklung des Funktionsbegriffs eine Fixierung auf die Formeldarstellung vor. Erst die Überwindung dieser Fixierung hat eine Weiterentwicklung zur heutigen Definition erlaubt (Sierpinska, 1992, S. 46). Weitere epistemologische Hürden werden im Abschnitt 4.3 geben.

Das Konzept epistemologischer Hürden ist für die Erklärung von funktionalem Denken nicht unbedingt notwendig. Es hilft aber Schwierigkeiten der Schüler mir dieser Denkweise und dem Funktionsbegriff zu erkennen und zu verstehen, und erlaubt dadurch das Erstellen von Vorschlägen die Schüler besser auf die Überwindung der Hürden vorzubereiten.

3.1.8 Zusammenfassung

In diesem Abschnitt wurde der theoretische Hintergrund der vorliegenden Arbeit erläutert. Dabei wurde die theoretische Verankerung der Definition funktionalen Denkens dargestellt. Außerdem wurden die Werkzeuge vorgestellt, mit denen in den folgenden Kapiteln Lehrpläne, Schulbücher und Schülerfähigkeiten analysiert werden.

In Kapitel 1 wurde bei der Definition dessen, was unter funktionaler Denkweise zu verstehen ist, großes Gewicht auf die Arbeit in mehreren Darstellungsregistern und auf Übersetzungen gelegt. Dies erweist sich im Einklang mit den Arbeiten von Duval, Lesh und Kaput. Die Arbeit in mehreren Registern und Übersetzungen zwischen diesen sind Vorraussetzungen für das Erkennen der mathematischen Idee einer Funktion und damit für die volle Entfaltung der funktionalen Denkweise.
Vergnauds Theorie konzeptueller Felder erlaubt dann die Anbindung der funktionalen Denkweise an eine Menge von Situationen für deren Bearbeitung die funktionale Denkweise vorausgesetzt wird.

Durch vom Hofes Grundvorstellungen und den hier definierten Grundkenntnissen wird eine Aufstellung von Vorstellungen und Kenntnissen ermöglicht, die für eine funktionale Denkweise benötigt werden.
Mit den Theorien von Dubinsky und Sfard kann der Aktions- und Prozesscharakter von Funktionen mit funktionalem Denken verbunden werden und durch die Objekt-Sichtweise, bzw. Reifizierung deren Grenzen aufgezeigt werden.
Zwar sind die Arbeiten von Vinner und Sierpinska eher für die Analyse der Schülerschwierigkeiten von Nutzen, aber es ist doch klar zu sehen, dass für eine funktionale Denkweise ein angemessenes concept image durch die Schüler aufgebaut werden muss.

Sämtliche vorgestellten Theorien werden natürlich auch für spätere Analysen von Nutzem sein. Sei es für die verschiedenen Analysen der benutzten Darstellungen und Aspekte des Funktionsbegriffs, oder für Arbeit mit Lehrplänen, Schulbüchern und den Schülerbefragungen.
Die Definition und theoretische Fundierung von funktionalem Denken und die damit verbundene Zusammenführung deutscher, französischer und internationaler Theorien bildet einen wichtigen Teil der vorliegenden Arbeit. In diesem Zusammenhang wurden auch Grundkenntnisse neu definiert, die letztlich die Verbindung konkreter, statischer, mathematischer Inhalte mit der funktionalen Denkweise ermöglichen.

Das folgende Schema stellt die Organisation des Theorieteils um die funktionale Denkweise herum graphisch dar.

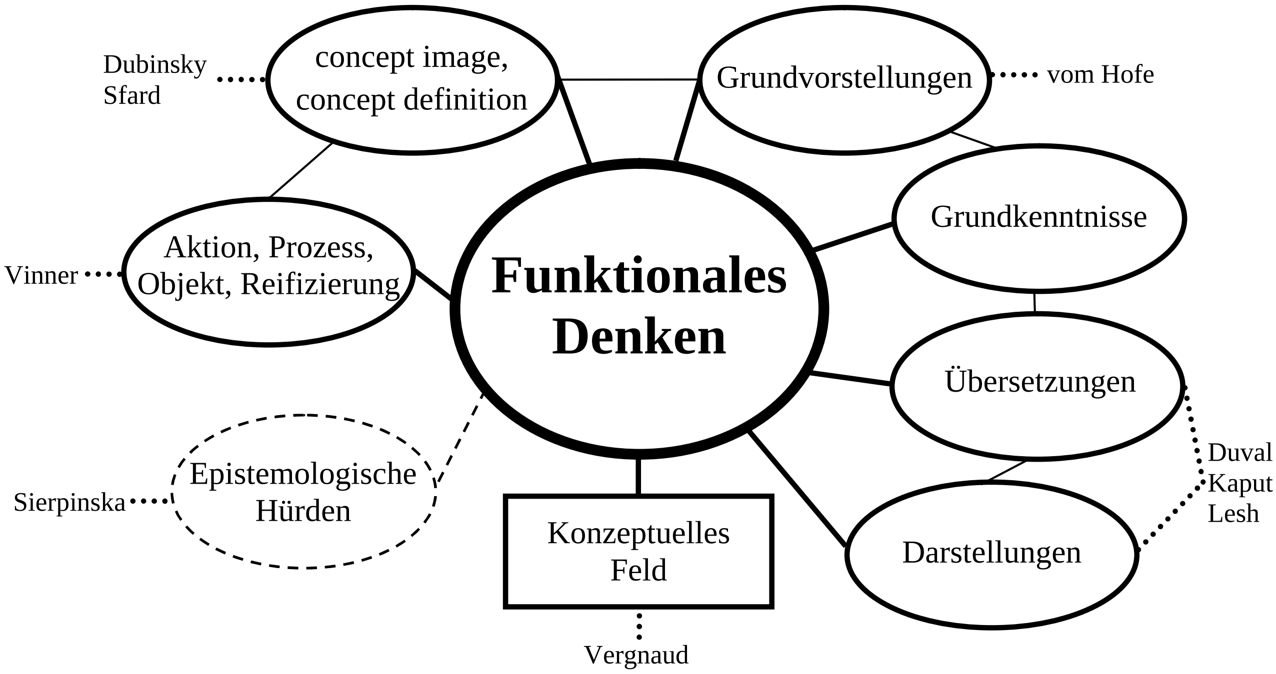


Abbildung 3: Übersichtsschema zur Theorie

Im folgenden Abschnitt werden die verschiedenen Darstellungsformen von Funktionen analysiert und die Beziehungen und Übersetzungsvorgänge zwischen ihnen erläutert.

3.2 Übersetzungen und Darstellungen

3.2.1 Modellierungskreislauf

Durch die obigen Ausführungen und die Definition von funktionalem Denken ist deutlich geworden, welche Wichtigkeit Übersetzungsprozessen in dieser Arbeit zugemessen wird. Die Übersetzungsprozesse wurden in Übersetzungen zwischen Realität und Mathematik und innermathematische Übersetzungen aufgeteilt.

In den Arbeiten zu Modellierung wird zwischen Realität und Realmodell unterschieden. Der Übergang von der Realität zu einem Realmodells stellt nach Kaput (1987b, S. 176) eine vollkommen unterschiedliche Tätigkeit zu den anderen hier betrachteten Übersetzungen dar, da man nur auf eine der beiden Seiten des Übergangs vollen Zugriff hat, nämlich auf das Realmodell. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit unter Realität ein Realmodell verstanden, in dem wesentliche Vereinfachungen, die Teil des Erstellens dieses Modells sind, schon durchgeführt wurden. Situationen in denen Schüler solchen Realmodellen begegnen sind realitätsnahe Schulbuchaufgaben oder PISA- bzw. PALMA-Testitems.

Mathematische Übersetzungsprozesse werden oftmals in einem Modellierungskreislauf dargestellt, der sich bei der Bearbeitung von vielen Aufgabentypen ergibt. Ein Modellierungskreislauf kann zum Beispiel in folgende Teilschritte unterteilt werden (Lesh et al, 1987, S. 36):

1. Vereinfachen – Weglassen von allem was in Ursprungsdarstellung für den angestrebten Zweck irrelevant ist
2. Eine Abbildung zwischen der Ursprungsdarstellung und dem Modell erstellen
3. Das Modell untersuchen um Vorhersagen über die Originalsituation zu treffen
4. Vorhersagen wieder zurück in die Originalsituation übersetzen
5. Überprüfen ob das Ergebnis des Kreislaufs in der Ursprungsdarstellung Sinn macht

Mögliche Modellierungskreisläufe werden in Abbildung 4 und Abbildung 5 schematisch dargestellt (Blum, 2002; vom Hofe et al., 2004). Abbildung 4 ist die Ausgangssituation die Realität (zur Erinnerung: In dieser Arbeit wird unter Realität bereits ein Realmodell verstanden), während in Abbildung 5 ein innermathematischer Modellierungskreislauf dargestellt ist. Schritte eins und zwei der obigen Liste werden kurz als mathematisieren bzw. übersetzen zusammengefasst, der dritte Schritt entspricht dem bearbeiten, der vierte dem interpretieren und der fünfte dem überprüfen. In beiden Abbildungen wird mit den Abkürzungen GV und GK angedeutet, dass insbesondere für den Übergang von der Realität zu einem Darstellungsregister oder für den Übergang zwischen zwei Darstellungsregistern Grundvorstellungen und Grundkenntnisse von entscheidender Bedeutung sind (siehe Abschnitt 3.1.4). Sie werden aber auch bei Durchführung der beiden anderen Schritte des Modellierungskreislaufes genutzt.

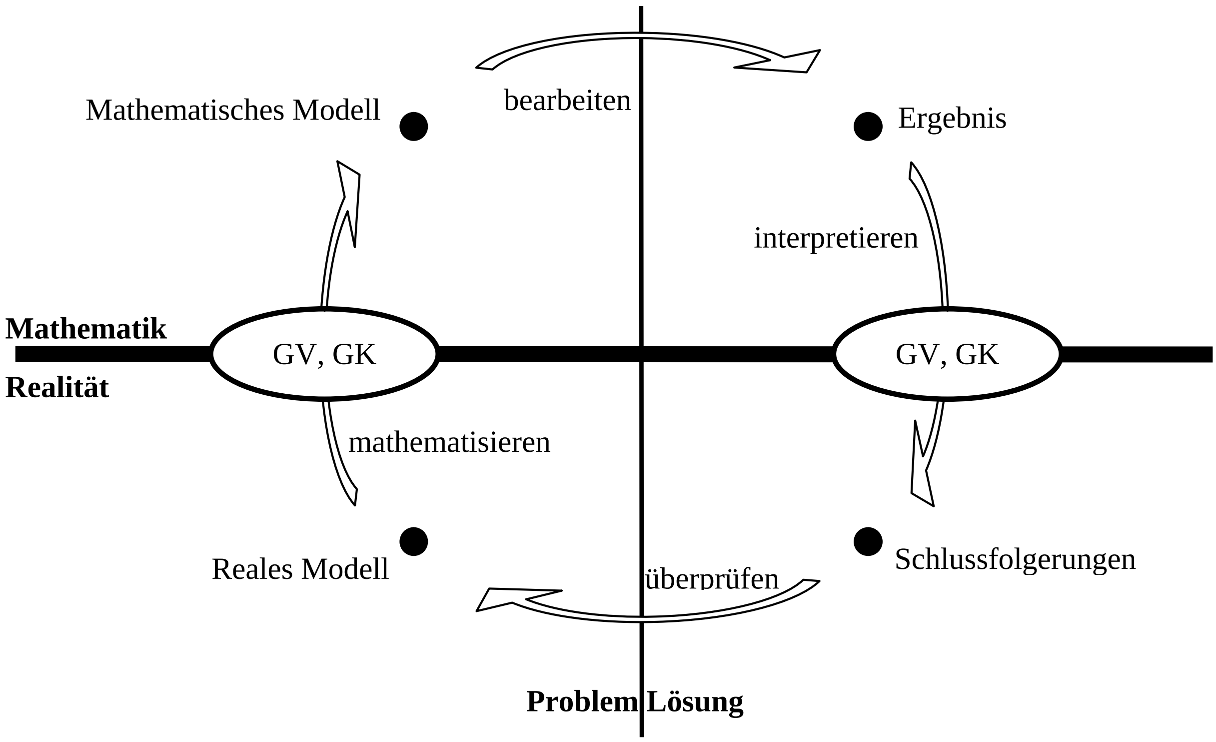


Abbildung 4: Modellierungskreislauf 1

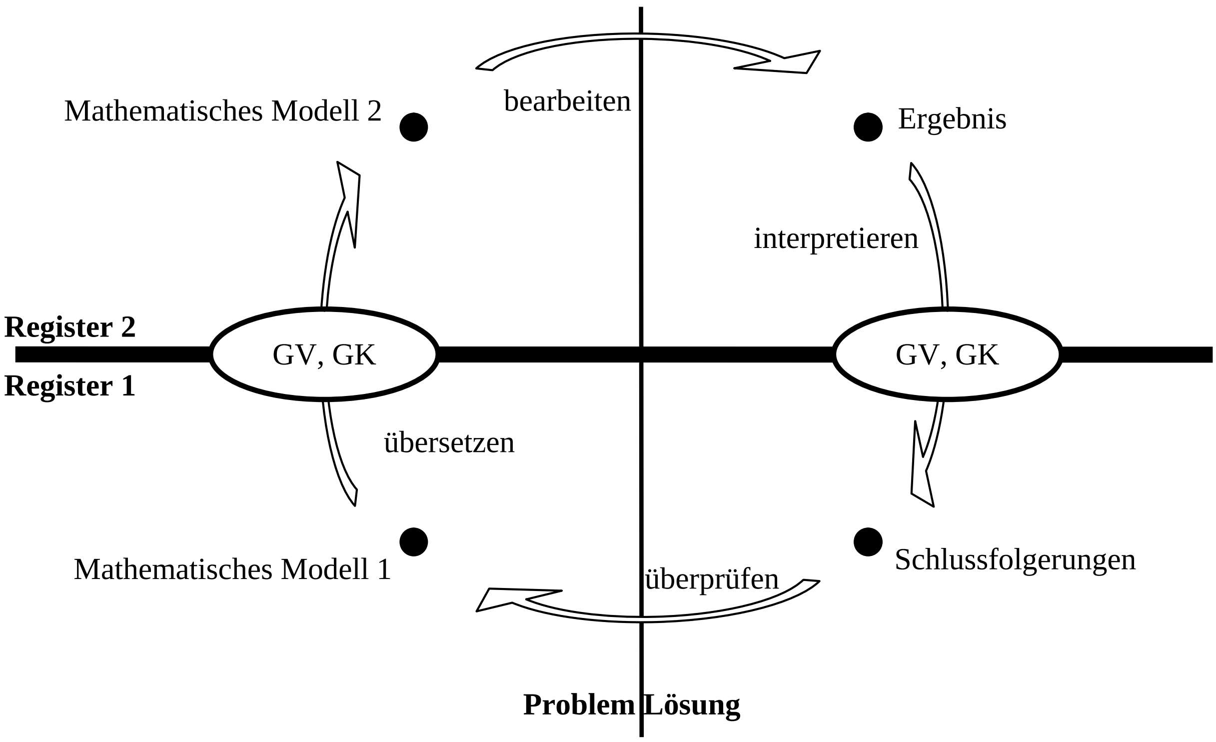


Abbildung 5: Modellierungskreislauf 2

Ein Beispiel für eine Aufgabe die den ersten Modellierungskreislauf erfordert ist das Finden des billigsten Onlinetarifes mit Hilfe von linearen Funktionen. Der in der zweiten Abbildung dargestellte Kreislauf tritt zum Beispiel dann auf, wenn eine Funktion durch eine Tabelle gegeben wird und die Formel gesucht wird. In Abschnitt 3.2.3 wird an zwei beispielhaften Übersetzungsvorgängen gezeigt, wie Grundvorstellungen und Grundkenntnisse konkret beim Übergang von einem Darstellungsregister in ein anderes genutzt werden können.

Im Folgenden wird nur noch zwischen Register 1 und Register 2 unterschieden, auch wenn es sich tatsächlich bei einem Register um ein Realmodell handeln kann, das nicht eindeutig einem Register zuzuordnen ist.
Der Modellierungskreislauf ist nicht als starres Modell zu sehen, sondern kann dem jeweils betrachteten Aufgabentyp angepasst werden. So kann die Überprüfung der Schlussfolgerungen einen neuen Durchlauf des gesamten Kreislaufs mit verbesserten Anfangsbedingungen erfordern. Ebenso kann der Schritt des Mathematisierens oder Übersetzens vor der Bearbeitung umgekehrt und wiederholt werden, wenn sich das Modell für den gewünschten Zweck als untauglich erweist.
Außerdem treten Teilmodelle und Erweiterungen auf, wie sie in den Abbildung 6 und Abbildung 7 zu sehen sind (Lesh et al, 1987, S. 38).

Eine Situation in der ein Teilkreislauf zum Einsatz kommt ist das Erstellen einer Wertetabelle wenn eine Funktion als Formel gegeben ist. Der erweiterte Kreislauf dagegen tritt etwa beim graphischen Suchen der Extremwerte einer durch die Formeldarstellung gegebenen Funktion auf, wenn erst eine Tabelle erstellt wird, bevor der Graph gezeichnet wird.

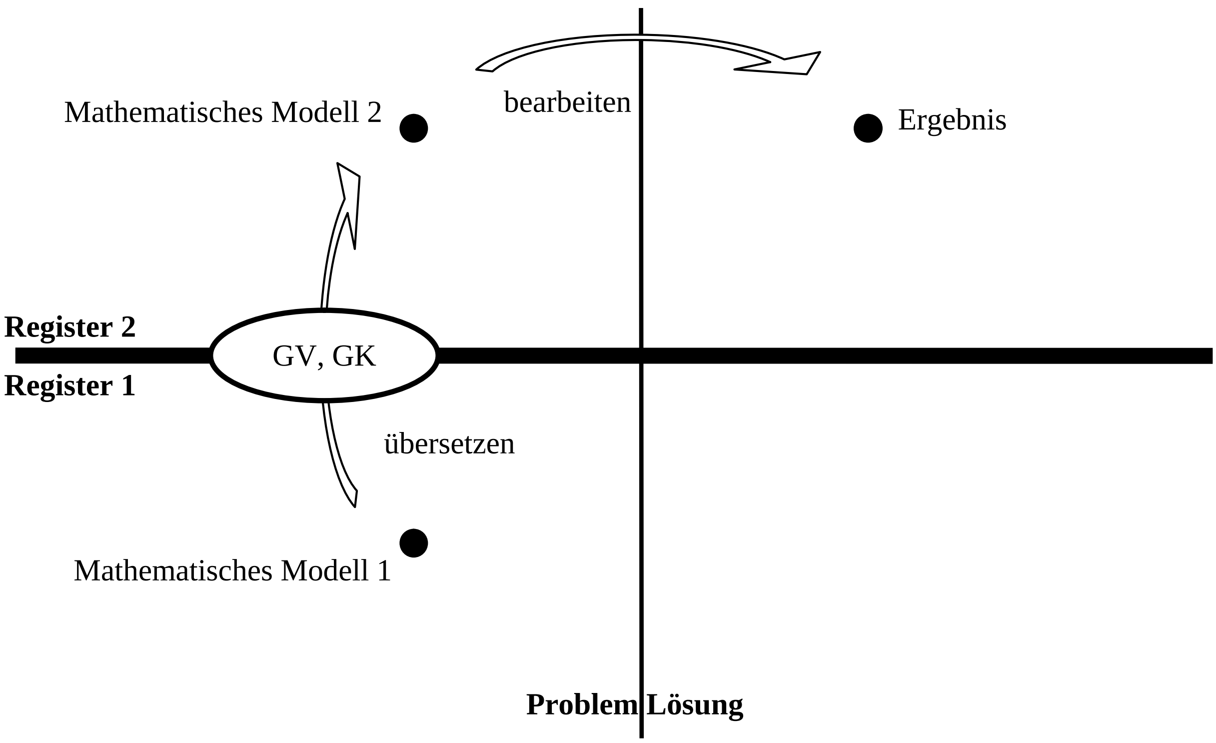


Abbildung 6: Teilkreislauf

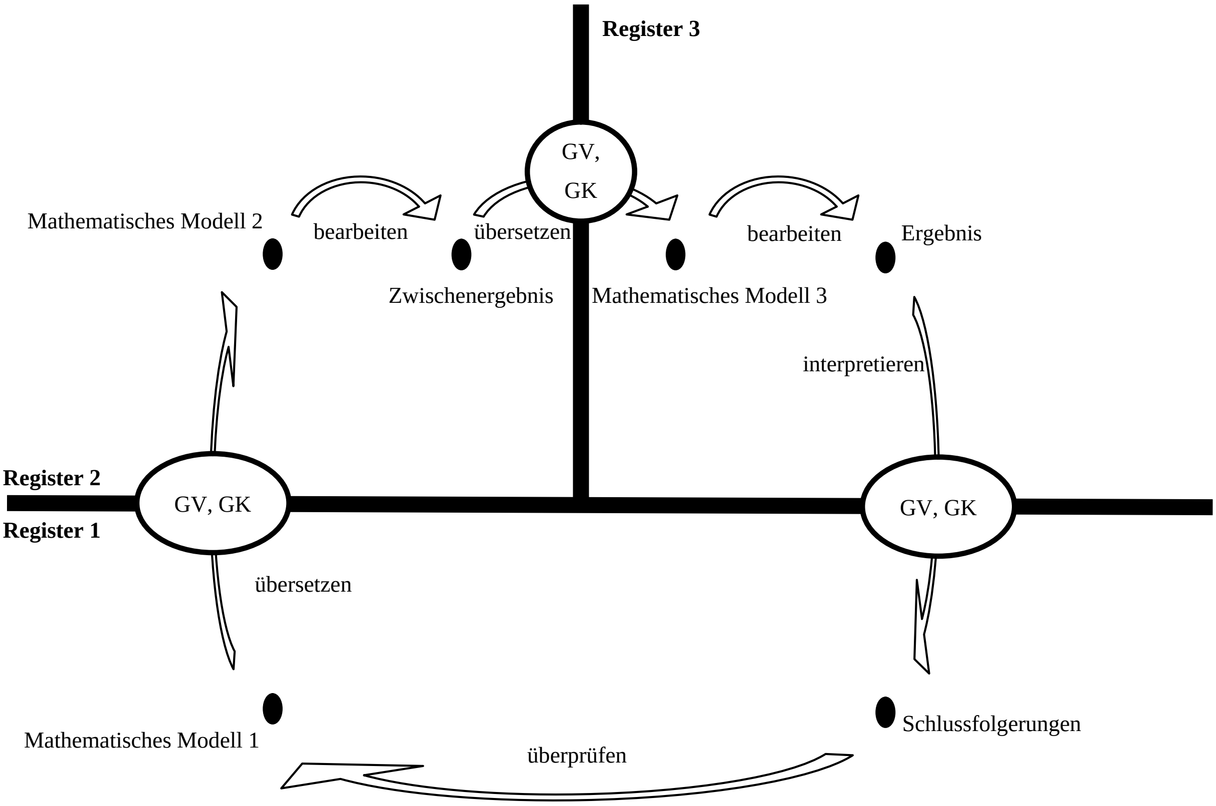


Abbildung 7: Erweiterter Kreislauf

Diese eben gegebene Charakterisierung des Modellierungskreislaufes kann natürlich wesentlich detaillierter dargestellt und analysiert werden. Für den Zweck dieser Arbeit ist sie jedoch ausreichend, so auf dieser Grundlage nun die Darstellungen in verschiedenen Registern und Übersetzungen zwischen ihnen betrachtet werden können.

3.2.2 Darstellungen

Für funktionales Denken werden hauptsächlich vier Register nach Duval beansprucht: Das algebraische, das graphische, das der Tabellen und das der Sprache, wobei das letzte nur mit Einschränkung als ein Register gesehen werden kann (Abschnitt 3.1.1.3).
Es gibt natürlich viele Möglichkeiten funktionale Abhängigkeiten in weiteren Registern darzustellen. Dazu gehören zum Beispiel Variationstabellen (Groupe « Lycée » - Irem de Clermond-Fd, 1993, S. 50; Coppé et al., 2006, S. 37) und Programmcodes (Amra, 2003, S. 66). Diese Arbeit beschränkt sich aber auf die Untersuchung der vier erstgenannten, die in diesem Abschnitt näher beschrieben werden und in Verbindung zum Funktionskonzept gesetzt werden. Dabei wird gezeigt, dass Darstellungen nur eine Auswahl von Aspekten von Funktionen wiedergeben, obwohl sie oftmals als erschöpfende Darstellungen charakterisiert werden (Schwarz & Dreyfus, 1995, S. 261). So betont zum Beispiel Sierpinska die Wichtigkeit die Grenzen der Darstellungen zu kennen:

> Awareness of the limitations of each of the representations and of the fact that they represent one and the same general concept arte certainly fundamental conditions of understanding functions. (Sierpinska, 1992, S. 49)

In der nun folgenden Liste verschiedener Funktionsdarstellungen wird darauf eingegangen, welche Eigenschaften funktionaler Abhängigkeiten in der verschiedenen Darstellung am besten wiedergegeben werden und welche Nachteile diese jeweils haben. Zur Untersuchung welche Register bestimmte Aspekte von Darstellungen am besten unterstützen (wie z.B. Darstellungen als Quellen für das Entdecken von Eigenschaften, als Hilfsmittel, als Lösung oder als Verifikationsmöglichkeit (Weigand, 1988, S. 292)) sei auf die Arbeit von Weigand verwiesen.

3.2.2.1 Formel

Mit Formeln lassen sich in knapper Form Regeln darstellen, mit denen zu einem gegebenen Ursprungswert ein Funktionswert berechnet werden kann. Ist eine bestimmte funktionale Abhängigkeit also durch eine oder zumindest nicht allzu viele Formeln definierbar, so ist das algebraische Register dafür geeignet die Konstanz der Zuordnungsvorschrift schnell erfassbar zu machen.
Allerdings ist durch die kompakte Darstellung eben auch vieles nur implizit gegeben, wie etwa das Variationsverhalten oder die Nullstellen (Kaput, 1987b, S. 170; Kaput, 1989, S. 173). Diese können durch algebraische Arbeit mit der Formel gefunden und bewiesen werden. Zwar eignen sich Darstellungen dieses Register besonders gut für diese Art von Arbeit, da alle Informationen in ihnen enthalten sind, es zeigt sich aber, dass diese Arbeiten abhängig vom Funktionstyp schnell sehr komplex werden und an den schlechten Fähigkeiten der Schüler im Umgang mit algebraischen Ausdrücken scheitern (Bloch, 2003, S. 9). Probleme können allein schon dadurch entstehen, dass es nicht nur eine einzige Formelschreibweise gibt, sondern viele äquivalente. So definieren $y=2x+4$ und $y=|x|$ dieselben Funktionen wie $y=2(x+2)$ und $y=\sqrt{x^2}$ (Schwarz & Dreyfus, 1995, S. 262).
Um eine vollständige Definition einer Funktion im algebraischen Register zu geben muss auch der Definitionsbereich angegeben werden. Dies wird jedoch oft unterlassen und der Definitionsbereich implizit vorausgesetzt, was das Erkennen von Polstellen oder anderen besonderen Punkten weiter erschwert.

Kaput unterscheidet zwischen display notations und action notations. *Display notations* sind Darstellungen die hauptsächlich zur Illustration genutzt werden, während Umformungen, Auswertungen und Parametervariationen eher in *action notations* durchgeführt werden. Diese Unterscheidung ist etwas unscharf und stellt wohl eher zwei Enden eines kontinuierlichen Spektrums dar. Dennoch wird klar, dass es sich bei einer Formeldarstellung um eine action notation handelt (Kaput, 1989, S. 173).

Die Grundvorstellung einer Funktion als Formel (Abschnitt 3.1.4.4.1) bezieht sich natürlich direkt auf dieses Register. Wie in allen Registern können aber auch hier alle drei Grundvorstellungen zu den Aspekten funktionalen Denkens wieder gefunden werden.
Die Objekt- und Kovariations-Grundvorstellung lassen sich durch Betrachtung der Formel als ganzes Objekt, bzw. durch variieren der eingesetzten Werte ausdrücken. Es fällt aber auf, dass

diese Darstellung besonders die Zuordnungs-Grundvorstellung anspricht, da es sich bei der Formel um die Zuordnungsvorschrift handelt mit deren Hilfe durch das Einsetzen eines Wertes der zugeordnete Wert errechnet werden kann.

Der wenig ausgeprägte Objektcharakter zeigt sich nach Dubinsky: Mit der Formeldarstellung einer Funktion lässt sich entweder ein Aktion-Konzept oder ein Prozess-Konzept von Funktionen assoziieren, während das Objekt-Konzept weniger deutlich in Erscheinung tritt (Abschnitt 3.1.5.1). Wird die Formel als Hintereinanderschaltung von mehreren Operationen gesehen die eine Berechnung ermöglichen, so liegt ein Aktion-Konzept vor. Steht für einen Schüler dagegen die ganze Formel im Vordergrund, so ist dies ein Hinweis auf ein Prozess-Konzept (Dubinsky & Harel, 1992, S. 93). Aber auch in diesem Fall ist darauf hinzuweisen, dass eine klare Zuordnung einer Darstellung zu einem Konzept nicht möglich ist und sich alle drei Konzepte in allen Darstellungen wieder finden lassen.
Ähnliches stellt auch Sfard fest, wenn sie, abhängig von der jeweiligen Auffassung, in der Formeldarstellung sowohl den strukturellen als auch den operationalen Aspekt ausgeprägt sieht (Sfard, 1991, S. 6).

Eine von Sierpinska erkannte epistemologische Hürde ist, dass ausschließlich die Formeldarstellung als Funktion akzeptiert wird, was etwa in der Definition von Bernoulli zu sehen ist (Sierpinska, 1992, S. 46; Kapitel 2). Diese Identifikation der Funktion mit der Formeldarstellung macht für Schüler die Nutzung der Vorteile anderer Darstellungen unmöglich und führt etwa zur Ablehnung von Funktionen, die durch zwei unterschiedliche Formeln gegeben werden (Sfard, 1992, S. 75). Auf diese Unterscheidung zwischen Darstellung und Funktion wird weiter unten noch einmal eingegangen.

Zur Formeldarstellung sei abschließend bemerkt, dass sich manche funktionalen Abhängigkeiten mit ihr wesentlich komplizierter darstellen lassen als in anderen Registern. So hat der Graph der Rechtecksschwingung (siehe Kapitel 2) ein schnell erfassbares visuelles Erscheinungsbild, während die Formel nicht leicht zu verstehen ist (Natürlich gibt es auch eine einfache Formeldarstellung der Rechtecksschwingung durch die Fallunterscheidung. Betrachtet man aber eine Treppenfunktion mit sehr vielen unregelmäßigen Sprüngen, so werden aber auch Fallunterscheidungen im Gegensatz zum Graphen unübersichtlich).

3.2.2.2 Graph

Das graphische Register bietet eine effiziente Möglichkeit um gleichzeitig den Zuordnungsgedanken und das Variationsverhalten explizit darzustellen. Im Gegensatz zu Tabelle werden wesentlich mehr Urbild-Bild Wertepaare dargestellt, die noch dazu geordnet sind. Für das Ablesen des Graphs können Erfahrungen aus dem Alltag (Steigung, Schnittpunkte) genutzt werden (Kaput, 1987b, S. 170). Dabei ist nicht nur das Punktweise zeichnen und ablesen von Punkten gemeint, sondern eben auch das interpretieren von globalen Eigenschaften des Graphs und der dahinter stehenden funktionalen Abhängigkeit (Dugdale, 1993, S. 127).
Allerdings sind die aus dem Graph schnell abzulesenden Werte wegen der Zeichenungenauigkeiten nur Annäherungen. Durch diese Ungenauigkeiten erscheinen auch manche Graphen von unterschiedlichen Funktionen gleich, was zu Fehlern führen kann

(Schwarz & Dreyfus, 1995, S. 262) (Siehe Abbildung 8 und Abbildung 6). Außerdem ist der Graph wegen des zu wählenden Ausschnitts zwangsläufig inkomplett, was auch im Zusammenspiel mit der zu wählenden Skalierung Probleme bereiten kann (Goldenberg, 1987, S. 201). Dennoch erleichtert die Sicht der wenn auch unvollständigen Kurve das Erfassen des Objektcharakters von Funktionen (Bloch, 2003, S. 9).

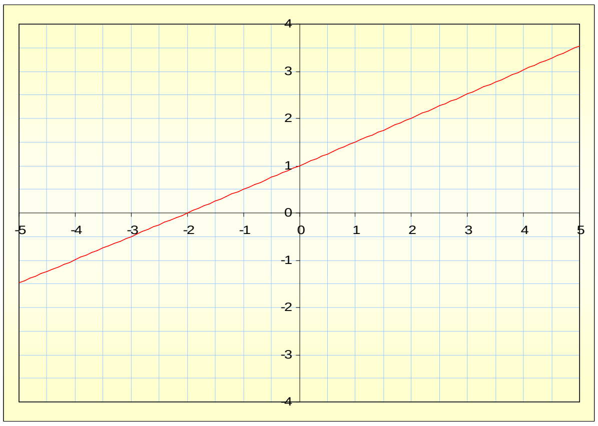


Abbildung 8: Graph von ***$y=10^{0,001x}(0,5x+1)$***

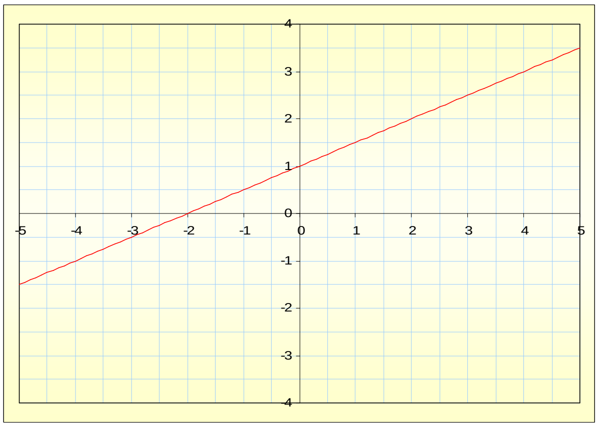


Abbildung 9: Graph von ***$y=0,5x+1$***

Auch der Definitionsbereich, bzw. Lücken in ihm können sofort erfasst werden, jedoch immer mit der Einschränkung auf den dargestellten Ausschnitt.
Es wird deutlich, dass es sich beim graphischen Register um eine display notation im oben erwähnten Sinne von Kaput handelt. Es dient in erster Linie zur Darstellung, allein schon deswegen, da Arbeiten durch die Ungenauigkeit der Graphen erschwert werden.

Es gibt aber auch allgemeine Vorbehalte einiger Schüler gegen eine visuelle Arbeitsweise. Dies liegt nicht nur daran, dass eine visuelle Herangehensweise an mathematische Probleme unüblich ist und von manchen Schülern gar als nicht mathematisch angesehen wird (Eisenberg, 1992, S. 167). Ein anderer wichtiger Grund für die allgemeinen Vorbehalte ist in einer Idee zu finden, die hinter der didaktische Transposition von Chevallard steckt: Wissen ist nicht linear sondern kann als ein großes, sehr stark miteinander verknüpftes Netzwerk gesehen werden. Um es unterrichten zu können muss es jedoch aus nahe liegenden Gründen linearisiert werden, was die Verknüpfungen zerstört, oder zumindest weniger offensichtlich macht. Diese Linearisierung führt direkt zu einer algebraischen Arbeitsweise, da eine visuelle Darstellung des Wissens durch Diagramme oder Graphen von einer starken Konzentration von hoch verknüpften Informationen geprägt ist. Dieser Gegensatz zwischen der Linearität des Unterrichts und der hohen Verknüpfung bei visuellem Arbeiten erklärt einen weiteren Teil der Vorbehalte einiger Schüler gegen eine visuelle Arbeitsweise (Dreyfus & Eisenberg, 1990, S. 29; Eisenberg, 1992, S. 169; Seeger et al.1989, S. 167).
Es ist auch anzumerken, dass in Übereinstimmung mit den eben präsentierten Ideen die Bereitschaft zur Visualisierung relativ unabhängig vom gestellten Problem zu sein scheint und vielmehr mit dem steigenden mathematischen Niveau des Individuums nach oben geht (Eisenberg & Dreyfus, 1986, S. 157).

Aus der bisherigen Beschreibung des graphischen Registers lässt sich entnehmen, dass durch diese Darstellung besonders die Kovariations- und die Objekt-Grundvorstellung angesprochen

werden. Die Art der Kovariation der beiden Variablen ergibt sich aus dem Aspekt des Graphen, während die Objektgrundvorstellung durch das Betrachten der ganzen Kurve zum Ausdruck kommt. Diese wird durch direkte Umformungen am Graph gefördert, die etwa mit Hilfe von Computerprogrammen vorgenommen werden können.
Die Zuordnungs-Grundvorstellung tritt im Gegensatz zum algebraischen oder graphischen Register etwas in den Hintergrund.

Da keine expliziten Berechnungsschritte vorliegen, liegt ein Aktions-Konzept in der Darstellung als Graph nicht vor. Es kann aber sowohl ein Prozess-Konzept mit Hilfe der durch einen Punkt symbolisierten Urbild-Bild Paare gesehen werden, als auch das Objekt-Konzept bzw. der strukturelle Aspekt durch die Betrachtung des gesamten Graphen. (Dubinsky, 1992, S. 92; Sfard, 1991, S. 6)

Probleme mit der Darstellung im graphischen Register entstehen insbesondere dann, wenn keine Unterscheidung zwischen den funktionalen Abhängigkeiten und Graphen gemacht wird. In diesem Fall können auch Kurven wie ein Kreis als Funktionen gesehen werden und Funktionen, die auf zwei Teilen ihres Definitionsbereiches durch zwei verschiedene Graphen repräsentiert werden, nicht als Funktionen akzeptiert werden, da es sich um zwei verschiedene Objekte handelt (Sfard, 1992, S. 75). Durch die Identifikation der Funktion mit ihrem Graphen geht der dynamische Aspekt und damit der Kovariationsaspekt verloren und es bleibt nur noch das statische Bild einer Kurve (Chauvat, 1998, S. 31). Dieser Identifikation kann unter anderem dann auftreten, wenn die Zuordnungs- oder Kovariations-Grundvorstellung von funktionalen Abhängigkeiten vollkommen ausgeblendet oder nicht vorhanden sind und von den Darstellungs-Grundvorstellungen nur die des Graphen ausgebildet wurde.

Zum Schluss ist noch anzumerken, dass sich manche Funktionen nicht in einer angebrachten Art und Weise durch einen Graphen wiedergeben lassen. Zu diesen Funktionen gehört die zum Beispiel die Dirichletfunktion (siehe Kapitel 2).

3.2.2.3 Tabelle

Das Register der Tabellen war das historisch erst genutzte Register um funktionale Zusammenhänge darzustellen (siehe Kapitel 2). In Tabellen werden zu Funktionen gehörende Wertepaare einzeln dargestellt. Wenn die Einträge der Tabelle geordnet sind und die Auswahl der Urbilder durch eine systematische Variation erfolgt ist, so kann auch das Variationsverhalten direkt erkannt werden.

Die Zuordnungsvorschrift ist allerdings nur implizit enthalten und kann in manchen Fällen auch nicht eindeutig aus den Einträgen der Tabelle erschlossen werden. So kann es sich bei der durch Tabelle 2 dargestellten Funktion um $y=x^n$ für alle ungeraden n handeln (Schwarz & Dreyfus, 1995, S. 261)

x	f(x)
-1	-1
0	0
1	1

Tabelle 2

Zwar werden die dargestellten Wertepaare in einer großen Genauigkeit gegeben, aber es handelt sich dennoch um eine Auswahl, die im Gegensatz zur graphischen Darstellung der Wertepaare diskret und sehr beschränkt ist (Kaput, 1987b, S. 170). Linearität, Stetigkeit oder Extremwerte können nicht zuverlässig erkannt werden, was daran liegt, dass hauptsächlich eine Punktweise und keine globale Sicht von Funktionen unterstützt wird (Bloch, 2003, S. 10). Auch der Definitionsbereich und Definitionslücken sind wie in der Formeldarstellung nicht direkt auszumachen und müssen separat angegeben werden.

Da in diesem Register die Darstellung von Wertepaaren im Vordergrund steht, handelt es sich um eine display notation im Sinne von Kaput. Aktionen, wie Umformungen der Funktion oder Parametervariationen, sind in dieser Darstellung nicht durchführbar (Kaput, 1989, S. 173).

Durch die Arbeit mit Tabellen wird in erster Linie die Zuordnungs-Grundvorstellung angesprochen, da Werte angegeben werden zwischen denen eine Zuordnung besteht, auch wenn diese Zuordnung nicht explizit gegeben ist. Aber auch die Kovariations-Grundvorstellung kann sich mit Hilfe von Tabellen durch systematisches variieren der gewählten Urbilder ausdrücken (Confrey & Smith, 1991, S. 60). Die dritte Grundvorstellung zu den Aspekten funktionalen Denkens, die Objektgrundvorstellung, ist für die Arbeit mit Tabellen nicht typisch. Einer der Gründe dafür ist sicherlich, dass in einer Tabelle nur eine diskrete Teilmenge des Definitionsbereiches einer reellen Funktion abgedeckt werden kann und deswegen die Vorstellung als ganzes Objekt nicht gefördert wird.

Daraus ergibt sich außerdem, dass mit diesem Register nicht das Objekt-Konzept verbunden wird. Durch die fehlende explizite Angabe der Zuordnungsvorschrift wird auch nicht das Aktions-Konzept mit ihm assoziiert, sondern das Prozess-Konzept, da der Schüler einen Prozess schaffen muss, der von den Werten einer Spalte zur denen der anderen führt (Dubinsky & Harel, 1992, S. 93).

Da nur bestimmte Wertepaare dargestellt werden, sind alle Funktionen durch Tabellen darstellbar, wenngleich in manchen Fällen charakteristischen Eigenschaften der betrachteten Funktion durch ungeeignete Variation bei der Urbildwahl verloren gehen können. So wird sich zum Beispiel in einer Tabelle mit Schrittlänge eins nur schwer die Periodenlänge von 2π der Sinusfunktion erkennen lassen, und eine Stufenfunktion mit Stufenlänge eins wird sich nicht von einer linearen Funktion unterscheiden.

Manche Funktionen sind sogar gar nicht durch eine Formel oder durch einen Graphen (oder zumindest nur mit großen Einschränkungen) darstellbar, so dass sich dort Tabellen als einzige angebrachte Darstellungsformen erweisen. Solche Funktionen spielen für die in dieser Arbeit untersuchte funktionale Denkweise jedoch keine große Rolle, da es sich um diskrete, rein mengentheoretische Funktionen handelt. In diesen Fällen ist natürlich auch keinerlei Variationsgedanke in einer Tabelle auszumachen. Ein Beispiel für so eine Funktion ist die Zuordnung, die jedem Schüler seine Haarfarbe zuweist (Tabelle 3):

x	f(x)
Alexandra	Blond
Bruno	Grau
Nathalie	Braun

Tabelle 3: Zuordnung: Person, Haarfarbe

3.2.2.4 Sprache

Im Schulunterricht und Schulbüchern werden funktionale Zusammenhänge oft mit Worten beschrieben und dazu mit Bildern illustriert. Diese Darstellungsweise wird in dieser Arbeit als Register der Sprache bezeichnet, obwohl sie, wie in Abschnitt 3.1.1.3 beschrieben, den Begriff eines Registers etwas dehnt und schon eine gewisse Abstrahierung gegenüber dem alltäglichen Sprachgebrauch erfolgt ist.

Darstellungen funktionaler Zusammenhänge durch verbale Beschreibungen ermöglichen auf natürliche Art und Weise eine direkte Verknüpfung mit der Erfahrungswelt der Schüler, indem alltägliche Situationen in einer von ihnen ständig benutzten Darstellungsform beschrieben werden. Diese Beschreibungen können sehr unterschiedlich ausfallen. Es können sowohl einige Wertepaare in konkreten Situationen auftreten (Beispiel 1), als auch eine qualitative oder quantitative Schilderung des Zusammenhangs bzw. der Kovariation (Beispiel 2). Außerdem kann auch nur eine Beschreibung einer Situation gegeben werden, in der sich allgemein etwas ändert oder irgendeine Art von Zusammenhang besteht, ohne dass näher auf die Art des Zusammenhangs oder die Art der Änderung eingegangen wird (Beispiel 3). Dabei muss bei den wörtlichen Beschreibungen nicht immer ein Bezug zu einer realen Situation bestehen (Beispiel 4). Dennoch ist der sichere Umgang mit dieser Darstellung besonders für den Umgang mit Funktionen in alltäglichen Situationen wichtig.

Beispiel 1:	Bei einer Parkdauer von einer Stunde sind 2€ zu bezahlen. Parkt man 3 Stunden beträgt der zu zahlende Preis auf 6€
Beispiel 2:	Eine Kerze ist 30 cm hoch. In 1 Minute brennt sie 0,1 cm ab.
Beispiel 3:	Die Geschwindigkeit mit der die Wasserhöhe in einer Vase während des Einfüllens steigt hängt von der Form der Vase ab.
Beispiel 4:	Bei jeder Verdoppelung der x-Werte verdoppeln sich die y-Werte und der y-Achsenabschnitt ist 5.

Durch die Breite und Komplexität dieses Registers lassen sich keine allgemeinen Beschränkungen bei der Arbeit mit ihm ausmachen. In den meisten Fällen wird aber zum Beispiel die Eingrenzung des Definitionsbereiches vollkommen dem Schüler überlassen, der auch Definitions- und Wertemenge aus dem Kontext erschließen muss.

Dadurch, dass die gesprochene Sprache nicht die Knappheit und Organisation der anderen beschriebenen Register besitzt, kann es sich in manchen Fällen als schwierig erweisen relevante Informationen schnell zu erfassen und aus der Darstellung zu extrahieren.

Da die verbale Darstellungsform hauptsächlich zu Beschreibung von Situationen genutzt wird und nur selten Operationen in ihr durchgeführt werden, handelt es sich um eine display notation.

Außerdem kann die Arbeit in diesem Register abhängig vom Inhalt sowohl die Kovariations-Grundvorstellung, als auch die Zuordnungs-Grundvorstellung erfordern. Eine Objekt-Grundvorstellung ist dagegen bei der Arbeit mit ihm wohl seltener anzutreffen.

Schließlich ist noch zu bemerken, dass diese Darstellungsweise abhängig vom Inhalt dem Aktion-, Prozess- und dem Objekt- Konzept zugeordnet werden kann. In vielen Fällen wird aber das Prozess-Konzept angebracht sein, da weder konkrete Rechenschritte angegeben sind, noch die Funktion als Objekt benutzt wird. In diesen Fällen ist der Prozess zu verstehen, der in der Darstellung beschrieben wird**.**

3.2.2.5 Funktionen als Idee hinter allen Darstellungen

In den vorangegangenen Abschnitten wurden die Darstellungsregister für Funktionen genauer beschrieben, die in den Analysen dieser Arbeit genauer untersucht werden. Die Darstellungsmöglichkeit von Funktionen durch geordnete Paare wurde nicht näher untersucht, da sie kaum mehr im Unterricht benutzt wird und eine Definition von Funktionen über den Relationsbegriff in der Literatur auf breite Ablehnung stößt (siehe Abschnitt 3.3.2).

Viele Funktionen lassen sich zwar in allen hier betrachteten Registern ausdrücken, es gibt aber auch solche, die sich nur in bestimmten ausdrücken lassen. Diese Art von Funktionen ist für die hier betrachtete Entwicklung einer funktionalen Denkweise nur von zweitrangiger Bedeutung. Dennoch ist dies ein Grund schon früh Fähigkeiten im Umgang mit allen Registern zu erwerben.

Ein weiterer, wichtigerer Grund für die Arbeit in mehreren Registern ist, dass die Beschränkung auf ein oder zwei Register die Verwechslung der Darstellung mit dem dargestellten Objekt wahrscheinlicher macht und unter anderem zu den oben beschriebenen Fehlern führen kann (siehe etwa Abschnitt 3.1.5.2).

Außerdem ist es im Fall der Identifikation mit einer der Darstellungen schwierig eine Rechtfertigung für Übersetzungen beispielsweise zwischen der Formel-Funktion und der Graph-Funktion zu finden. Es besteht die Gefahr, dass zwei von einander isolierte Objekte entstehen (Sfard, 1989, S. 156; Thompson, 1994, S. 23).

Drei der vier besprochenen Register wurden als display notation klassifiziert und nur eines, das algebraische Register, ist eine action notation. Auch das Aktion-Konzept wird besonders mit dem algebraischen Register assoziiert, während das Prozess-Konzept mehr oder weniger konkret in allen Darstellungsformen zu finden ist und das Objekt-Konzept am besten im graphischen Register zu erkennen ist.

Ebenso sind die Grundvorstellungen zu den Aspekten funktionalen Denkens für die Arbeit in den unterschiedlichen Registern von verschiedener Wichtigkeit.

	Formel	Graph	Tabelle	Sprache
Variationsverhalten	Implizit	Explizit	Explizit (wenn geordnet)	Möglich
Zuordnungs-vorschrift	Explizit	Implizit	Implizit	Möglich
Display / Action – Notation	Action	Display	Display	Display
Dominante Grundvorstellungen	Zuordnung	Kovariation, Objekt	Zuordnung, Kovariation	Eher Zuordnung, Kovariation
Aktion / Prozess / Objekt	Aktion, Prozess	Prozess, Objekt	Prozess	Eher Prozess
Strukturell / Operational	Strukturell, Operational	Strukturell	Operational	Eher Operational
Beschränkungen	Nicht alle Funktionen sind darstellbar	Sind nur Annäherungen und inkomplett. Nicht alle Funktionen sind darstellbar	Nur eine Auswahl von Urbild Bild Paaren	Oft Zuhilfe-nahme von anderen Registern

Tabelle 4: Überblick über Eigenschaften der Darstellungen

Durch diese Aufstellung wird deutlich, dass jedes Register durch das Setzen von Schwerpunkten und das Betonen von bestimmten Aspekten von Funktionen eine eigene Sichtweise einer in ihm dargestellten Funktion erlaubt.

> Each representation of the concept offers information about particular aspects of the concept without being able to describe it completely. Different external representations of the concept of function complete each other. (Gagatsis & Shiakally, 2004, S. 648)

> Une fonction n’est ni un tableau de valeurs, ni une représentation graphique, ni une suite de touches de calculette, ni une formule, c’est tout cela à la fois (texte de la COPREM, 1987, zitiert nach Groupe « Lycée », 1993)
> (Eine Funktion ist weder eine Wertetabellen, noch eine graphische Darstellung, noch eine Folge von Tasten eines Taschenrechners, noch eine Formel, sie ist all das gleichzeitig.)

Es herrscht somit eine breite Übereinstimmung darüber, dass die Arbeit in vielen Registern eine notwendige Vorraussetzung für ein gutes Verständnis von Funktionen ist (siehe auch Weigand, 1988, S. 320; Goldenberg, 1987, S. 197). Dies entspricht der Forderung nach der Ausbildung der ersten drei Grundvorstellungen zu den Darstellungsformen von Funktionen, also funktionale Abhängigkeiten und Formeln, Graphen und Tabellen miteinander in Verbindung setzen zu können.

Allerdings reicht es nicht mit diesen Darstellungen isoliert umgehen zu können. Übersetzungen zwischen Ihnen müssen durchgeführt werden (siehe Abschnitt 3.2.3) um eine Auffassung dessen aufzubauen, was über die Darstellungen in den verschiedenen Registern hinaus invariant bleibt und somit zum Funktionskonzept an sich gehört. Thompson drückt dies folgendermaßen aus:

> Put another way, the core concept of "function" is not *represented* by any of what are commonly called the multiple representations of function, but instead our making connections among representational activities produces a subjective sense of invariance. (Thompson, 1994, S. 23)

Claude Janvier stellt diese Idee mit Hilfe eines Eisberges dar (Abbildung 10), der zeigt das die Darstellungen über das dahinter stehende mathematische Konzept unzertrennlich miteinander verbunden sind, auch wenn nur eine Darstellungsform in Form einer Spitze des Eisberges zu sehen ist (Janvier, 1983b, S. 24; Janvier, 1987b, S. 69).

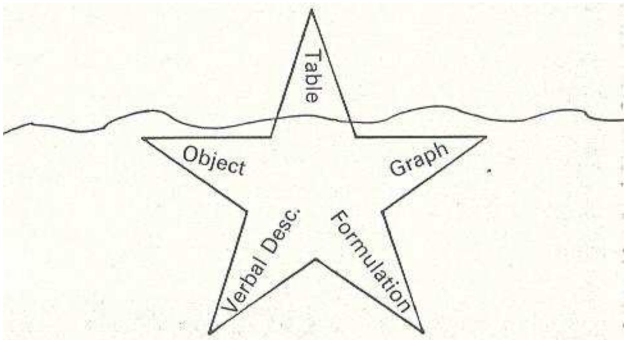


Abbildung 10: Funktionskonzept als Eisberg

Außerdem stimmt dies mit der Theorie von Duval überein, in der sich die Möglichkeit zur Noesis erst durch die Arbeit mit Darstellungen aus mehreren Registern ergibt (Abschnitt 3.1.1.2)

Die Arbeit mit Funktionsdarstellungen in mehreren Registern und die Übersetzung zwischen ihnen sind sowohl wichtig um das Funktionskonzept an sich zu begreifen, als auch um bestimmte Funktionstypen zu verstehen:

> Becoming familiar with a functional prototype, such as the exponential, requires one to develop generalized procedures that allow one to "recognize" its appearance in diverse representations, to operate with these different representations ant to coordinate and contrast the actions across the representations. (Confrey & Smith, 1991, S. 59)

Diesen Abschnitt abschießend kann noch angefügt werden, dass mit den verschiedenen Darstellungen auch unterschiedliche Denkweisen verbunden werden können. So unterscheidet Didier Pihoué zwischen der arithmetischen, der algebraischen und der funktionalen Denkweise bei der Arbeit mit Funktionen. Die arithmetische Denkweise wird hauptsächlich mit dem Register der Tabellen assoziiert, während die algebraische mit dem algebraischen Register verbunden ist. In ähnlicher Weise wie die im Kapitel 1 gegebene Definition definiert er funktionales Denken als die Denkweise, die charakteristisch für den Bereich der Funktionen, der Festlegung von Variablen und der Variation ist. Allerdings koppelt er sie eng an graphische Darstellungen und Variationstabellen, was eine Einschränkung gegenüber der in dieser Arbeit benutzten Definition bedeutet, die insbesondere großen Wert auf Übersetzungen legt (Pihoué, 1996, S. 9).

Im nächsten Abschnitt wird genauer auf Übersetzungen zwischen den in diesem Abschnitt beschriebenen Darstellungen eingegangen.

3.2.3 Übersetzungen

Übersetzungen zwischen den verschiedenen Darstellungen funktionaler Zusammenhänge sind ein grundlegender Bestandteil des funktionalen Denkens. Im folgenden Abschnitt wird zunächst auf Übersetzungen im Allgemeinen eingegangen, deren wichtige Bedeutung herausgestellt und anschließend werden die in dieser Arbeit auftretenden Übersetzungen kurz charakterisiert.

Die Arbeit mit zwei verschiedenen Darstellungen und damit mit Übersetzungen kann aus drei verschiedenen Gründen bei der Lösung von Aufgaben erforderlich sein (Artigue, 1992, S. 114):

1. Interpretation: Beide Darstellungen und die Interaktion zwischen den in ihnen enthaltenen Informationen werden für die Bearbeitung des Problems benötig. Keines der Darstellungsregister hat eine klar dominierende Rolle und es kann keines als Ursprung bzw. Ziel identifiziert werden.
2. Vorhersage: Informationen sind nur in einem Register gegeben. Die Lösung des Problems erfordert den Übergang zu einer Darstellung in einem anderen Register. In diesem Fall hat eine Darstellung die Rolle des Ursprungs, die andere die des Ziels.
3. Begründung/Beweis: Zum Beweis einer Eigenschaft wird eine Darstellung in einem anderen Register gewählt, die sich für die zu bearbeitende Aufgabe als passender erweist. Die zweite Darstellung ist hier eine Arbeitsdarstellung, die wegen der ausgewählten Lösungsmethode benutzt wird.

Es wird deutlich, dass für eine breite Palette an Aufgaben Übersetzungen von großer Wichtigkeit sind. Frühere Abschnitte dieser Arbeit und Werke von anderen Autoren heben die Bedeutung von Übersetzungen für das Verständnis und die Arbeit mit Funktionen hervor. Hier sollen nur einige stellvertretend genannt werden:

Athanasios Gagasits bemerkt, dass ein Registerwechsel eine ökonomischere und leistungsfähigere Arbeit ermöglichen kann (Gagatsis, 2000, S. 8). Dies bestätigt seine Untersuchung, die feststellt, dass die Fähigkeit von einem Register in ein anderes zu übersetzen mit der Fähigkeit Probleme zu Lösen verbunden ist (Gagatsis & Shiakalli, 2004, S. 654).

Eine andere Sichtweise der Wichtigkeit von Übersetzungen erarbeitet Isabelle Bloch. Sie stellt fest, dass Schwarz und Dreyfus Schwierigkeiten von Schülern beim Verbinden von Informationen aus Darstellungen verschiedener Repräsentationsregister aufdecken (siehe Schwarz & Dreyfus, 1995 und Kapitel 4) und dass nach Duval für ein tatsächliches

Verständnis eines mathematischen Begriffes dessen Kenntnis in mindestens zwei Repräsentationsregistern und die Verbindung zwischen diesen beiden Darstellungsmöglichkeiten erforderlich sind (siehe Abschnitt 3.1.1.2). Zusammen ergeben diese Arbeiten, dass Schüler Schwierigkeiten beim Erkennen des Funktionskonzeptes haben werden, wofür unter anderem Probleme mit Übersetzungsprozessen verantwortlich zu machen sind (Bloch, 2003, S. 6f).
Andererseits werden Übersetzungsprozesse oft durch die dahinter stehende, invariante mathematische Idee der Funktion motiviert und gerechtfertigt. Es liegt somit ein Kreislauf vor, in dem Übersetzungen eine Schlüsselrolle spielen.

Aber auch der Ausweg aus diesem Kreislauf kann in Übersetzungen gesucht werden: Durch das Durchführen und Analysieren von ihnen können invariante Eigenschaften von bestimmten funktionalen Abhängigkeiten erkannt werden, die wiederum die Erkenntnis der mathematischen Idee fördern (vgl. Abschnitt 3.1.5.3).

Weiter sei auf den Abschnitt 3.2.2 hingewiesen, in dem die Vor- und Nachteile der Darstellungen in den verschiedenen Registern aufgezeigt werden. Selbst wenn das Erkennen der mathematischen Idee in unteren Klassenstufen noch kein Ziel für das Erlernen von Übersetzungsprozessen ist, so ist das Nutzen von vielen Registern oftmals, wegen der Partialität jedes einzelnen Darstellungsregisters und der Komplementarität von ihnen untereinander, für ein sinnvolles und effektives Arbeiten unausweichlich.

Diese exemplarisch gewählten Arbeiten zu Übersetzungsvorgängen zeigen, dass ein breiter Konsens über deren entscheidende Rolle beim Erlernen von und Arbeiten mit mathematischen Ideen wie dem Funktionsbegriff herrscht.

Die Übersetzungen zwischen den verschiedenen Darstellungsregistern können in einer Tabelle folgendermaßen zusammengefasst werden (nach Janvier, 1983a, S. 55; Schmidt, 1990, S. 12):

Von \ Nach	Formel	Graph	Tabelle	Situation, verbale Beschreibung
Formel		Einsetzen, berechnen	Skizzieren	Variable und Verknüpfungen interpretieren
Graph	Terme an Kurven anpassen		Ablesen	Kurve interpretieren
Tabelle	Terme an Tabelle anpassen	Plotten		Lesen, interpretieren
Situation, verbale Beschreibung	Modellieren	Messen, quantifizieren	Skizzieren, Darstellen	

Tabelle 5: Übersetzungen zwischen Darstellungsregistern

Natürlich ist es schwierig jeden Übersetzungsprozess mit nur einem Wort zu charakterisieren. Dies beschreibt einige von ihnen nicht in ihrer vollen Breite. Dennoch Ist diese Übersicht eine gute Hilfestellung um die weitere theoretische Arbeit und die darauf folgenden Analysen besser zu verstehen.

Folgende Punkte werden durch diese Übersicht hervorgehoben

- Für eine funktionale Denkweise ist die Beherrschung von vielen verschiedenen Übersetzungsprozessen notwendig.
- Das Invertieren von Ursprung- und Zieldarstellung verändert den Charakter des Übersetzungsvorganges zwischen zwei Darstellungen grundlegend (Janvier, 1983a, S. 55).
- Die hellgrau hinterlegten Felder beziehen sich auf Übersetzungen, die wegen der Einbeziehung des komplexen Registers der Sprache eine Sonderrolle spielen. Sie werden oftmals als besonders anspruchsvoll aber auch als überaus wichtig empfunden. (vgl. etwa Schmidt, 1990, S. 13).

Aber diese Übersicht ist auch mit Vorsicht zu benutzen. Einige Übersetzungsprozesse laufen nicht immer direkt ab. So wird etwa beim Übergang von einer Formel zu einem Graphen oftmals eine tabellarische Darstellung dazwischengeschaltet (Janvier, 1987a, S. 29; siehe auch Abschnitt 3.2.1).

Es ist im Rahmen dieser Arbeit nicht möglich für jeden einzelnen der Übersetzungsprozesse detailliert zu beschreiben wie Grundvorstellungen und Grundkenntnisse dabei zum Tragen kommen. Exemplarisch werden aber zwei Übersetzungen an konkreten Beispielen beschrieben, nämlich von einer Situation mit zwei kovariierenden Variablen zur graphischen Darstellung und von der Formeldarstellung zur Tabelle.

1. Übersetzung von Situation zu Graph
   Der Preis des gekauften Fleisches hängt seinem Gewicht ab. Soll diese Situation graphisch dargestellt werden, so können in diesem Zusammenhang relevante Grundvorstellungen und Grundkenntnisse folgendermaßen zum Einsatz kommen:
   Mit Hilfe der Kovariations-Grundvorstellung stellt man eine Verbindung zwischen der gegebenen Situation mit zwei variierenden Größen und funktionalen Abhängigkeiten her. Die Grundvorstellung von funktionalen Abhängigkeiten als Graph erlaubt das Ziel der Übersetzung (nämlich ein Graph in einem Koordinatensystem) zu erfassen und ermöglicht die Aktivierung von Grundkenntnissen. Mit den Grundkenntnissen zu proportionalen Funktionen lässt sich die proportionale Situation identifizieren (Grundkenntnis 8 zu proportionalen Funktionen in Abschnitt 3.1.4.4.2) und schließlich die Ursprungsgerade mit der durch den Preis pro Kilo festgelegten Steigung zeichnen (Grundkenntnisse 2, 3, 4 und 6).
   Natürlich ist diese Übersetzung auch mit Aktivierung anderer Grundvorstellungen und anderer Grundkenntnisse zu machen. So kann etwa die Zuordnungs-Grundvorstellung abgerufen werden oder der Graph mit Hilfe von zwei Urbild-Bild Paaren gezeichnet werden.
2. Übersetzung von Formel zu Tabelle
   Aus einer funktionalen Abhängigkeit in Fromeldarstellung lassen sich nicht direkt Urbild-Bild Paare ablesen. Sollen einige dieser Paare angegeben werden, so kann folgender Übersetzungsvorgang eingeleitet werden: Mit Hilfe der Grundvorstellung funktionaler Abhängigkeiten als Formel wird die Verbindung von der Formel zu funktionalen Abhängigkeiten hergestellt. Die Grundvorstellung funktionaler Abhängigkeiten als Tabellen erlaubt die Zieldarstellung zu identifizieren. Das Ausfüllen der Tabelle kann entweder durch Berechnen erfolgen, oder bei bestimmten Funktionstypen mit den Grundkenntnissen zur Veränderung in einschrittigen Tabellen.
   Auch in diesem Fall kann die Übersetzung mit Hilfe von anderen Grundvorstellungen erfolgen. Es kann zum Beispiel auch die Zuordnungs-Grundvorstellung aktiviert werden, da Zahlenpaare gesucht werden, wo eine Zahl der anderen zugeordnet ist.

Die oben ausgeführten Beispiele stellen gewissermaßen Idealfälle dar, in denen die Grundvorstellungen voll ausgebildet sind und zum richtigen Zeitpunkt aktiviert werden können. Bei vielen Schülern, insbesondere in den unteren der betrachteten Klassenstufen, ist dies nicht der Fall. Dennoch können diese Schüler einige Übersetzungen durchführen, da sie schon einige Grundkenntnisse zu funktionalen Abhängigkeiten besitzen. Diese sind dabei noch nicht fest in einem Netz von Grundvorstellungen und Grundkenntnissen verankert und agieren als präfunktionale Grundvorstellungen. So kann etwa im ersten Beispiel ohne jegliche Kenntnis von funktionalen Abhängigkeiten mit Hilfe von der Kenntnis „wenn man doppelt, dreimal, etc soviel von einer Sache kauft, so zahlt man doppelt, dreimal, etc. so viel“ (Kenntnis 8 zu proportionalen Funktionen) und der Kenntnis „solche Situationen zeichnet man als eine steigende Gerade mit Hilfe von zwei Punkten“ (Kenntnis 2 zu proportionalen Funktionen) die Übersetzung erfolgreich durchgeführt werden.

Grundkenntnisse kommen nicht nur während des Übersetzungsprozesses, sondern auch bei der Kontrolle des Ergebnisses der Übersetzung zum Einsatz. Wird etwa im ersten Beispiel mit

Hilfe der Zuordnungsvorstellung und der Berechnung von mehreren Urbild-Bild Paaren die Lösung gesucht und liegen durch einen Rechenfehler die Urbild-Bild Paare nicht alle auf einer Geraden, so kann mit der Grundkenntnis „proportionale Funktionen haben eine Ursprungsgerade als Graphen“ (Grundkenntnis 2 zu proportionalen Funktionen) leicht das Vorhandensein eines Fehlers erkannt werden. Ohne diese kann auch ein Graph als Lösung akzeptiert werden, der keine Gerade ist.

Weitere Ausführungen zu Übersetzungen finden sich in Abschnitt 3.1, insbesondere bei den Erklärungen der Theorien von Duval, Lesh et al., Kaput und Vergnaud.

In Abschnitt 3.2 wurde die verschiedenen Darstellungen funktionaler Abhängigkeiten charakterisiert und ihre unterschiedlichen Ausprägungen hervorgehoben. Außerdem wurde die Vielfalt an unterschiedlichen Übersetzungsvorgängen dargestellt und auf den Ablauf von Übersetzungsprozessen eingegangen. Dadurch ist nun das Hintergrundwissen für die Analysen von Lehrplänen, Lehrbüchern und Schülerarbeiten zu funktionalem Denken vorhanden, bei denen Übersetzungen wegen der Charakterisierung von funktionalem Denken eine herausragende Rolle spielen.

Im nächsten Abschnitt werden bestimmte Sichtweisen und Aspekte von Funktionen beschrieben und die Problematik der Art und des Zeitpunktes der Funktionsdefinition erläutert.

3.3 Die Funktionsdefinition

Kovariation, Zuordnung und Transformation sind Beispiele für Aspekte von Funktionen, die mit der Definition des Funktionsbegriffs hervorgehoben oder dort nur implizit erwähnt werden können. Dadurch ergibt sich für Lehrplan- und Lehrbuchautoren die Möglichkeit der Wahl von unterschiedlichen Schwerpunkten in der Definition. Außerdem hat der Zeitpunkt der Einführung der Funktionsdefinition Einfluss auf den weiteren Aufbau des Lehrstoffs und kann auch bei der Wahl des Schwerpunktes der Definition eine Rolle spielen. Die Standpunkte verschiedener Autoren hierzu werden in den nächsten Abschnitten dargestellt und diskutiert.

3.3.1 Sichtweisen und Aspekte von Funktionen

Im Kapitel 2 wurde dargestellt, dass es lange Zeit gedauert hat, bis die heute übliche Funktionsdefinition gefunden war. Bei dieser Entwicklung stand anfangs die Kovariations-Grundvorstellung im Vordergrund. Sie wurde jedoch immer weiter zugunsten der Zuordnungs-Grundvorstellungen in den Hintergrund gedrängt, bis hin zu ihrem völligen Verschwinden bei der mengentheoretischen Definition.

Kovariation und Zuordnung sind zwei Aspekte von Funktionen, die durch die gegebenen Erklärungen, durch den Prozess der Begriffsbildung und durch die Art der Definition betont werden können oder, im Gegenteil, weniger Gewicht verliehen bekommen werden können. Viele Autoren konstatieren, dass in der Praxis vieler Länder der Zuordnungsgedanke überwiegt und vertreten die Auffassung, dass beide Aspekte bei der Begriffsbildung vertreten sein sollten (Confrey & Smith, 1991, S. 57; Thompson, 1994, S. 11; Slavit, 1997, S. 270; René de Cotret, 1998, S. 9). Dies entspricht der in dieser Arbeit vertretenen Ansicht und wird auch durch Definition von funktionalem Denken hervorgehoben.

In der historischen Entwicklung der Funktionsdefinition wurde der Kovariationsaspekt auch deswegen mehr und mehr verdrängt, weil er sich mit manchen Funktionen nicht vereinbaren lässt. So bildet die konstante Funktion $f(x)=c$ schon eine Hürde für eine Arbeit mit dem Kovariationsaspekt (Confrey & Smith, 1991, S. 58) und eine Funktion, die einer Person ihre Ausweisnummer zuordnet (etwa in einer Datenbank), kann mit diesem Aspekt überhaupt nicht mehr erfasst werden (Thompson, 1994, S. 10). Andererseits sind manche Eigenschaften von Funktionen, wie etwa Stetigkeit, nur schwer mit dem Zuordnungsaspekte zu verstehen (Slavit, 1997, S. 270). Weitere Ausführungen zu Kovariation und Zuordnung finden sich in den Kapiteln 1 und 2 sowie im Abschnitt 3.1.4.4.1.

Zur begrifflichen Klärung sei darauf hingewiesen, dass der auf den zwei Grundvorstellungen fußende Zuordnung-Kovariation Gegensatz auch in leicht abweichender Weise mit anderen Begriffen bezeichnet wird. So wird beispielsweise auch Korrespondenz-Abhängigkeit (Correspondenz-Dependence) (Schwingendorf et al., 1992, S. 139), Korrespondenz-abhängige Variable (Selden & Selden, 1992, S. 2), Transformation-Variable (Janvier, 1983b, S. 24) für diese Unterscheidung benutzt.
Natürlich werden hier unterschiedliche Schwerpunkte gesetzt. In der Gruppe Zuordnung, Transformation, Korrespondenz liegt bei einer Zuordnung der Akzent auf der Vorschrift, mit deren Hilfe zugeordnet wird. Bei einer Transformation wird das Element der Definitionsmenge genauer betrachtet, das transformiert wird. Bei der Korrespondenz wird schließlich die Gegenseitigkeit betont, da keine der Variablen im Vordergrund steht.
Diese Gegenseitigkeit wird in der Gruppe Kovariation, Variable, Abhängigkeit durch Kovariation wiedergegeben, wo beide Variablen gleichberechtigt kovariieren. Bei der Bezeichnung Variable verschwindet die Zuordnungsvorschrift am deutlichsten von den hier betrachteten Begriffen. Abhängigkeit (auf Französisch dépendance) betrachtet das Element der Wertemenge genauer, das von einem Element der Definitionsmenge abhängt.
Die Bezeichnungen Abhängigkeit und dépendance können sich allerdings als problematisch erweisen. Mit dem Wort Abhängigkeit kann eine gewisse Kausalität verbunden werden, was zu Missverständnissen führen kann. So wird von einigen Schülern beispielsweise der Kurs einer Aktie als nicht abhängig von der Zeit gesehen, da er nicht voraussagbar ist (Lengnink, 2002, S. 304). Ebenso können konstante Funktionen nicht als Funktionen akzeptiert werden, da sie eben nicht von einer Variable abhängen.
Dies ist auch im Zusammenhang mit der Definition von funktionalem Denken zu beachten, wo von funktionalen Abhängigkeiten die Rede ist ohne dass ein Kausalitätsgedanke aktiviert werden soll.

Aus dem hier beschriebenen Zuordnung-Kovariation Gegensatz ergibt sich eine Punktweise-Sichtweise (Pointwise) von Funktionen einerseits und eine Über-die-Zeit (Across time) bzw. globale Sichtweise andererseits (Even, 1998, S. 119; Monk, 1988, S. 1). Hierauf wird näher im Kapitel 4 eingegangen.

Im nächsten Abschnitt wird die Definition von Funktionen als Menge von geordneten Paaren dargestellt und deren Vor- und Nachteile erklärt.

3.3.2 Ordered pair

Um 1900 wurde eine mengentheoretische Definition des Funktionsbegriffs gegeben, die Funktionen über den Relationsbegriff erklärt (Siehe Kapitel 2). Sie hat sich im Gegensatz zu früheren Definitionen als mathematisch exakt und für alle funktionalen Situationen geeignet erwiesen und gibt die heutige Auffassung von Funktionen am besten wieder. Um 1970 ist diese Definition in Deutschland und Frankreich für einige Jahre in den Schulunterricht gekommen, bevor sie nach und nach wieder verdrängt wurde (Siehe Kapitel 2).

Verschiedene Punkte werden an ihr kritisiert:

- Sie eliminiert jeglichen Variationsgedanken, der in älteren Definitionen zumindest implizit zu finden war (René de Cortret, 1988, S. 6; Krüger, 2000a, S. 233; Malik, 1980, S. 492).
- Sie betont zu sehr innermathematische und formal abstrakte Betrachtungsweisen (Buck, 1970, S. 255; Markovits et al, 1986, S. 18; Thorpe, 1989, S. 17; Schmidt, 1990, S. 9).
- Für die meisten Schüler ist sie zu kompliziert, um sie zu verstehen. (Schwingendorf et al., 1992, S. 133).
- Nur ein kleiner Prozentsatz der Schüler wird sie jemals in ihrer vollen Breite brauchen (Malik, 1980, S. 492, Sierpinska, 1992, S. 57).
- Man kann mit ihr funktionale Abhängigkeiten zwar darstellen, aber manche Eigenschaften der Funktionen lassen sich im Repräsentationssystem der geordneten Paare nicht wiedergeben (Kaput, 1989, S. 171).
- Die mengentheoretische Darstellung besitzt keine Qualitäten, die nicht schon in den anderen Repräsentationssystemen (Formel, Graph, Tabelle) enthalten sind (Kaput, 1987b, S171).
- Relationen und Funktionen sind in ihrer Anwendung zwei grundverschiedene Konzepte, was man im Einzelfall an den betrachteten Eigenschaften und den durchgeführten Arbeiten sieht (wie zum Beispiel Hintereinanderschaltung als übliche Arbeit mit von Funktionen, die für Relationen untypisch ist und die Untersuchung der Eigenschaft der Reflexivität im Falle von Relationen) (Sierpinska, 1992, S. 49).

Für manche Anwendungen wird die Definition mit Hilfe von Relationen aber auch als äußerst nützlich angesehen: etwa für die Graphentheorie, Relationale Datenbanken oder Automaten. Und auch die Forderung, dass Abstraktion wo immer möglich vermieden werden sollte ist besonders für höhere Mathematikkurse nicht immer haltbar (Selden & Selden, 1992, S. 2).

Vor diesem Hintergrund wird im nächsten Abschnitt angegeben, welche Art der Funktionsdefinition in dieser Arbeit bevorzugt wird, und zu welchen Zeitpunkt, auch nach Meinung vieler anderer Autoren, die Definition des Konzeptes erfolgen sollte.

Um diesen Abschnitt abzuschließen wird eine von Janvier beschriebene Funktion gegeben, die er mit dem Satz kommentiert

> Il semble bien qu'on ait quelque part oublié l'essentiel ! (Janvier, 1983b, S. 28)
> (Es scheint wohl, dass man irgendwo die Hauptsache vergessen hat!)

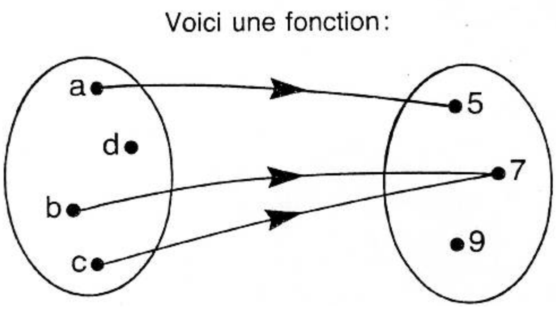


Abbildung 11: Eine Funktion

3.3.3 Art und Zeitpunkt der Funktionsdefinition

Was den Zeitpunkt einer formalen Funktionsdefinition betrifft herrscht ein breiter Konsens innerhalb der Forschergemeinschaft: eine Definition sollte erst nach einer ersten Kontaktaufnahme und der Arbeit mit funktionalen Situationen erfolgen und nicht den Einstieg in dieses Kapitel bilden (Groupe « Lycée » - Irem de Clermond-Fd, 1993, S. 56; Coppé et al., 2006, S. 38).

> (A)n early introduction of the general definition of function does not make sense; it will be either ignored or misunderstood (Sierpinska, 1992, S. 48)

Eine zu frühe Einführung birgt auch das Risiko einer compartmentalization, wenn etwa die Definition auswendig gelernt und ohne Bezug zu Anwendungen gespeichert wird (Abschnitt 3.1.6 ; Kapitel 4).

Zur Art der eingeführten Definition wird oft gefordert nicht, nicht nur oder nur später die allgemeine Dirichlet-Definition einzuführen. So will Anna Sierpinska erst spät eine allgemeine Definition geben und davor den Schülern viele Möglichkeiten zeigen, wie Funktionen gegeben oder von ihnen gesprochen werden kann (Sierpinska, 1992, S. 57). Mohammed Abdul Malik beschreibt eine langsame Heranführung an die Funktionsdefinition, bei der im ersten Stadium nur von Beziehung zwischen Variablen die Rede ist, dann von einer Korrespondenz zwischen reellen Zahlen und erst zum Schluss für fortgeschrittene Mathematikstudenten die volle Funktionsdefinition gegeben wird. Dies ist ausreichend, da nur wenige Studenten tatsächlich die volle Breite der Definition brauchen und die anderen mit einer einfacheren, leichter verständlichen Definition besser arbeiten können (Malik, 1980, S. 492).

Katja Lengnink nutzt aus diesem Grund in einem Versuchsunterricht eine Definition, durch die funktionalen Abhängigkeiten (nicht Funktionen) definiert werden:

> Abhängigkeiten, bei denen eine Größe schon aufgrund der anderen Größen eindeutig festliegt, nennt man funktionale Abhängigkeiten. (Lengnink, 2002, S. 305)

Auch andere Autoren haben Zweifel, ob allen Schüler eine abstrakte Definition gelehrt werden sollte. Eine Definition, wie sie beispielsweise Euler benutzt hat (siehe Kapitel Geschichte des Funktionsbegriffs), reicht für die meisten Aufgaben im Schulalltag aus, so dass die abstrakte Dirichlet-Definition erst nach dem Studium von Ausnahmen dieser einfachen Definition einzuführen ist (vgl. etwa Vinner & Dreyfus, 1989, S. 365; Führer, 1995, S. 128).

Eine frühe Definition kann also zu Problemen und Ablehnung von Seiten der Schüler führen und ist für den Aufbau des Unterrichts auch nicht zwingend notwendig. In den in dieser Arbeit behandelten Klassenstufen kann oder sollte wohl mit einer vereinfachten Funktionsdefinition gearbeitet werden.
Auch für die Ausbildung der funktionalen Denkweise ist keine Kenntnis einer mathematisch korrekten Funktionsdefinition notwendig. Funktionales Denken ist bewusst so definiert, dass es auch mit einer Funktionsdefinition, wie sie Katja Lengnink oben gibt, zu wesentlichen Teilen ausgebildet werden kann.
In den Kapiteln 6 und 7 wird im Folgenden untersucht werden, wann Funktionen im Unterricht von Deutschland und Frankreich definiert werden und ob dabei die Dirichlet-Definition von Anfang an benutzt wird. Außerdem werden Aufgaben in einigen Schulbüchern analysiert um zu prüfen, ob die gegebene Definition tatsächlich in ihrer vollen Breite benutzt wird, oder ob Schüler ihr concept image mit einer eingeschränkten Auswahl von funktionalen Situationen bilden sollen.

3.4 Die Entwicklung funktionalen Denkens

Durch die in den bisherigen Abschnitten geleisteten Vorarbeiten kann nun besser als im Kapitel 1 erklärt werden, wie das funktionale Denken ausgebildet wird und wie der Grad der Beherrschung der funktionalen Denkweise erkannt werden kann.

Für die Ausbildung von funktionalem Denken ist die Arbeit mit Alltagssituationen zu funktionalen Zusammenhängen unerlässlich. Hans-Joachim Vollrath schreibt dazu:

> Es gibt eine Reihe von Grundphänomenen, die für die Bildung des Funktionsbegriffs und damit auch für die Entwicklung des funktionalen Denkens eine wichtige Rolle spielen (Vollrath, 1989, S. 18)

> Als Grundphänomene erscheinen mir dabei: „Vorgänge“, „Messungen“, „Operationen“ und „Kausalitäten“. (Vollrath, 1989, S. 18)

Diese Grundphänomene beschreibt er anschließend genauer:

> Funktionen dienen bei der Beschreibung von Vorgängen dazu, Aussagen über die zeitliche Entwicklung zu machen. (Vollrath, 1989, S. 19)

> Mit Maßfunktionen kann man Größen berechnen. (Vollrath, 1989, S. 20)

> Durch funktionale Betrachtungen von Operationen werden Änderungen von Größen erfaßt. (Vollrath, 1989, S. 21)

> Durch die Beschreibung von Kausalzusammenhängen durch Funktionen kann man Abhängigkeiten beschreiben. (Vollrath, 1989, S. 23)

Für die Entwicklung einer funktionalen Denkweise ist also die Arbeit mit einer ganzen Reihe von verschiedenen Situationen von großer Bedeutung. Diese Arbeit sollte aber nicht nur im Rahmen des Funktionsunterrichts stattfinden, sondern sich über den gesamten Mathematikunterricht und auch in andere Fächer, wie etwa Physik, erstrecken (Nguyen, 1982). Dabei ist diese Forderung nicht wie in den Meraner Beschlüssen zu verstehen, wo sich der gesamte Schulunterricht an dieser Leitlinie orientieren sollte (siehe Kapitel 2). Vielmehr ist hier das selbstverständliche Arbeiten und Nutzen von eindeutigen Zuordnungen gemeint, wenn immer sich Möglichkeit dazu ergibt.

Der Grad der Beherrschung der funktionalen Denkweise lässt sich an mehreren Punkten erkennen:

- Werden Situationen mit funktionalen Abhängigkeiten als solche erkannt?
- Können selbständig Beispiele für funktionale Abhängigkeiten angegeben werden?
- Wie weit sind die Grundvorstellungen zu den Aspekten funktionalen Denkens und zu den Darstellungsformen ausgeprägt?
- Wie gut sind die Grundkenntnisse ausgebildet?
- Sind insbesondere unterschiedliche Funktionstypen und deren charakteristische Eigenschaften bekannt?
- Wie sicher wird mit den Darstellungen in den verschiedenen Registern umgegangen?
- Können Übersetzungen zwischen Darstellungen unterschiedlicher Register durchgeführt werden?
- Sind darüber hinaus Definition und weiterführenden Konzepte (wie Ableitung, Integral) bekannt?

Mit Hilfe dieser Fragen werden die Analysen der Schülerantworten in späteren Kapiteln durchgeführt werden. Auch die schon bekannten Schwierigkeiten bei der Arbeit mit Funktionen, die im nächsten Kapitel dargestellt sind, werden unter diesen Gesichtspunkten betrachtet.

4 Untersuchungen zu Funktionen

Im diesem Kapitel wird ein Überblick die zahlreichen, bereits existierenden Studien zum Funktionsverständnis gegeben, so dass die bereits bekannten Problemfelder bei der Analyse der Lehrpläne, Schulbücher und Schülerantworten besonders berücksichtigt werden können.

Im ersten Teil des Kapitels werden wichtige Teile von concept images von Schülern erklärt, wie sie in zahlreichen Studien gefunden wurden. Dazu gehört auch die Vorstellung von Funktionen als Aktion, Prozess oder Objekt. Außerdem wird auf Untersuchungen zur concept definition von Schülern eingegangen
Im zweiten Teil des Kapitels wird ein Überblick über Artikel zu den Übersetzungsfähigkeiten von Schülern und Studenten zwischen Darstellungen in den verschiedenen Darstellungs-registern gegeben.
Anschließend werden Studien zu epistemologischen Hürden und Übersichtsartikel vorgestellt und abschließend eine Übersicht über die von anderen Autoren genannten Verbesserungs-möglichkeiten des Funktionsunterrichts gegeben.

Um dieses Kapitel kurz und übersichtlich zu halten werden im Regelfall lediglich die Ergebnisse der Artikel zusammengefasst, ohne auf die dort genutzten Untersuchungsmethoden genau einzugehen. Diese Darstellungsmethode wurde gewählt, da das Ziel dieses Kapitels nicht eine kritische Bewertung anderer Studien zum Funktionsbegriff ist, sondern die Erarbeitung einer Liste von bekannten Problemen bei der Arbeit mit Funktionen, die in den weiteren Analysen genutzt werden kann. Für eine genaue Darstellung anderer Studien sei deswegen auf die Originalartikel verwiesen.

4.1 Untersuchungen zum concept image und zur concept definition

Durch den Umgang mit Funktionen und funktionalen Situationen bilden Schüler und Studenten ihre concept images von Funktionen (Abschnitt 3.1.6). Diese sind nicht immer mit der mathematisch korrekten Definition von Funktionen in Einklang zu bringen, da sie Erweiterungen oder Einschränkungen enthalten.
Auch die concept defnitions der Schüler und Studenten müssen nicht mit der üblichen Funktionsdefinition übereinstimmen. Sie können vom concept image beeinflusst sein oder auch in Gegensatz zu ihm stehen, was zum Phänomen der compartmentalization führt.

Studien zu concept images und concept definitions werden im den folgenden Abschnitten zusammengefasst.

4.1.1 Problematische Teile von concept images

Es gibt eine große Fülle an Studien zu den concept images von Schülern und Studenten vieler Altersklassen. Im diesem Abschnitt wird ein Überblick über die Studien gegeben und eine Auflistung wichtiger, mathematisch falscher Bestandteile der concept images erstellt.

Shlomo Vinner wertet 1983 146 Fragebögen aus, die von israelischen Schülern aus der 10. und 11. Jahrgangsstufe bearbeitet wurden (Vinner, 1983). Dabei können folgende Teile der concept images identifiziert werden:

1. Eine Funktion wird durch eine einzige Regel gegeben.
   Eine Funktion die auf unterschiedlichen Teilen des Definitionsbereiches verschieden definiert ist, wird nicht als eine, sondern als mehrere Funktionen aufgefasst.
   Eine Abschwächung diese Einschränkung ist dann vorhanden, wenn zwar Funktionen, die auf unterschiedlichen Intervallen verschieden definiert werden, akzeptiert werden, aber nicht Funktionen, die durch eine Regel mit ein paar isolierten Ausnahmen gegeben sind.
2. Der Graph einer Funktion ist „vernünftig".
   Darunter können unterschiedlichste Eigenschaften verstanden werden: Der Graph sollte immer steigen oder immer fallen, er sollte durchgehend sein, er sollte symmetrisch sein ….
3. Für jedes *y* aus dem Wertebereich gibt genau ein *x* aus dem Definitionsbereich.
   Dabei kann es sich um eine falsch memorierte Definition, aber auch um einen selbst hinzugefügten Zusatz zur Eindeutigkeitsforderung handeln.
4. Es werden auch Kriterien in das concept image aufgenommen, die nicht direkt mit Funktionen oder deren Darstellung verknüpft sind. So wird eine Funktion nur dann als solche akzeptiert, wenn Mathematiker diese offiziell anerkennen, indem sie ihr einen Namen oder ein Symbol zuordnen.

Der erste Punkt ist eng mit der Darstellung von Funktionen durch Formeln und der dazu gehörigen Grundvorstellung verbunden (Vinner, 1983, S. 303). Diese Grundvorstellung zu den Darstellungsformen funktionaler Abhängigkeiten mit Bezug zum algebraischen Register ist hier als Fehlvorstellung entwickelt worden und kann etwa durch „eine Funktion ist durch *eine* Formel darstellbar" ausgedrückt werden.

Markovits et al. stellen diese Beschränkung auf Funktionen, die durch *eine* Formel gegeben werden, auch in ihrem Test mit Schülern aus der 9. Klasse fest (Markovits et al., 1986). Zusätzlich konstatieren sie, dass konstante Funktionen und Funktionen mit diskretem Definitionsbereich Schwierigkeiten bereiten.
Eine mögliche Ursache für die Nichtaufnahme von diesen Funktionstypen in das concept image ist in der Kovariations-Grundvorstellung zu sehen. Wird nur diese Grundvorstellung mit dem Funktionskonzept verbunden und die Zuordnungs-Grundvorstellung nicht aktiviert, so wird eine Interpretation einer „konstanten Variation" schwierig und das Erkennen einer funktionalen Situation in einer diskreten Zuordnung unmöglich (vgl. auch Tall & Bakar, 1991, S. 7).

Auch der zweite Punkt, das ein Graph „vernünftig" zu sein hat, wird von weiteren Autoren als Teil vieler concept images identifiziert.
So untersuchen David Tall und MdNor Bakar speziell die concept images von 28 Schülern im Alter von 16-17 Jahren und von 109 Studenten im ersten Semester im Bezug auf funktionale Situationen, die im graphischen Register dargestellt sind (Tall & Bakar, 1991; Tall & Bakar,

1992). Sie stellen fest, dass vom Aspekt eines Graphen eine gewisse Regularität erwartet wird, er keine willkürlich wirkende Form haben darf und nicht abrupt enden sollte. Dies wird auch auf die oben genannte Fehlvorstellung zurückgeführt, dass eine Funktion durch *eine* Formel gegeben wird und dadurch die oben genannte Regularität in der graphischen Darstellung aufweisen soll. (siehe auch Even, 1993; Zehetmaier, 2001, S. 115)

Darüber hinaus stellen viele Autoren fest, dass lineare Funktionen eine dominierende Stellung in den concept images vieler Schüler haben (Dreyfus & Eisenberg, 1983; Markovits et al., 1986; Markovits et al., 1989; Janvier, 1998).

Es wurden auch zahlreiche Untersuchungen durchgeführt, um die Funktionsauffassung von Schülern und Studenten mit dem Aktion, Prozess und Objekt Analyseschema zu beschreiben (Abschnitt 3.1.5). Daniel Breidenbach et al. befragen 62 Studenten und stellen fest, dass zwei Drittel von ihnen lediglich eine Prefunktion oder Aktionsauffassung von Funktionen haben. Die restlichen Studenten haben entweder eine Prozessauffassung oder sind nicht einzuordnen (Breidenbach et al., 1992).
Zu einem sehr ähnlichen Ergebnis kommen Keith Schwingendorf et al. bei einer Befragung von 56 Studenten im ersten und zweiten Semester. Auch hier wird mehrheitlich eine Prefunktions- oder Aktionsauffassung von Funktionen gefunden. Weniger als ein Drittel der Antworten der Studenten kann der Prozessauffassung zugeordnet werden (Schwingendorf et al., 1992).

In diesem Zusammenhang sind auch Studien zum operationellen oder strukturellen Aspekt von Funktionen zu nennen. Anna Sfard untersucht hierzu 60 Schüler im Alter von 16 Jahren und 73 Studenten im Alter von 22 bis 25 Jahren. Sie stellt in Übereinstimmung mit den anderen Studien fest, dass die Auffassung der Studenten näher am operationalen Aspekt von Funktionen ist, als am strukturellen (Sfard, 1987; Sfard, 1989).

Wie in Abschnitt 3.3 schon erwähnt, wird bei der Sichtweise von Funktionen neben der Unterscheidung operational-strukturell auch zwischen Punktweiser (pointwise) und Über-die-Zeit (across-time) Sicht getrennt. Diese Unterscheidung ist eng mit dem Gegensatz Zuordnung-Kovariation (siehe Abschnitt 3.3) verbunden.
Unter einer Punktweisen Sicht versteht man die ausschließliche Betrachtung von einzelnen Wertepaaren, wie es etwa bei der Arbeit Wertetabelle oder dem Punktweisen Ablesen von Graphen gemacht wird. Sobald jedoch mehrere Wertenpaare zusammen untersucht werden, um zum Beispiel das Variationsverhalten zu bestimmen, spricht man von einer Über-die-Zeit (oder auch globalen) Sicht (Monk, 1988, S. 1; Even, 1998, S. 109; vgl. auch Duval, 1988b, S. 236).
Diese Unterscheidung ist auch mit der Unterteilung in Aktions-, Prozess und Objektaspekt in Beziehung zu setzen, ohne mit ihr überein zu stimmen. So können mit einer Punktweisen Sicht sowohl der Aktions- als auch der Prozessaspekt verbunden werden und eine Über-die-Zeit Sichtweise ist auch ohne eine Auffassung als Objekt möglich.
Die Herausbildung beider Sichtweisen ist für eine funktionale Denkweise von großer Bedeutung, was sich schon aus ihrer Nähe zur Zuordnungs- bzw. Kovariations-Grundvorstellung ergibt.

Steve Monk testet hierzu 628 Studenten im Rahmen ihrer regulären Mathematikprüfungen. Er stellt fest, dass ein Punktweises Verständnis Vorraussetzung für ein Über-die-Zeit Verständnis ist, da ein Scheitern in Punktweisen Fragen ein Scheitern in Über-die-Zeit Fragen mit sich führt, während ein richtiges Beantworten von Über-die-Zeit Fragen das richtige Beantworten der Punktweisen Frage sehr wahrscheinlich macht. Dennoch wird ein Über-die-Zeit Verständnis nicht automatisch entwickelt, sobald ein Punktweises Verständnis erlangt wurde (Monk, 1988). In einer späteren Interviewstudie mit 20 Studenten bestätigt er diese Ergebnisse (Monk, 1992).

Auch Sylvie Coppé et al. stellen in einer Studie in einer Klasse fest, dass die Punktweise Sichtweise deutlich stärker bei den Schülern ausgeprägt ist als eine globale Sichtweise (Coppé et al., 2006, S. 49).

Es ist aber nicht davon auszugehen, dass eine Über-die-Zeit Herangehensweise immer bessere Ergebnisse hervorbringt. Ruhama Even zeigt in einer Interviewstudie mit 10 Schülern, dass sich abhängig vom Aufgabentyp auch eine Punktweise Sicht als stärker erweisen kann als eine globale (Even, 1998, S. 120). Daraus ergibt sich die Notwendigkeit einer Beherrschung von beiden Sichtweisen.

Die hier aufgezählten Teile von concept images von Schülern, Studenten und Lehrern sind natürlich nur eine kleine Auswahl dessen, was tatsächlich mit Funktionen im concept image eines Individuums verbunden werden kann. Diese Auswahl stellt aber typische Problemstellen dar und wird sich in den später durchgeführten Analysen als nützlicher Leitfaden erweisen um Probleme besser zu erkennen.
Im folgenden Abschnitt wird auf Studien zur concept definition eingegangen. Diese kann sich aus dem concept image ergeben oder unabhängig von ihr erlernt werden.

4.1.2 Problematische concept definitions

Die concept definition von Schülern kann von ihnen entweder durch auswendig lernen der mathematische korrekten Definition gebildet werden, oder sich im Einkland mit deren concept image formen bzw. gebildet werden (Abschnitt 3.1.6). Im ersten Fall besteht die Gefahr einer Abschottung des concept images (compartmentalization) und im zweiten Fall das Problem, dass sich aus einem fehlerhaften concept image keine mathematisch korrekte concept definition bilden lässt. Oftmals wird eine Mischung aus beiden Möglichkeiten angetroffen werden.

In dem oben schon erwähnten Test mit 146 israelischen Schülern findet Shlomo Vinner folgende vier Kategorien von concept definitions (Vinner, 1983):

1. Die mathematisch korrekten Funktionsdefinition, wobei sie manchmal mit Elementen des concept images gemischt wird.
   Im Wesentlichen handelt es sich bei dieser Kategorie um die concept definitions, die aus der Wiedergabe der korrekten Definition mit eigenen Worten bestehen.
2. Funktionen als Regel, die eine Korrespondenz definiert.
   Der hauptsächliche Unterschied zu den concept definitions aus Kategorie 1 ist, dass in

diesem Fall keine willkürlichen Funktionen zugelassen werden. Es handelt sich also um eine Einschränkung der Breite der Definition.

3. Funktionen als algebraischer Term, Gleichung oder Formel.
   Es handelt sich hier um eine weitere Einschränkung von Kategorie 2. Hier wird nicht nur eine Willkür abgelehnt, sondern sogar explizit die Existenz einer Formel gefordert. Es findet also eine Identifikation der Funktion mit ihrer Formeldarstellung statt. Die Grundvorstellung zu den Darstellungsformen funktionaler Abhängigkeiten mit Bezug zum algebraischen Register wurde als dominierende Vorstellung entwickelt (Abschnitt 3.1.4.4.1).

4. Funktionen als graphische Darstellung durch den Funktionsgraphen oder Pfeildiagramme.
   Wie in Kategorie 3 findet hier die Identifikation der Funktion mit einer Darstellung in einem Darstellungsregister statt, nämlich dem graphischen. Auch hier hat die jeweilige Grundvorstellung zu den Darstellungsformen funktionaler Abhängigkeiten überhand genommen und sich zu einer Fehlvorstellung entwickelt.

In dieser Aufstellung werden in höheren Kategorien immer mehr Teile des concept images in die concept definition aufgenommen. Shlomo Vinner und Tommy Dreyfus verfeinern die Kategorisierung 1989 bei einer Studie mit 271 Studenten verschiedenen Niveaus und 36 Lehrern. Dabei werden zwei weitere Kategorien eingeführt (Vinner & Dreyfus, 1989):

5. Funktionen als Abhängigkeitsrelation.
   Bei dieser Art von concept definition wird zum Beispiel von zwei Variablen geredet, die von einander abhängen. Dabei steht die Kovariations-Grundvorstellung im Vordergrund.

6. Funktionen als Operationen.
   Diese concept definition ist wohl schwer von der als Regel oder von der als Formel zu trennen. Im Gegensatz zur Regel ist der Blickpunkt hier auf nicht auf die Gesetzmäßigkeit gerichtet, sondern darauf, dass Zahl in eine Funktion eingegeben werden und diese andere Zahlen wieder ausgibt. Wie dies geschieht ist Nebensache, was die Operations concept definition von der Formel concept definition abgrenzt. Diese concept definition steht der Prozess-Auffassung von Funktionen sehr nahe.

Bei den Untersuchungen werden zahlreiche Antworten aus allen Kategorien gegeben. Am häufigsten treten jedoch Antworten aus der ersten (Vinner, 1983) bzw. aus der ersten und fünften (Vinner & Dreyfus, 1989) Kategorie auf.
Für eine vollständige und detaillierte Darstellung der Ergebnisse sei auf die Originalartikel verwiesen.

Luisa Ruiz Higueras und José Luis Rodríguez bitten 323 16 bis 18 Jahre alte spanische Schüler in einem Fragebogen einem 15-jährigen erklären, was eine Funktion ist (Ruiz Higueras & Luis Rodríguez, 1996). Dabei analysieren sie die Antworten mit dem Ziel herauszufinden, ob es Präferenzen bezüglich der Definitionsart und der Darstellungswahl gibt. Ein Ergebnis der Untersuchung ist, dass eine große Mehrheit der Schüler Funktionen Operationen zwischen Nummern sind. (vgl. Kategorie drei und sechs von Vinner und

Dreyfus). Ein Drittel der Schüler benutzt auch graphische Elemente bei der Definition (Kategorie vier), aber nur wenige gebrauchen Worte wie „Korrespondenz“, „Assoziation“ oder „Anwendung“ obwohl diese zu der von den Schülern gelernten Definition gehören. Die Autoren stellen also eine Starke Bindung der concept definition an Darstellungen von Funktionen fest.

Um zu wissen, welche Definition von Funktionen angehende Lehrer haben, befragt Ruhama Even 152 Studenten aus den USA am Ende ihrer Studiums (Even, 1993). Bei der Analyse der Antworten wurde bewertet, ob in der gegebenen Definition eine Einschränkung der Willkürlichkeit vorhanden war. Es zeigt sich, dass über ein Drittel der angehenden Lehrer keine willkürlich definierten Funktionen zulassen (Kategorie 2). Wenn nach der Definition gefragt wird, die sie ihren Schülern geben würden, dann erhöht sich der Anteil der eingeschränkten Funktionsdefinitionen weiter.
Bei weiteren Analysen stellt sie fest, dass fast zwei Drittel derjenigen, die die Willkürlichkeit einschränken, auch Funktionen und Formeln eng verbinden (Kategorie 3).

Neben der direkten Fragen nach einer Angabe einer Funktionsdefinition kann zu Erlangung von Erkenntnissen zu den concept images von Schülern auch untersucht werden, ob Beispiele von Funktionen und Gegenbeispiele als solche erkannt werden.

Zvia Markovits et al. finden hierbei, dass graphisch gegebene Beispiele meistens richtig erkannt werden. Allerdings treten Probleme bei algebraischen gegebenen Funktionen auf, insbesondere dann, wenn es sich um stückweise definierte oder konstante Funktionen handelt (Markovits et al., 1986). Hier sind wohl concept definitions aus den Kategorien drei und fünf vorhanden, wobei eine konstante Funktion nicht als abhängig gesehen wird.

Elena Fimmel legt 66 Schülern einer Kölner Gesamtschule Beispiele und Gegenbeispiele von Funktionen vor (Fimmel, 2000). Sie stellt fest, dass nicht stetige Funktionen und Funktionen, die sich nicht durch eine Formel darstellen lassen, von vielen Schülern abgelehnt werden. Dies deutet auf concept definitions aus den Kategorien drei und vier hin, die jeweils noch durch das concept image eingeschränkt sind.

Es stellt sich bei dieser Methode zur Untersuchung der concept definition allerdings die Frage, ob zur Beantwortung der Frage die concept definition überhaupt genutzt wurde, oder nur geprüft wird, ob das gegebene Beispiel in das concept image passt. Das heißt, dass mit dieser Untersuchungsmethode nur schwer diejenigen Antworten erkannt werden können, bei deren Erstellung ausschließlich die concept definition zum Tragen kommt. Bei vielen Antworten werden zusätzlich noch Elemente des concept image einfließen, was aber nicht erkannt werden kann, da keine Erkenntnisse über den von dem Schüler oder Studenten angewandten Lösungsweg vorliegen.

Die sechs von Shlomo Vinner und Tommy Dreyfus definierten Kategorien zur Analyse der concept definitions von Schülern und Studenten sind bei der Erklärung von Antworten auf Fragebögen und Interviews von großer Nützlichkeit. Es ist allerdings immer zu beachten, dass oftmals das concept image bei der Beantwortung der Fragen eine entscheidende Rolle spielt.

Das in dieser Arbeit betrachtete funktionale Denken legt kein großes Gewicht auf die aktive Beherrschung der mathematisch korrekten Funktionsdefinition. Für den erfolgreichen Umgang mit funktionalen Situationen ist aber in vielen Fällen eine angebrachte concept definition von großer Bedeutung, damit zumindest erkannt wir, ob es sich tatsächlich um eine funktionale Situation handelt oder nicht (siehe Abschnitt 3.3.3).

Die Enge Verwebung von concept image und concept definition kann auch zu Problemen führen. Eines davon ist die durch widersprüchliche Inhalte ausgelöste compartmentalization. Untersuchungen hierzu werden im nächsten Abschnitt vorgestellt.

4.1.3 Compartmentalization

Vertritt ein Schüler zwei inkompatible Wissenselemente ohne sich dessen bewusst zu sein, so wird dies als *compartmentalization* bezeichnet. Dieses Phänomen tritt insbesondere im Zusammenhang mit der concept definition und dem concept image auf. Fragen nach Funktionsdefinition werden mit abgespeichertem Wissen beantwortet, das bei der Bearbeitung von Aufgaben zu Funktionen nicht zum Einsatz kommt. (vgl. Abschnitt 3.1.6)

Dieses inkonsistente Verhalten wird auch in Tests beobachtet.
So beantworten 66% der Schüler die den Fragebogen von Shlomo Vinner bearbeiten die Frage nach der Definition richtig und nutzen gleichzeitig andere Kriterien für die Beantwortung der Fragen zum concept image (Vinner, 1983, S. 304). Es ist auch hervorzuheben, dass kein Schüler mit inkorrekter concept definition alle Fragen zum concept image richtig beantworten konnte.
Zu einem analogen Ergebnis kommen Shlomo Vinner und Tommy Dreyfus bei ihrer Befragung von Studenten und Lehrern. Hier zeigen 56% der untersuchten Personen, die eine mathematisch richtige concept definition angeben, ein inkonsistentes Verhalten (Vinner & Dreyfus, 1989, S. 364).

Aber auch bei Untersuchungen, die sich nur mit dem concept image beschäftigen, kommt es zu widersprüchlichen Antwortmustern. Keiner der von David Tall und MdNor Bakar getesteten Schüler und nur 7% der von ihnen getesteten Studenten haben durch ihre Antworten eine kohärentes Funktionskonzept andeuten können (Tall & Bakar, 1991, S. 5; Tall & Bakar, 1992, S. 9).

Bei den späteren Analysen der Fragebögen und Interviews ist also ein inkonsistentes Antwortverhalten von einem Teil der Schüler zu erwarten. Es kann mit dem Phänomen der compartmentalization und den zugrunde liegenden concept images und concept definitions erklärt werden.
Im nächsten Abschnitt wird auf Studien eingegangen, die sich mit dem Definitions- und Wertebereich von Funktionen beschäftigen.

4.1.4 Der Umgang mit Definitions- und Wertebereich.

Zu einer vollständigen Definition von Funktionen gehört auch die Angabe des Definitions- und Wertebereichs. Dennoch werden sie bei den verwendeten Definitionen oft nur implizit mit genannt und spielen auch in Untersuchungen keine große Rolle. Sie werden dort meist nur kurz erwähnt, etwa mit der Feststellung, dass diese Begriffe zur Verwirrung der Schüler führen, da nur eine sehr vage Vorstellung von ihrer Bedeutung vorhanden ist (Sfard, 1989, S. 153).

Fluvia Furinghetti lässt 368 Schüler im Alter von 15 bis 19 Jahren einen Fragebogen zu Funktionen bearbeiten, in dem sich drei Fragen direkt auf den Definitions- und den Wertebereich von bestimmten Funktionen beziehen. Die Analyse der Schülerantworten bestätigen die Probleme der Schüler mit diesen Begriffen, was auf die Vielzahl unterschiedlicher Konzepte zurückgeführt wird, die für ein Verständnis von ihnen benötigt werden (Furinghetti & Somaglia, 1994, S. 251).

In einigen Artikeln wird auch darauf hingewiesen, dass Definitions- und Wertebereich beim Definieren von Funktionen von vielen Schülern und Studenten nicht beachtet werden. Keith Schwingendorf et al. stellen beispielsweise fest, dass nur vier der 56 von ihnen befragten Studenten überhaupt den Definitions- und Wertebereich erwähnen (Schwingendorf et al., 1992, S. 140). In der Studie von Luisa Ruiz Higueras und José Luis Rodríguez sprechen die Schüler weder in den gegebenen Definitionen, noch in den Beispielen diese Bereiche an (Ruiz Higueras & Luis Rodríguez, 1996, S. 246). Diese generelle Vernachlässigung bestätigen auch Ziva Markovits et al. (Markovits et al.1986, S. 24).

Da in der vorliegenden Arbeit funktionales Denken untersucht wird und die Fähigkeit eine Funktionsdefinition anzugeben in diesem Zusammenhang keine große Bedeutung hat, werden auch Definitions- und Wertebereich in den weiteren Kapiteln nur implizit betrachtet. Bei vielen Aufgaben werden Ursprung und Ziel einer Zuordnung bzw. zwei Bereiche in denen Variablen kovariieren angegeben. Eine genaue Bennennung und Analyse dieser Bereiche findet allerdings nicht statt.

Dennoch darf ihre Bedeutung nicht unterschätzt werden. Insbesondere bei der Arbeit mit diskreten Funktionen kann eine bewusste Betrachtung des Definitionsbereiches das Auftreten von Fehlern verhindern, die auf der Vorstellung eines kontinuierlichen Definitionsbereiches beruhen.

Bisher wurden bekannte Probleme mit concept image und concept definition zusammengefasst. In der Definition von funktionalem Denken wird auch die Bedeutung der Kenntnis und des Umgangs mit den Darstellungen von Funktionen in den verschiedenen Darstellungsregistern und der Übersetzungen zwischen ihnen hervorgehoben. Untersuchungen hierzu und die aus ihnen bekannten Schwierigkeiten werden im nächsten Abschnitt dargestellt.

4.2 Untersuchungen zu Darstellungen und Übersetzungen

Funktionen können in verschiedenen Darstellungsregistern repräsentiert werden. In dieser Arbeit werden das algebraische, das graphische, das tabellarische und das Register der Sprache betrachtet. Für eine Beherrschung der funktionalen Denkweise ist es wichtig, Darstellungen funktionaler Abhängigkeiten in allen Registern zu identifizieren zu können und in der Lage zu sein, mit Darstellungen innerhalb eines Registers zu arbeiten. Des Weiteren ist es, insbesondere für das Verständnis des Funktionsbegriffs, von großer Bedeutung

Übersetzungen zwischen Darstellungen in unterschiedlichen Registern durchführen zu können (Kapitel 1).

In diesem Abschnitt werden bekannte Probleme zusammengefasst, die im Zusammenhang mit Übersetzungen zwischen Darstellungen aus unterschiedlichen Darstellungsregistern identifiziert wurden.

4.2.1 Übersetzungen zwischen Darstellungen

Ein Übersetzungsprozess hat einen Ursprung und ein Ziel, also eine Richtung. Es ist allerdings nicht immer möglich zu sagen welche Übersetzung ein Schüler bei der Lösung einer Aufgabe durchgeführt hat. In einer Multiple Choice Aufgabe zu einer Übersetzung kann ein Schüler die Übersetzung durchführen und dann überprüfen, ob sein Ergebnis mit den vorgegebenen Antwortmöglichkeiten übereinstimmt. Andererseits kann er die Antwortmöglichkeiten betrachten, den Übersetzungsprozess in die andere Richtung durchführen und prüfen, ob das Ergebnis mit der in der Aufgabenstellung gegebenen Darstellung übereinstimmt.
Der Schüler wird also je nach Fähigkeit und Art der Ursprungs- und Zieldarstellung entscheiden welche Übersetzung er durchführen wird. Es ist also bei einer reinen Betrachtung der Antworten oft nicht möglich zu entscheiden, welche Übersetzung der Schüler gemacht hat. Aus diesem Grund werden Untersuchungen nur nach den beteiligten Registern aufgeteilt und nicht noch feiner nach Ursprungs- und Zieldarstellung untergliedert.

Übersetzung zwischen algebraischem und graphischem Register

Raymond Duval testet 165 französische Schüler im Alter von 15 bis 16 zur Übersetzungen zwischen Darstellungen von linearen Funktionen im algebraischen und graphischen Register (Duval, 1988b). Während zu den graphischen Darstellungen von $y=x$, $y=-x$ und $y=2$ die Mehrheit der Teilnehmer die richtige Gleichung finden, so sind es bei $y=x+2$ und $y=2x$ weit weniger als die Hälfte. Weniger als 20% der Schüler können alle fünf Graphen korrekt ihrer algebraischen Übersetzung zuordnen.
Als wichtigstes Ergebnis der Befragung wertet Duval jedoch, dass nur 60% der Schüler einen Unterschied in der Steigung der Geraden von $y=x$ und $y=-x$ erwarten. Für diesen Fehler macht er eine Punktweise Herangehensweise an die graphische Darstellung verantwortlich, während mit einer globalen Interpretation des Graphen dieser Fehler hätte vermieden werden können. Duval benutzt hier eine Unterscheidung, die zu derjenigen sehr ähnlich ist, die in Abschnitt 4.1.1 mit einer Punktweisen und einer Über-die-Zeit Sichtweise von Funktionen definiert wurde. Er schränkt diese Unterscheidung allerdings auf die Art der Arbeit mit graphischen Darstellungen ein.
Mit einer globalen Interpretation des Graphen hätte der Unterschied zwischen $y=x$ und $y=-x$ sofort erkannt werden müssen. Die Nutzung einer globalen Herangehensweise wird zusätzlich auch noch dadurch erschwert, dass bei einer Übersetzung von der algebraischen Darstellung zur graphischen Darstellung durch das Einzeichnen von Punkten eine Punktweise Sicht nahe gelegt wird. Erst die Verbindung der gezeichneten Punkte lässt den globalen Aspekt des Graphen erscheinen. Dieser Schritt geht aber über die einfache Anwendung von

Übersetzungsregeln hinaus und ist als ein Grund für die Schwierigkeiten der Schüler zu sehen (Duval, 1993, S. 45).

Selbst wenn von den Schülern eine durchgehende Linie zwischen den Punkten eingezeichnet wird, ist nicht unbedingt von einer globalen Sichtweise auszugehen. Daphne Kerslake zeigt in einer Untersuchung mit 1798 Schülern im Alter von 13 bis 15 Jahren, dass etwa die Hälfte der Schüler keinen oder nur einen Punkt auf dem Graph einer Geraden zwischen zwei Punkten Gitterpunkten des Koordinatensystems vermuten. Andererseits möchte etwas weniger als die Hälfte der Schüler diskret verteilte Punkte in einem Koordinatensystem verbinden, obwohl die dahinter stehende Realsituation keine Zwischenwerte zulässt. Die Linie wird also aus Konvention gezeichnet und überdeckt nur die Punktweise Sichtweise (Kerslake, 1986).

Zvia Markovits et al. lassen Schüler im Alter von 14 bis 15 Jahren zu einer im graphischen Register gegebenen Funktion eine Darstellung im algebraischen Register angeben und anders herum. Sie stellen fest, dass Schülern Übersetzungen von algebraischen zum graphischen Register leichter fallen als Übersetzungen in der umgekehrten Richtung, wenn es sich um ihnen bekannte Funktionen handelt. Sind die Funktionen den Schülern aber unbekannt, so fallen ihnen beide Übersetzungsrichtungen gleich schwer (Markovits et al., 1986, S. 22).

Mindy Kalchmann und Robbie Case zeigen, dass Schüler aus der 8. Klasse selbst bei einfachen Funktionen Probleme bei der Übersetzung vom algebraischen ins graphische Register haben können. In ihrer Studie scheitern fast alle der 45 getesteten Schüler beim Versuch $y=x^2+1$ zu zeichnen. Auch die Frage, ob $y=x-10$ eine fallende Funktion ist, fällt den meisten Schülern sehr schwer (Kalchman & Case, 1998, S. 26).

Ruhama Even fragt 152 Studenten wie viele reelle Lösungen $y=ax^2+bx+c$ hat. Diese Aufgabe ist im Grunde keine Übersetzungsaufgabe, aber mit der graphischen Darstellung einer Parabel kann sie sehr schnell beantwortet werden. Tatsächlich haben die 14% der Studenten, die diese Aufgabe richtig beantwortet haben, alle einen Wechsel des Darstellungsregisters vollzogen. Nur 20% der Studenten haben überhaupt einen Darstellungswechsel für die Lösung des Problems in betracht gezogen, obwohl quadratische Funktionen zu den bekanntesten Funktionstypen gehören (Even, 1998, S. 106). Dieses Beispiel zeigt, dass Übersetzungen als Problemlösestrategie von Schülern und Studenten verinnerlicht werden sollte, um auch in Aufgaben eingesetzt zu werden, in denen Übersetzungen nicht explizit verlangt werden. Diese Verinnerlichung ist aber offensichtlich oft noch nicht geschehen, wie man aus den schlechten Ergebnissen des Tests entnehmen kann.

Übersetzungen zwischen algebraischen und tabellarischen Register

Übersetzungen zwischen dem algebraischen und dem tabellarischen Register sind deutlich seltener untersucht worden als die zwischen dem algebraischen und dem graphischen Register.

In einer Studie zu Übersetzungen zwischen den Darstellungen von linearen Funktionen testen Julie Ryan und Julian Williams 178 australische Schüler im Alter von 13 bis 16 Jahren. Den Schülern werden Tabellen mit vier Wertepaaren zu Funktionen wie $y=2x+1$, $y=x$ und $y=5-x$

gegeben. Diese sollen die Verbindung zwischen den beiden Werten zuerst mit eigenen Worten beschreiben, dann mit einer Formel angeben und schließlich drei weitere Wertepaare vervollständigen. Alle Aufgaben werden von weniger als der Hälfte der Schüler gelöst, wobei erwartungsgemäß die Schwierigkeit der Aufgabe mit der Komplexität der zu findenden Geradengleichung zunimmt. Während die Gleichung $y=x$ noch von fast der Hälfte der Schüler gefunden wird, sind es bei $y=2x+1$ noch 20% und bei $y=5-x$ nur noch 2%.
Die Fehleranalyse zeigt, dass viele Schüler nach Regelmäßigkeiten und Mustern in der gegebenen Tabelle suchen, ohne auf eine Verbindung zwischen den zwei Variablen zu achten. Durch das Wählen von geeigneten Beispiel-Wertepaaren, so dass in der Tabelle markante Muster entstehen, kann Lösungshäufigkeit stark nach unten gedrückt werden. Viele Schüler folgen dann beim Bestimmen der fehlenden Werte dem Muster der Tabelle, ohne jegliche Betrachtung der funktionalen Situation.
Als weiteres bemerkenswertes Ergebnis dieser Studie kann gewertet werden, dass zwischen 4% und 22% der Schüler die Funktion weder verbal noch durch eine Formel beschreiben können, die Tabelle aber dennoch richtig vervollständigen (Ryan & Williams, 1998).

Weitere Übersetzungen

Der Übergang vom tabellarischen zum graphischen Register wird oft als Zwischenschritt bei der Übersetzung von algebraischen zum graphischen Register gesehen (siehe etwa die Untersuchungen von Duval oben). Probleme, die daraus entstehen, dass Schüler Punkte nicht in ein Koordinatensystem eintragen können werden hier nicht im Zusammenhang mit funktionalem Denken gesehen.

Zu Untersuchungen der Schwierigkeiten mit Übersetzungen, die das Register der Sprache beinhalten, sei auf andere Arbeiten verwiesen. Forschung in diesem Gebiet fällt in den Bereich der Modellierung, was ein sehr weites Feld ist und hier aus Platzgründen nicht näher behandelt werden kann.

Fehler in diesem Bereich haben aber ihre Ursachen nicht nur im Vorgang der Modellierung an sich, sondern auch, wie bei den anderen Übersetzungsvorgängen, in Kongruenzproblemen zwischen den betrachteten Registern. Ein bekanntes Beispiel hierzu ist die Aufgabe, eine Funktion zu finden, die folgende Situation modelliert: Es gibt sechs Mal mehr Studenten an dieser Universität als Professoren. Üblicherweise finden mehr al 50% der Schüler und Studenten nicht die richtige Funktion. Die breite Mehrheit von denen keine korrekte Lösung finden nennen die Gleichung 6S=P (S Anzahl der Studenten, P Anzahl der Professoren). Dieser Fehler kann mit einer Übersetzungsstrategie erklärt werden, die sich an der Syntax des Ursprungsregisters orientiert (Sims-Knight & Kaput, 1983).

In diesem Abschnitt wurden einige bekannte Schwierigkeiten von Schülern und Studenten zusammengefasst, die bei Übersetzungsvorgängen zwischen Darstellungen von Funktionen in verschiedenen Darstellungsregistern auftauchen. Die Art und der Grad der Schwierigkeiten hängen von den beteiligten Registern und natürlich vom betrachteten Funktionstyp ab. Hier wurden nur solche Studien erwähnt, die sich mit Funktionstypen beschäftigen, die in den Klassenstufen fünf bis zehn in Deutschland und Frankreich zum Lehrplan gehören.

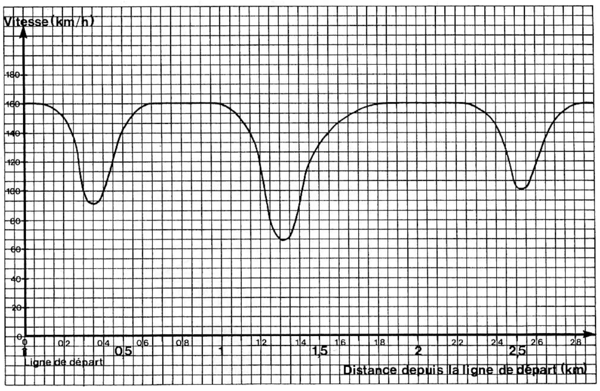
Ein spezifisches Problem mit dem graphischen Register, das bei Übersetzungen vom graphischen ins das Register der Sprache zu Fehlern führt, wird im folgenden Abschnitt beschrieben.

4.2.2 Das graphische Register und die ikonische Sichtweise

Bei der Übersetzung vom graphischen Register in das Register der Sprache wird die ikonische Sichtweise von Kurven (Originalbezeichnung: *iconic view*) von mehreren Autoren als Fehlerquelle identifiziert. Da es sich im Grunde um eine falsche Sichtweise von Graphen handelt, aber nicht um einen Übersetzungsfehler im engeren Sinn, wird diese bekannte Schwierigkeit in diesem, von den Übersetzungsschwierigkeiten getrennten Abschnitt, dargestellt.

Bei der Nutzung von Darstellungen aus dem graphischen Register können Erfahrungen aus dem Alltag sehr nützlich sein (Abschnitt 3.2.2.2). Die Übertragung der Erfahrungen kann aber auch zu Fehlinterpretationen führen, zum Beispiel wenn die Form des Graphen mit visuellen Aspekten der Realsituation identifiziert wird. Man spricht hier von *ikonischer Sichtweise* oder *ikonischer Übersetzung* des Graphen (Monk, 1992, S. 176).

Hierzu gibt es eine Fülle von Beispielen. Eines der bekanntesten ist sicherlich das Beispiel von Claude Janvier, der Schülern einen Graphen zeigt, auf dem die Geschwindigkeit eines Rennautos in Abhängigkeit von der zurückgelegten Strecke eingezeichnet ist (Abbildung 12). Die Frage nach der Anzahl der Kurven der Rennstrecke wird von vielen Schülern mit „neun“ beantwortet, da sie Kurven des Graphen zählen. Anschließend wird den Schülern eine Skizze von sieben möglichen Rennstrecken gegeben, aus denen sie diejenige auswählen sollen, die zu der gegebenen Geschwindigkeitskurve passt (Abbildung 12). Auch bei dieser Aufgabe drängt sich der visuelle Aspekt in den Vordergrund und führt zur häufigen Wahl der Graphen G, da er eine große Ähnlichkeit zum Geschwindigkeitsgraphen aufweist. (Abbildungen aus Janvier, 1983b, S. 26, 27)



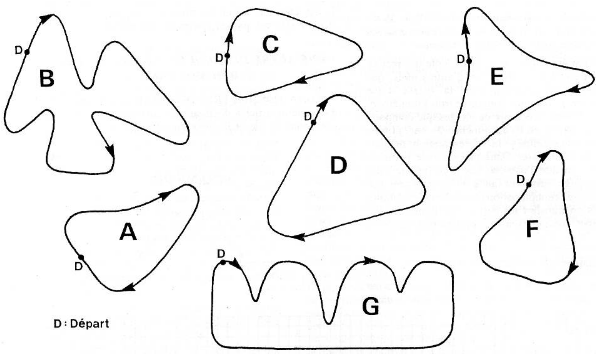


Abbildung 12:

Geschwindigkeit eines Rennautos an jeder Stelle der Renstrecke (2. Runde)

Auswahl an Rennstrecken

Weitere oft genannte Beispiele für eine ikonische Übersetzung sind:
Die Geschwindigkeit eines Radfahrers bei der Fahrt über einen Hügel wird durch einen Graphen beschrieben, der wie das gegebene Bild des Hügels aussieht (Dugdale, 1993, S. 109)

Der Geschwindigkeitsgraph von zwei Autos (Abbildung 13) wird bei der Frage nach der relativen Positionsveränderung der Autos zueinander von Studenten mehrheitlich als Annäherung der Autos gedeutet (Abbildung aus Monk, 1988, S. 3).

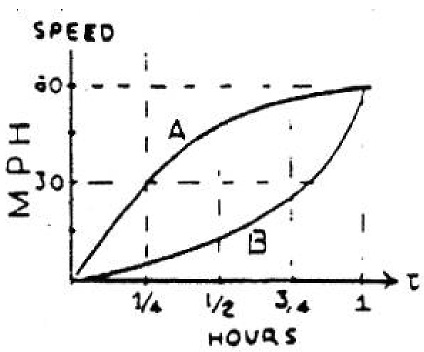


Abbildung 13: Geschwindigkeit zweier Autos

Reisegraphen, die die Entfernung zum Ausgangsort in Abhängigkeit von der Zeit darstellen werden entweder als Richtungsangaben (Rechts- und Linkskurven, gerade Strecken etc.) oder als Höhenangaben (Aufstieg und Abstieg auf einen Berg) gedeutet. In der Studie von Daphne Kerslake mit 1798 Schülern im Alter von 13 bis 15 Jahren begründen, abhängig vom Aspekt der Graphen und dem Alter der Schüler, zwischen sieben und 16 Prozent der Schüler ihre Antworten mit Argumenten, die auf eine ikonischen Sichtweise aufbauen (Kerslake, 1986, S. 128).

Ein weiteres von Kerslake genanntes Beispiel ist der Graph, der die Entfernung vom Boden eines vertikal nach oben geworfenen Steines in Abhängigkeit von der Zeit darstellt (Abbildung 14). Dieser wird leicht als die Flugbahn eines zwischen zwei Personen geworfenen Gegenstandes gedeutet.

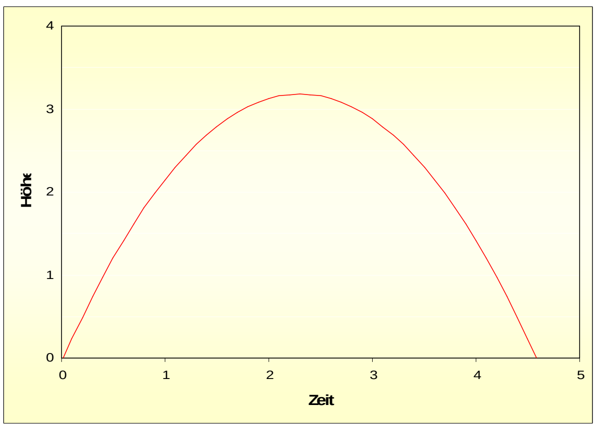


Abbildung 14: Flughöhe eines senkrecht geworfenen Steines

Zur ikonischen Sichtweise ist abschließen anzumerken, dass Steve Monk mit Hilfe von drei von ihm geführten Interviews einen Zusammenhang zwischen einer Punktweisen Sichtweise und der Vermeidung von ikonischen Übersetzungen herstellt (Monk, 1992, S. 191). Dies bestätigt die Forderung nach der Ausprägung der Über-die-Zeit Sichtweise und der Punktweisen Sichtweise.

4.2.3 Weitere Studien zu Darstellungen

Eine alternative Herangehensweise an das Thema Registerwechsel wählen Brian Keller und Christian Hirsch. Sie legen 79 Studenten Aufgaben mit und ohne Realkontext vor und fragen in welchem Register sie diese lösen würden (Eine tatsächliche Lösung wird nicht verlangt). Ziel der Studie ist es herauszufinden inwiefern die Wahl des Register vom Schüler und der jeweiligen Aufgabe abhängt.
Das Ergebnis der Studie ist, dass manche Studenten eine starke Präferenz für eine Darstellung haben und dass die Annahme der Unabhängigkeit der Wahl des Registers von der gestellten Aufgabe verworfen werden muss. Die meisten Studenten haben bei Aufgaben ohne Realkontext eine starke Präferenz für das algebraische Register. Haben die gestellten Aufgaben einen Realitätsbezug, so werden das tabellarische und das graphische Register bevorzugt. Dabei tritt die Präferenz des tabellarischen Registers bei einfacheren Aufgaben auf, während die des graphischen Registers eher bei anspruchsvolleren Aufgaben ausgeprägt ist (Keller & Hirsch, 1998).

Eine andere Fragestellung versucht auch Hans-Georg Weigand zu beantworten. Er lässt 53 Schüler wenige Tage nach deren ersten Kontakt mit dem Funktionsbegriff einen Test bearbeiten, um zu klären welches Register bei welchem Aufgabentyp zuverlässiger zum Erfolg führt. Dazu wurden Parallelaufgaben im graphischen und im tabellarischen Register gestellt und Lösungshäufigkeiten verglichen. Die graphische Darstellung erleichtert das Erkennen von Symmetrie, während die tabellarische Darstellung signifikant bessere Ergebnisse beim Identifizieren von Periodizität und exponentiellem Verhalten ermöglicht (Weigand, 1988).

Schüler und Studenten bevorzugen also abhängig von der Aufgabenstellung Darstellungen aus bestimmten Registern und manche Darstellungen führen bei bestimmten Aufgabentypen zuverlässiger zum Erfolg als andere. Diese Ergebnisse bestärken noch einmal die Wahl der Definition von funktionalem Denken, in welcher der Beherrschung der Darstellungsformen in unterschiedlichen Registern großes Gewicht verliehen wird.

4.3 Weitere Studien zu Funktionen

Studien zu epistemologischen Hürden, zu Funktionen in der Grundschule und auch zusammenfassende Übersichtsartikel werden in diesem Abschnitt vorgestellt.

Von einigen Forschern wird versucht epistemologische Hürden beim Erlernen des Funktionsbegriffes zu identifizieren (siehe Abschnitt 3.1.7 zur Erklärung von epistemologischen Hürden). Sind diese Hürden einmal erfasst, so können sie als Ursache für auftretende Fehler erkannt werden und es können Strategien erarbeitet werden, um die Überschreitung der Hürde für Schüler und Studenten möglichst einfach zu gestalten.

Anna Sierpinska identifiziert 16 epistemologische Hürden, von denen hier nur diejenigen genannt werden sollen, die für eine funktionale Denkweise am bedeutendsten sind:

> Computational techniques used in producing tables of numerical relationships are not worthy of being an object of study in mathematics. (Sierpinska, 1992, S. 32)

Schüler und Studenten können die Betrachtung funktionaler Zusammenhänge als rein technische Arbeit sehen. Dies ist insbesondere dann der Fall, wenn sie weder Variation und Zuordnung in funktionalen Zusammenhängen erkennen. In diesem Fall werden sie Funktionen nicht als mathematische Untersuchungsobjekte akzeptieren. Deswegen soll vor der ersten Arbeit mit funktionalen Zusammenhängen das Interesse für Zuordnung und Kovariation geweckt werden, um den Eindruck einer technischen Arbeit zu vermeiden.

> Laws in physics and functions in mathematics have nothing in common; they belong to different domains (compartments) of thought. (Sierpinska, 1992, S. 42)

Erst die Überwindung dieser Hürde erlaubt Schülern eine Modellierung von Realsituationen durch Funktionen und somit das Erfassen der Nützlichkeit des Funktionskonzeptes.

> Proportion is a privileged kind of relationship. (Sierpinska, 1992, S. 43)

In der historischen Entwicklung und auch in der Auffassung vieler Schüler sind lineare Funktionen das dominierende Beispiel funktionaler Zusammenhänge. Diese epistemologische Hürde führt zu dem in Abschnitt 4.1.1 genannten Problem, dass nur noch lineare oder ähnlich einfache Funktionstypen als Funktionen akzeptiert werden.

> Only relationships describable by analytic formulae are worthy of being given the name of function. (Sierpinska, 1992, S. 46)

Der Einfluss dieser epistemologischen Hürde kann sowohl in der historischen Entwicklung, als auch in problematischen concept images besonders deutlich gesehen werden. Ähnliche epistemologische Hürden lassen sich auch für Darstellungen aus anderen Darstellungsregistern finden.

> The changes of variables are changes in time. (Sierpinska, 1992 S. 55)

Bei der Betrachtung von funktionalen Situationen wird eine Vielzahl von Aufgaben gesehen, in denen eine der Variablen direkt oder indirekt von der Zeit abhängt. Ein Beispiel für einen funktionalen Zusammenhang, der nur indirekt von der Zeit abhängt, ist die Zuordnung der Ausdehnung eines Metallgegenstandes zu seiner Temperatur. Die Temperaturvariation kann dabei als zeitabhängig aufgefasst werden. Diese Art von Funktionen wird von Claude Janvier als *chronicle* bezeichnet (Janvier, 1998, S. 83).
Anwendungsbeispiele für funktionale Zusammenhänge, die keine chronicles sind, sind deutlich seltener, was das Überschreiten dieser epistemologischen Hürde erschwert und zu möglichen Fehler führt. Ein Beispiel für eine Funktion, die keine Rückschlüsse auf eine zeitliche Entwicklung zulässt, ist in Abbildung 15 gegeben. Dennoch werden einige Schüler dazu geneigt sein eine zeitliche Interpretation des Graphen zu suchen, da Variation mit

zeitlicher Variation gleichgesetzt wird (Janvier, 1998, S. 83). (Abbildung aus Janvier, 1983b, S. 27)

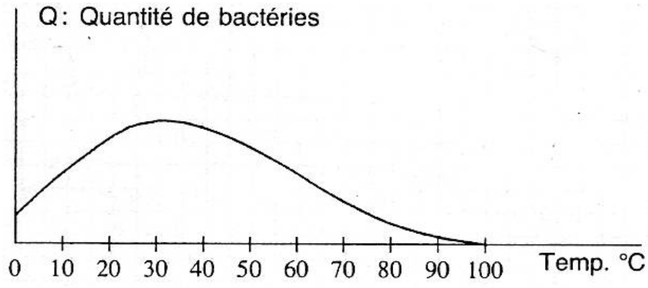


Abbildung 15: Anzahl der Bakterien, die sich in 24h entwickeln, in Abhängigkeit von der Temperatur

In einer Untersuchung von Claude Janvier sollen 226 Studenten die Flugdauer für eine bestimmte Strecke in Abhängigkeit von der Geschwindigkeit des Flugzeugs graphisch darstellen. 16% der Studenten versuchen daraus eine Aufgabe zu machen, bei der eine Variable mit der Zeit variiert, indem sie die Geschwindigkeit des Flugzeuges in Abhängigkeit von der Flugzeit skizzieren (Janvier, 1998, S. 87)

Es existieren auch Studien über die frühe Entwicklung des Funktionsverständnisses in der Grundschule. Ein Beispiel hierfür ist die Untersuchung von Graciela Ricco, die verschiedene Tests zu proportionalen Funktionen 125 Schülern im Alter von sieben bis elf Jahren in Einzelinterviews bearbeiten lässt. Sie stellt fest, dass manche Eigenschaften wie die monotone Steigung oder die Eindeutigkeit schon früh erkannt werden, aber die Existenz eines Proportionalitätsfaktors oder einer konstanten Änderung erst im Alter von acht Jahren im CE2 regelmäßig erkannt werden. Dennoch bleiben Schwierigkeiten, wie das Erkennen, dass der Wert um den sich die Zuordnung bei der Erhöhung des x-Wertes um 1 verändert, auch der Wert der Zuordnung bei $x=1$ ist. Ebenso fällt es den Schülern schwer Erhöhungen des x-Wertes um mehr als 1 zu verarbeiten (Ricco, 1982).
Von einer funktionalen Denkweise mit dem Erfassen von Variationsverhalten kann in diesem Alter also noch nicht die Rede sein. Die Wahl der in dieser Arbeit betrachteten Altersgruppe von zehn bis 16 Jahren ist also zumindest was die untere Grenze angeht nicht zu eng gefasst.

In dieser Arbeit soll die Entwicklung des funktionalen Denkens untersucht werden. Für die empirische Analyse von Entwicklungen stellen Längsschnittstudien ein geeignetes Instrument dar, da mit ihnen Entwicklungsverläufe exakt verfolgt werden können. Für den Bereich des funktionalem Denkens lassen sich allerdings keine solchen Studien finden. Allenfalls gibt es längsschnittlich interpretierte Querschnittstudien, die mehrere Altersgruppen gleichzeitig betrachten und dadurch Rückschlüsse auf die Entwicklung ziehen (z.B. Kerslake, 1986).

Weitere Untersuchungen beschäftigen sich beispielsweise mit dem Bild, das Lehrer von Funktionen haben (z.B. Norman, 1992) und dem, was Lehrer zu Funktionen wissen sollten (z.B. Even, 1990). Eine Ausführung hiervon würde sich jedoch den Rahmen der Arbeit sprengen.

Ebenso wird zu Untersuchungen zu Funktionen, die auf mengentheoretischen Funktionsdefinitionen aufbauen, z.B. auf H. Laverne Thomas verwiesen (1975), da diese Definition in der funktionalen Denkweise keine große Rolle spielt (vgl. Abschnitt 3.3.2).

Ausführlichere Übersichten über Untersuchungen zum Funktionsverständnis und zur Arbeit mit Funktionen finden sich in Leinhardt et al. (1990) und Müller-Philipp (1992).

4.4 Zusammenfassung der Schwierigkeiten

In diesem Kapitel wurden bekannte Schwierigkeiten dargestellt, die bei der Arbeit mit Funktionen auftauchen. Dabei wurden zwei aktuelle Untersuchungen nicht erwähnt, da sie in den Kapiteln 8 und 9 ausführlich besprochen werden. Die Daten der Subskala *Veränderung und Beziehung* von PISA 2003 werden beim Vergleich der Schülerleistungen von Deutschland und Frankreich im Bereich funktionalen Denkens im Detail analysiert werden. Für eine Darstellung der Entwicklung funktionalen Denkens wird auf die Daten der Längsschnittstudie PALMA und deren Subskala zu funktionalem Denken zurückgegriffen, wobei auch eine begleitende deutsch-französische Interviewstudie hierzu ausgewertet wird.

Die in diesem Kapitel dargestellten Schülerschwierigkeiten sind in der folgenden Liste noch einmal stark verkürzt zusammengefasst:

- Problematische Teile des concept images:
  - Funktion sollen durch eine einzige Regel gegeben werden
  - Der Graph einer Funktion muss „vernünftig“ (z.B. ohne Knicke und Sprünge, …) sein
  - Lineare Funktionen werden bevorzugt
  - Für jedes *y* aus dem Wertebereich gibt es genau ein *x* aus dem Definitionsbereich
  - Eigenschaften, die nichts mit Funktionen zu tun haben, werden mit dem Konzept assoziiert (z.B. Mathematiker akzeptieren eine bestimmte Zuordnung als Funktion)
  - Prefunktions- und Aktionsauffassung von Funktionen überwiegen
  - Die Punktweise Sichtweise ist stärker ausgeprägt als die Über-die-Zeit Sichtweise
- Problematische concept definitions:
  - Funktionen als eine Regel
  - Funktionen als eine Formel
  - Funktionen als Graphen
  - Funktionen als Abhängigkeitsrelation
- Definitions- und Wertebereich werden oft nicht beachtet oder bereiten Schwierigkeiten
- Übersetzungen zwischen den Darstellungen der Funktionen stellen für viele Schüler eine große Hürde dar
- Graphen werden ikonisch gelesen
- Zeitabhängige Funktionen bilden eine epistemologische Hürde

Bei einigen der dargestellten Untersuchungen sind die untersuchten Personen deutlich älter als die in dieser Arbeit betrachtete Altersgruppe. Dennoch geben die aufgedeckten

Schwierigkeiten nützliche Hinweise und schärfen den Blick, um ähnliche Probleme bei den später folgenden Analysen besser identifizieren zu können. Außerdem kann mit diesem Wissen bei der genauen Betrachtung der Lehrpläne und Schulbücher untersucht werden, ob Hinweise für die Gründe der Entwicklung von den später auftretenden Problemen gefunden werden können.

Natürlich können hier nicht alle Probleme genannt werden, die bei der Arbeit mit funktionalen Situationen auftreten. Es werden insbesondere die Probleme nicht explizit angesprochen, die in anderen, möglicherweise auch eng assoziierten mathematischen Gebieten fußen. Dazu gehören etwa die Schwierigkeiten, die Schüler mit den Konzepten von Variable und Parameter haben. Eine Einbeziehung dieser Grundlagen für eine funktionale Denkweise in die Analysen dieser Arbeit würde über deren Rahmen hinausführen, so dass für die Beantwortung diesbezüglicher Fragen auf die Arbeiten anderer Autoren verwiesen wird.

Viele Autoren stellen in ihren Artikeln Vorschläge vor, wie Schwierigkeiten und Probleme, die sie identifiziert haben, vermieden werden können. Eine Übersicht über diese Verbesserungsvorschläge wird im nächsten Abschnitt gegeben.

4.5 Verbesserungsvorschläge

In Kapitel 4 wurden bisher Untersuchungen zu Funktionen vorgestellt. Die Autoren der hier zitierten Artikel identifizieren eine Vielzahl von Schwierigkeiten, Misskonzepten und Hürden, die den Schülern und Studenten die Arbeit mit Funktionen und damit die Ausbildung einer funktionalen Denkweise erschweren. Einige der Autoren entwickeln nach der Feststellung der Schwierigkeiten Vorschläge, wie diese behoben oder umgangen werden können. Andere Veröffentlichungen bauen auf den bereits bekannten Schwierigkeiten auf und erproben alternative Herangehensweisen, die diese Schwierigkeiten vermeiden sollen.

In diesem Abschnitt werden diese Verbesserungsvorschläge zusammengefasst. Sie werden in drei Gruppen eingeteilt: die Vorschläge, die sich auf eine Einbindung der Realität beziehen, diejenigen, die eine Betonung bestimmter Aspekte im gesamten Unterricht fordern und denjenigen, die den Einsatz von Computern beinhalten. Der letzte Punkt kann hier allerdings nur stark verkürzt dargestellt werden, da sich dieses Forschungsgebiet mit den ständigen technologischen Fortschritten schnell verändert und sich zu einem eigenen Forschungszweig entwickelt hat.

4.5.1 Realitätsnaher Unterricht

Eine Forderung, die von vielen Autoren aufgestellt wird, ist dass im Unterricht mehr funktionale Situationen behandelt werden sollten, die sich direkt auf die Realität beziehen.

Funktionen sollen am Anfang des Funktionsstudiums vor allem als Hilfsmittel auftreten, das eine Modellierung von Realsituationen ermöglicht. Mit ihrer Hilfe kann eine große Menge an funktionalen Zusammenhängen, die im Alltag der Schüler vorkommen und bei denen Veränderung eine Rolle spielt, dargestellt werden. Dabei soll insbesondere beobachtet werden, was sich verändert und wie es sich verändert. (Sierpinska, 1992, S. 57; Vollrath, 1989, S. 38; Janvier, 1983a). Hier steht die Kovariations-Grundvorstellung im Vordergrund, die von den Schülern beim Umgang mit Realsituationen verinnerlicht werden soll.

Möglichkeiten für die Betrachtung von funktionalen Zuordnungen in Realsituationen bieten sich dabei nicht nur im gesamten Mathematikunterricht, sondern etwa auch im Physikunterricht (Nguyen, 1982). Manche Autoren schlagen außerdem konkrete Situationen, beispielsweise zu proportionalen Situationen, vor (Vollrath, 1978) oder erarbeiten eine ganze Aufgabensammlung mit funktionalen Situationen (Schmidt, 1990)

Im Rahmen der Arbeit mit Realsituationen wird Darstellungen im graphischen Register eine besondere Bedeutung beigemessen, da viele Informationen im Alltag graphisch gegeben werden (Thorpe, 1989, S. 18). Außerdem verhindert die Arbeit mit der graphischen Darstellung eine zu starke Formalisierung und fördert Darstellungswechsel. Daher eignet sie sich gut für den Anfangsunterricht über Funktionen (Stellmacher, 1986). Sie verstärkt auch die Über-die-Zeit Sichtweise von Funktionen und vermeidet dadurch eine Fixierung auf Punktweise Zusammenhänge (Monk, 1988, S. 9).

4.5.2 Veränderte Akzentsetzung im Unterricht

Neben der Nutzung realitätsnaher Situationen im Funktionsunterricht werden weitere Verbesserungen bestimmter Aspekte des Funktionsunterrichts angeregt.

Funktionale Zusammenhänge sollen in allen Darstellungsregistern betrachtet und alle verschiedenen Übersetzungsvorgänge im Unterricht behandelt werden, da dies für ein Verständnis des Funktionskonzeptes von großer Wichtigkeit ist (Abschnitt 3.2.3; Gagatsis & Shiakalli, 2004, S. 655; Sierpinska, 1992, S. 57).

Bei der Auswahl der Funktionstypen soll darauf geachtet werden, dass die Zeit, die mit dem Studium linearer Funktionen verbracht wird, beschränkt bleibt und, dass parallel nichtlineare funktionale Zusammenhänge betrachtet werden. Dadurch soll eine lineare Fixierung vermieden werden (Markovits et al., 1989, S. 54).

Durch die Wahl der betrachteten Funktionstypen kann auch Einfluss auf die Ausbildung der Kovariations- und der Zuordnungs-Grundvorstellung genommen werden. Bei der Arbeit mit verschiedenen Arten von Funktionstypen (z.B.: lineare, quadratische, exponentielle, etc.) können diese beispielsweise bewusst auf ihre spezifischen Eigenschaften (z.B. Wachstumseigenschaft) hin untersucht werden, wobei auch Anwendungen in Realsituationen und Darstellungswechsel eine entscheidende Rolle sollen (Confrey & Smith, 1991).

Betrachtet man den Funktionsunterricht unter dem Blickwinkel der operationalen bzw. strukturellen Herangehensweise, so wird wegen der in Abschnitt 4.1.1 genannten Schwierigkeiten der Schüler eine stärkere operationale Ausrichtung des Unterrichts gefordert. Diese erweist sich als effektiver und eine späte Einführung von strukturellen Betrachtungen fördert die Reifizierung (Sfard, 1987, S. 168; Sfard, 1989).
In diesem Zusammenhang ist die Forderung nach einem eigenschaftsorientierten Funktionsstudium zu nennen, das auch den Weg zur Reifizierung vereinfachen soll. Diese Art von Arbeit weist eine große Ähnlichkeit zu den oben genannten Vorschlägen von Confrey und Smith auf (Abschnitt 3.1.5.3; Slavit, 1997).

Im Gegensatz zu den hier genannten Arbeiten, die eine unterschiedliche Akzentsetzung innerhalb des bestehenden Mathematikunterrichts fordern, schlagen andere Autoren dessen grundsätzliche Neuorientierung vor. Ein Beispiel hierfür ist der Versuch den gesamten gymnasialen Mathematikunterricht in Anlehnung an die Meraner Reform (siehe Kapitel 2) mit dem Funktionsbegriff als Fundament aufzubauen (Kaune, 1995).

4.5.3 Benutzung von Computern

Im Zuge der fortschreitenden technologischen Entwicklung wird versucht dem Computer eine ständig wachsende Rolle im Mathematikunterricht übernehmen zu lassen. Eine Fülle von Programmen wurde in den letzten Jahrzehnten für den Schuleinsatz entwickelt und graphikfähige Taschenrechner ermöglichen heute einen breiten Einsatz der neuen Technologien im Schulalltag. Viele Forscher befassen sich damit, wie man die sich dadurch ergebenden neuen Möglichkeiten am besten nutzen kann. Eine Bewertung und ein Vergleich der entwickelten Programme würde den Rahmen dieser Arbeit allerdings sprengen, weswegen auf die Untersuchung von Computereinsatz in der Entwicklung funktionalen Denkens verzichtet wird. Dennoch wird darauf hingewiesen, dass diese Entwicklung mit Sicherheit durch die angemessene Verwendung von Computerprogrammen unterstützt werden kann. Einige Vorschläge hierzu werden jetzt kurz. Ziel einer tragfähigen funktionalen Denkweise ist eine Rechnerunabhängige und in Alltagssituationen präsente Denkweise.

Computerprogramme ermöglichen ein dynamisches Arbeiten mit den verschiedenen Darstellungen von Funktionen. Änderungen von Symbolschema und Referenzfeld können gleichzeitig beobachtet werden, was das Erkennen von Zusammenhängen erleichtert (Abschnitt 3.1.2.2; Kaput, 1989, S. 174). Die Möglichkeit, Änderungen direkt in der graphischen Darstellung von Funktionen durchzuführen, wird als eine der wichtigsten Neuerungen gegenüber der herkömmlicher Arbeit mit Funktionsdarstellungen gesehen (Kaput, 1993)

Verschiede Vergleichsuntersuchungen mit Schülern zeigen, dass mit Hilfe von Computerprogrammen und dazu passenden Unterrichtskonzepten bessere Ergebnisse in einer Vielzahl von Bereichen (Erkennen von Funktionen, Prozessauffassung, Übersetzungen, Beschränkung auf stetige Funktionen, etc.) erzielt werden können. (Bloch, 2003; Breidenbach et al., 1992; Schwingendorf et al., 1992; Sfard, 1992; Tall, 1996)

Von manchen Autoren werden allerdings auch Probleme angesprochen, die der Einsatz von Computern im Unterricht mit sich bringen kann. So bleibt die Frage zu beantworten, wie das Erlernen von Computerprogrammen in den schon vollen Lehrplan aufgenommen werden kann und ob dadurch nicht neue Hürden für Schüler geschaffen werden (Selden & Selden, 1992). Des Weiteren bestehen Zweifel am Nutzen von Programmen und Taschenrechnern, die ausschließlich Graphen skizzieren (Dugdale, 1993).

Viele der in Abschnitt 4.5 genannten Verbesserungsvorschläge sind in der Forderung nach der Ausbildung einer funktionalen Denkweise schon enthalten. Das betrifft insbesondere die Forderung nach einer stärkeren Anbindung an Realsituationen, das Nutzen von

Funktionsdarstellungen aus allen Darstellungsregistern und die Untersuchung der Variationseigenschaften.

Mit Hilfe der in den bisherigen Kapiteln erarbeiteten theoretischen Grundlagen und den genannten Untersuchungen können die Forschungsfragen, die in dieser Arbeit beantwortet werden sollen, nun präziser formuliert werden.

5 Forschungsfragen und Methodologie

In der Einleitung wurden die Forschungsfragen, die mit dieser Arbeit beantwortet werden sollen, bereits umrissen und der Rahmen der Arbeit abgesteckt. Mit den theoretischen Arbeiten aus Kapitel 3 und unter Einbeziehung der bekannten Schwierigkeiten (Kapitel 4) können diese Fragen nun präziser gestellt werden. Wie versucht wird, diese Fragen im weiteren Verlauf dieser Arbeit zu beantworten, wird im Abschnitt 5.2 dargestellt.

5.1 Forschungsfragen

In Deutschland haben die in der PISA-Studie festgestellten Defizite deutscher Schüler und ihr im internationalen Vergleich unterdurchschnittliches Abschneiden großes Aufsehen erweckt (Für Einzelheiten zur PISA-Studie siehe Kapitel 8). Neben dem Feststellen von spezifischen Stärken und Schwächen können internationale Vergleichsuntersuchungen auch bei der Suche nach Verbesserungsmöglichkeiten für den Unterricht wertvolle Denkanstöße bieten. Aus diesem Grund wird in dieser Arbeit die Entwicklung funktionalen Denkens in Deutschland und Frankreich untersucht.
Stellvertretend für Deutschland wird das Bildungssystem des Bundeslandes Bayern betrachtet (siehe Kapitel 6). Die Wahl von Frankreich als Vergleichsland der vorliegenden Untersuchung wurde aus mehreren Gründen getroffen:

- Frankreich ist als großes Nachbarland aus der europäischen Union mit Deutschland in den wesentlichen Zügen vergleichbar (Für Details siehe Kapitel 6).
- Die Bildungssysteme und die Inhalte der Lehrpläne sind in den beiden Ländern so unterschiedlich, dass neue Ideen beim Vergleich erwartet werden können (Für Details siehe Kapitel 6).
- Die Schüler von Frankreich haben in der PISA-Studie von 2003 signifikant bessere Ergebnisse in der Subskala *Veränderung und Beziehung* gezeigt, so dass auch hier Impulse zu erwarten sind (Für Details siehe Kapitel 8).

Da die wesentlichen Schritte der Entwicklung der funktionalen Denkweise in der Sekundarstufe I stattfinden, wird diese in der vorliegenden Arbeit untersucht. Die Sekundarstufe I entspricht den deutschen Klassenstufen 5 bis einschließlich 10 und den französischen Klassenstufen CM2 bis 2^{de}.
In Kapitel 4 wurde eine Untersuchung genannt, die zeigt, dass Schüler in der Grundschule nur in sehr begrenztem Maße eine funktionale Denkweise entwickeln. Nach der 10. Klasse haben Schüler, die in Deutschland die Haupt- bzw. Realschule besuchen, ihre Schullaufbahn beendet und Gymnasialschüler beginnen mit anspruchsvolleren Funktionstypen umzugehen. Letzteres ist auch für französische Schüler nach der 2^{de} der Fall. Diese Eckpunkte für die Entwicklung der funktionalen Denkweise verdeutlichen die Gründe für die Wahl der untersuchten Klassenstufen.

Damit ist das Forschungsgebiet mit der Entwicklung der funktionalen Denkweise in der Sekundarstufe I in Deutschland und Frankreich klar abgegrenzt.

Die sich stellenden Forschungsfragen lassen sich in zwei Gruppen unterteilen. Erstens Fragen, die sich auf die Lehrpläne und Schulbücher beziehen, also auf das, was die Schüler im Laufe der Sekundarstufe I im Bereich funktionalem Denken lernen sollen. Die zweite Fragengruppe bezieht sich auf die Leistungen der Schüler in beiden Ländern, also auf ihre Fähigkeit die funktionale Denkweise bei der Bearbeitung von Aufgaben umzusetzen.

Fragen zur den vergleichende Analysen der Lehrpläne und Lehrbücher

Wie wird die Ausbildung der funktionalen Denkweise im intendierten und im potentiellen Curriculum von Deutschland und Frankreich unterstützt und gefördert?

Diese übergreifende Frage kann in Anlehnung an die theoretischen Betrachtungen des dritten Kapitels in eine Vielzahl von Detailfragen aufgeteilt werden, welche die Facetten der funktionalen Denkweise abdecken.

- Fragen zur Vorbereitung der funktionalen Denkweise:
  Gibt es hinführende Arbeiten, die den Umgang mit funktionalen Situationen vorbereiten?
  Sind bei diesen Arbeiten Präferenzen bezüglich bestimmter Darstellungsregister funktionaler Abhängigkeiten auszumachen?
  Welche Übersetzungsvorgänge sind dabei intendiert?
- Fragen zu den Inhalten:
  Bestehen in den beiden Ländern Präferenzen für bestimmte Funktionstypen und wie ist die Reihenfolge ihrer Einführung?
- Fragen zu den genutzten Darstellungsregistern:
  Sind in den gestellten Aufgaben zu den einzelnen Funktionstypen Präferenzen für bestimmte Darstellungsregister erkennbar?
  Welche Übersetzungen werden für die Bearbeitung der Aufgaben jeweils gebraucht?
- Fragen zu den Grundvorstellungen und Sichtweisen:
  Inwieweit wird die Ausbildung von Grundvorstellungen gefördert?
  Welche Sichtweise (Aktion, Prozess, Objekt) von Funktionen steht im Vordergrund?

Auch die Ergebnisse des vierten Kapitels erlauben eine Spezifizierung der Frage, indem auf zu erwartenden Schwierigkeiten geachtet wird.

- Inwieweit können die Schüler ein konsistentes und mathematisch korrektes concept images zu Funktionen ausbilden?
  Welche Einschränkungen sind jeweils zu erwarten?
- Inwieweit lassen sich Maßnahmen identifizieren, die bekannten Fehlertypen vorbeugen?
- Wie ist die Wahl der Art und des Zeitpunktes der Funktionsdefinition einzuordnen und wie wird die Definition in der Folge genutzt?
  Hierbei ist auch die Frage zu beantworten, wie sich die Funktionsdefinition in den gesamten Funktionsunterricht einordnet und wie gut eine tragfähige concept definition mit Verbindung zum concept image gebildet werden kann.
  Besteht die Gefahr einer compartmentalization?

Fragen zu den vergleichenden Analysen der Leistungen von Schülern beider Länder

In welchem Maße bilden die Schüler in Deutschland und Frankreich die funktionale Denkweise aus und sind zu deren Anwendung fähig?

Die Beantwortung dieser Frage soll sich im Wesentlichen auf Analysen von Ergebnissen der Subskala *Veränderung und Beziehung* von PISA 2003, auf Detailbetrachtungen der PALMA-Studie und auf eine in beiden Ländern durchgeführte Interviewstudie stützen. Hierdurch und auf Grund der Vorarbeiten aus den vorangegangenen Kapiteln kann auch diese übergreifende Frage in einen Komplex von Detailfragen aufgespaltet werden.

- Wie sind die Ergebnisse der Schüler in der Subskala *Veränderung und Beziehung* von PISA 2003 zu bewerten, wenn ein spezieller Fokus auf die Ausbildung der funktionalen Denkweise gesetzt wird?
- Wie können auftretende Probleme mit Grundvorstellungsdefiziten, unangebrachten concept images, Übersetzungsschwierigkeiten oder anderen im dritten Kapitel genannten Konzepten beschrieben werden?
- Inwieweit kann die Entwicklung der funktionalen Denkweise von bayerischen Schülern mit Hilfe der PALMA dokumentiert werden?
- Können die festgestellten Probleme mit Hilfe der im Rahmen von PALMA in Deutschland und Frankreich durchgeführten Interviews exemplarisch konkretisiert und analysiert werden?
- Lassen sich Stärken und Schwächen der Schüler auf die unterschiedlichen Inhalte der Lehrpläne und Lehrbücher zurückführen?
  Gibt es Schwierigkeiten, die trotz unterschiedlicher Herangehensweisen in beiden Ländern gleichermaßen auftreten?
  Welche Konsequenzen können daraus gezogen werden?

Im nächsten Abschnitt wird dargestellt, wie diese Fragen beantwortet werden sollen.

5.2 Methodologie

Das Curriculum eines Landes lässt sich in auf vier Ebenen betrachten. Unter dem *intendierten* Curriculum versteht man das von den entscheidenden Institutionen gewollte Curriculum, das seinen Ausdruck in den Lehrplänen und den Lehrplankommentaren findet. Das *potentielle* Curriculum, das die Verbindung zwischen dem intendierten und dem tatsächlich umgesetzten Curriculum bildet, kann mit Hilfe der Lehrbücher analysiert werden. Die im Unterricht tatsächlich behandelten Inhalte sind Teil des *implementierten* Curriculums, welches durch Beobachtungen in den Schulen oder zumindest durch Lehrerbefragungen zu erfassen ist. Das *erreichte* Curriculum äußert sich schließlich in den Schülerleistungen selbst. (Baumert et al., 2000; Schmidt et al., 1996)

In den folgenden Kapiteln werden das intendierte, das potentielle und ein Teil des erreichten Curriculums von Deutschland und Frankreich im Bereich funktionalen Denkens miteinander verglichen. Ein mit Sicherheit sehr interessanter und aufschlussreicher Vergleich des implementierten Curriculums würde den Rahmen dieser Arbeit sprengen. Durch die Analyse des potentiellen Curriculums ergibt sich jedoch realitätsnahes Bild dessen, was in den Klassenzimmern tatsächlich behandelt wird, da die benutzten Schulbücher den Unterricht stark prägen.

Der erste Teil der Fragen aus Abschnitt 5.1 bezieht sich auf das intendierte und auf das potentielle Curriculum.
Für die Analyse und den Vergleich der intendierten Curricula von Deutschland und Frankreich werden in Deutschland die bayrischen Hauptschul-, Realschul- und Gymnasiallehrpläne der Klassen 5 bis 10, sowie die deutschlandweit geltenden Bildungsstandards herangezogen. In Frankreich werden die Lehrpläne der Klassen CM2 und 6^{e} bis 2^{de} genutzt.
Die potentiellen Curricula werden durch die Betrachtung von ausgewählten Schulbüchern dargestellt. Auf der deutschen Seite wird exemplarisch ein bayrisches Schulbuch pro Schulart und Klassenstufe analysiert, auf der französischen Seite sind es zwei Schulbücher pro Klassenstufe. Dabei handelt es sich in allen Fällen um Schulbücher, die im jeweiligen Land zu den am meisten benutzten gehören.

Die Analyse der Bücher erfolgt mit Augenmerk auf die in oben gestellten Fragen also auf Übersetzungen, Reihenfolge der eingeführten Funktionen, benötigte Grundvorstellungen, etc. Der Fokus liegt also nicht auf den verschiedenen Aufgabentypen wie Extremwertsuche, Ableitungen, etc.

Die zweite Fragengruppe aus Abschnitt 5.1 bezieht sich auf das erreichte Curriculum. Für dessen Evaluation werden PISA 2003 mit der Subskala *Veränderung und Beziehung* und die im Rahmen von PALMA in Deutschland und Frankreich durchgeführten Interviews herangezogen.
Dabei wird bei PISA 2003 nicht nur die globale Leistung der Schüler betrachtet, sondern auch versucht mit differentiellen Itemanalysen die Folgen unterschiedlicher Schwerpunktsetzung in den intendierten und potentiellen Curricula empirisch nachzuweisen. Mit den Interviews von PALMA können einige der zuvor identifizierten Stärken und Schwächen, wie beispielsweise die unterschiedlichen zu erwartenden concept images oder die verschiedenen Ausprägungen von Grundvorstellungen, dargestellt werden.
In Bayern wird noch dazu speziell die PALMA Längsschnittstudie in die Analysen mit einbezogen, um Entwicklungen der funktionalen Denkweise aufzuzeigen.

Natürlich wird mit diesen Instrumenten nur ein Teil des erreichten Curriculums abgebildet, nämlich der Teil, der in den Testitems von PISA 2003 und PALMA erfasst wird. In den jeweiligen Kapiteln wird deswegen darauf eingegangen, wie sich der erfasste Teil des erreichten Curriculums mit den intendierten und potentiellen Curricula deckt.

6 Analyse und Vergleich der intendierten Curricula

Die Entwicklung funktionalen Denkens bei Schülern wird von vielen externen Faktoren beeinflusst. Gesammelte Erfahrungen und Beobachtungen im persönlichen Umfeld (zum Beispiel eine Schlittenfahrt, das Auftreten funktionaler Zusammenhänge in den Medien oder die Nutzung eines Handys mit Prepaid-Karte) bilden einen ersten Kontakt mit der funktionalen Denkweise. Da dieser vom einzelnen Schüler abhängig ist und sich über einen nicht zu begrenzenden Zeitraum erstreckt kann hier darauf nicht weiter eingegangen werden.

Ein weiterer Faktor, der die Entwicklung funktionalen Denkens unterstützt, ist die Schulbildung. Im folgenden Kapitel wird mit der vergleichenden Analyse der Lehrpläne Deutschlands und Frankreichs das intendierte Curriculum beider Länder im Bereich funktionalen Denkens untersucht.

Die Analysen beschränken sich auf die Klassenstufen fünf bis zehn (CM2 bis 2de in Frankreich), da in dieser Zeit die wesentlichen Grundlagen des funktionalen Denkens gelegt werden. So wird die direkte Proportionalität in der Realschule und im Gymnasium Bayerns in der 6. Klasse, nach Vorarbeiten aus der 5. Klasse, eingeführt. In Frankreich werden lineare Funktionen in der 9. Klasse (3^{e}) und der abstrakte Funktionsbegriff in der 10. Klasse (2de) zum ersten Mal definiert. Diese wichtigen Etappen in der Entwicklung und das Übereinstimmen mit dem deutschen Ausbildungsabschnitt Sekundarstufe I haben zur Wahl des betrachteten Zeitfensters geführt (siehe auch Kapitel 5).

Dem Vergleich der aktuellen Lehrpläne ist eine Gegenüberstellung beider Länder vorangestellt, die ihre grundsätzliche Vergleichbarkeit aufzeigt. Dabei werden auch die jeweiligen Schulsysteme dargestellt. Anschließend wird ein kurzer Überblick über die jeweilige historische Entwicklung der Lehrpläne zu Funktionen gegeben, damit die Schwerpunktsetzungen in den aktuellen Lehrplänen eingeordnet werden können.

6.1 Deutschland und Frankreich – Eine Gegenüberstellung

Im Abschnitt 6.3 und im Kapitel 7 werden die intendierten und potentiellen Curricula von Deutschland und Frankreich analysiert und gegenübergestellt. Anschließend werden in den Kapiteln 8 und 9 die Fähigkeiten von deutschen und französischen Schülern miteinander verglichen. Bei diesen Vergleichen und Gegenüberstellungen ist es wichtig einen Überblick über die jeweiligen Rahmenbedingungen zu haben. Diese werden in den nächsten Abschnitten kurz vorgestellt. Zuerst wird ein grober Überblick über die Eckdaten beider Länder gegeben, dann das Schulsystem vorgestellt und abschließend kurz auf die Mathematiklehrerausbildung eingegangen. Dabei wird auf deutscher Seite exemplarisch das Bundesland Bayern betrachtet.

6.1.1 Länderprofile

Die folgende Tabelle gibt eine Übersicht über einige wichtige Eckdaten beider Länder:

	Deutschland	Frankreich
Fläche	357.000 km²	544.000 km²
Einwohner (2003)	82,5 Millionen	60 Millionen
Bevölkerungsdichte (2003)	231 Einwohner/km²	110 Einwohner/km²
Anteil der Stadtbevölkerung (2000)	71%	73%
Pro-Kopf-Bruttoinlandsprodukt (in US-$, umgerechnet auf Kaufkraftparität-Basis) (2001)	25.453 $	26.818 $
Bildungsausgaben in Prozent des BIP (2001)	5,3%	6%
Kumulativen Ausgaben je Schüler zwischen 6 und 15 Jahren (in US-$, umgerechnet auf Kaufkraftparität-Basis) (2001)	49.145 $	62.731$
Bevölkerung in der Altersgruppe 35-45 Jahre, mit mindestens Sekundarstufe-II-Abschluss	86%	68%
Anteil der 15-jährigen Schüler (PISA 2003-Zielpopulation) die:		
im Inland geboren sind und mindestens ein im Inland geborenes Elternteil haben	84,6%	85,7%.
im Inland geboren sind und im Ausland geborene Eltern haben	6,9%	10,8%
im Ausland geboren sind und im Ausland geborene Eltern haben	8,5%	3,5%

Tabelle 6: Gegenüberstellung von Deutschland und Frankreich (Statistisches Bundesamt Deutschland; Institut national d'études démographiques; OECD, 2004a; OECD, 2004b; Deutsche Botschaft Paris)

Es fällt auf, dass die Bevölkerungsdichte in Frankreich nur halb so groß ist wie in Deutschland und dass die französischen Bildungsausgaben höher sind. Diese Eckdaten zeigen jedoch auch, dass beide Länder in Bezug auf Größe, Wirtschaftsleistung, Bildungsausgaben und Anteil der Schüler mit Migrationshintergrund im Wesentlichen vergleichbar sind.

Es wird nun kurz die Organisation des Bildungswesens beider Länder vorgestellt.

6.1.1.1 Bildungswesen Deutschlands:

Deutschland ist ein Bundesstaat und besteht aus 16 Bundesländern, die in einigen Bereichen weitgehende Souveränität genießen. Zu diesen Bereichen gehört insbesondere das Bildungswesen. Die Bildungssysteme in den verschiedenen Bundesländern weisen jedoch große Ähnlichkeiten auf und stimmen im Aufbau weitgehend überein. Dies liegt unter anderen an der *ständigen Konferenz der Kultusminister der Länder in der Bundesrepublik Deutschland*, der Kultusministerkonferenz. Sie soll durch Konsens und Kooperation die Mobilität unter den Lernenden sichern, was sich in der Vergleichbarkeit der Zeugnisse und der Sicherung von Qualitätsstandards äußert.

Dennoch unterscheiden sich die Bildungssysteme in einigen Punkten. So variieren etwa Einschulungsalter und Pflichtschulzeit zwischen den Bundesländern, Schularten wie Gesamtschulen existieren nicht überall und die einzelnen Lehrpläne setzen unterschiedliche Schwerpunkte.

Um die folgenden Analysen in der nötigen Feinheit durchführen zu können und nicht 16 Einzelsysteme betrachten zu müssen, wird exemplarisch das Bundesland Bayern betrachtet.

Mit 12 Millionen Einwohnern auf 70.500 km² hat Bayern eine Bevölkerungsdichte von 176 Einwohnern je Quadratkilometer. Es ist das flächenmäßig größte Bundesland, hat aber weniger Einwohner als das bevölkerungsreichste Bundesland Nordrhein-Westfalen.
Durch diese Größe und hohe Einwohnerzahl ist gesichert, dass eine ausreichende Diversität in der Bevölkerung gegeben ist, die etwa in Stadtstaaten nicht vorhanden ist.
In der PISA 2003 Erweiterungsstudie für den Vergleich der Bundesländer untereinander hat Bayern in Mathematik und anderen Bereichen die Spitzenposition belegt (Siehe Kapitel 8).

Einen wichtigen Einfluss auf die Wahl von Bayern als Arbeitsgrundlage hatte neben der breiten Datenbasis und dem guten Abschneiden bei der PISA 2003 Studie das Vorhandensein der PALMA Studie. Dieses Projekt zu Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik arbeitet mit einer repräsentativen Stichprobe für bayerische Schüler und setzt in den schriftlichen Tests und der angeschlossenen Interviewstudie Items zu funktionalem Denken ein. Es erlaubt es durch das Längsschnittdesign insbesondere Entwicklungsverläufe zu analysieren (siehe Kapitel 8 und 9).

6.1.1.2 Bildungswesen Frankreichs:

Das Bildungssystem in Frankreich ist im Gegensatz zu dem Deutschlands zentralistisch organisiert. Entscheidungen etwa über den Aufbau des Systems oder über die Lehrpläne werden vom *ministère de l'éducation nationale, de l'enseignement supérieur et de la recherche* für das gesamte französische Staatsgebiet getroffen.

In den folgenden Abschnitten werden das Bildungssystem von Deutschland am Beispiel von Bayern und das Bildungssystem von Frankreich dargestellt.

6.1.2 Schulsystem

6.1.2.1 Schulsystem Deutschlands am Beispiel von Bayern

<table>
<tr><td>Klassenstufe</td><td></td><td></td><td></td><td>Alter bei Eintritt</td></tr>
<tr><td>13</td><td rowspan="3" colspan="2"></td><td rowspan="9">Gymnasium</td><td>18</td></tr>
<tr><td>12</td><td>17</td></tr>
<tr><td>11</td><td>16</td></tr>
<tr><td>10</td><td></td><td rowspan="6">Realschule</td><td>15</td></tr>
<tr><td>9</td><td rowspan="5">Hauptschule</td><td>14</td></tr>
<tr><td>8</td><td>13</td></tr>
<tr><td>7</td><td>12</td></tr>
<tr><td>6</td><td>11</td></tr>
<tr><td>5</td><td>10</td></tr>
<tr><td>4</td><td rowspan="4" colspan="3">Grundschule</td><td>9</td></tr>
<tr><td>3</td><td>8</td></tr>
<tr><td>2</td><td>7</td></tr>
<tr><td>1</td><td>6</td></tr>
</table>

Tabelle 7: Bayerisches Schulsystem

In Bayern werden Kinder eingeschult, wenn sie vor dem 30.6 des Einschulungsjahres ihr sechstes Lebensjahr vollendet haben (Diese Grenze wird ab dem Schuljahr 2006/2007 schrittweise auf den 31.12. verschoben). Die Schulpflicht dauert neun Jahre, endet also etwa zwischen dem 15. und dem 16. Lebensjahr.

Zuerst besuchen die Schüler vier Jahre lang gemeinsam die Grundschule, bevor sie mit 10 Jahren auf drei unterschiedliche Bildungswege aufgeteilt werden.

Die Hauptschule ist der kürzeste Bildungsweg. Sie dauert fünf Jahre und endet mit dem Hauptschulabschluss. Diese Schulart zielt darauf ab Schüler auf die Arbeit in handwerklichen Berufen, der Industrie oder im einfachen Dienstleistungsbereich vorzubereiten.
Begabte Schüler können nach einer zusätzlichen zehnten Klasse an der Hauptschule den Realschulabschluss (Mittlere Reife) machen.

Die Realschule wird von den Schülern nach sechs Jahren, also in der 10. Klassen, mit der Mittleren Reife abgeschlossen. Sie ist praxisorientiert und besteht ab der 7. Klasse aus drei Zweigen mit unterschiedlichen Schwerpunkten (davon ein mathematisch-technischer Zweig). Die Ausbildung an der Realschule bereitet etwa auf technische Berufe in Industrie und Wirtschaft oder die Arbeit in Verwaltungen, Banken oder Versicherungen vor.

Der zweijährige Besuch einer Fachoberschule im Anschluss an die Mittlerer Reife führt zu einer fachgebunden Hochschulreife, dem Fachabitur.

Das Gymnasium führt nach neun Jahren zur allgemeinen Hochschulreife, dem Abitur. Dieses wird in der 13. Klasse abgelegt und erlaubt das Studium an einer Universität. Im Zuge der Angleichung der Lehrpläne aller Bundesländer wird zurzeit in Bayern das achtstufige Gymnasium eingeführt, das schon in der 12. Klasse mit dem Abitur abschließt.

Im Schuljahr 2002/2003 ist die Verteilung der bayerischen Schüler der 9. Klasse auf die verschiedenen Schularten am Schuljahresanfang die folgende: Etwas weniger als die Hälfte der Schüler besucht die Hauptschule. Jeweils etwa ein Viertel der Schüler besucht die Realschule (davon ein Fünftel den mathematisch-technischen Zweig) und das Gymnasium (Diese Aufteilung auf die verschiedenen Schularten kann in anderen Bundesländern stark unterschiedlich ausfallen). Die Grenzen zwischen den Schularten sind durchlässig, sodass gute oder schlechte Schüler Schulart wechseln können. (Bayerisches Landesamt für Statistik und Datenverarbeitung)

In der Regel besteht ein Schultag aus sechs Unterrichtsstunden à 45 Minuten und einer oder zwei Pausen. Eine typische Schulwoche besteht aus Unterricht von Montag bis Freitag, jeweils zum Beispiel von 8 bis 13 Uhr. Nachmittagsunterricht findet nur selten statt.

6.1.2.2 Schulsystem Frankreichs

Klassenstufe	Jahr			Alter bei Eintritt
	13			17-18
Terminale	12			16-17
1^{re}	11		Lycée général et technologique	15-16
2^{de}	10	Lycée professionnel		14-15
3^{e}	9			13-14
4^{e}	8	Collège		12-13
5^{e}	7			11-12
6^{e}	6			10-11
CM2	5			9-10
CM1	4			8-9
CE2	3	Ecole élémentaire		7-8
CE1	2			6-7
CP	1			5-6

Tabelle 8: Französisches Schulsystem
(CP = Cours préparatoire; CE = Cours élémentaire; CM = Cours moyen)

Kinder werden in Frankreich eingeschult, wenn sie vor dem 31.12. des Einschulungsjahres ihren sechsten Geburtstag haben. Die Schulpflicht endet mit dem 16. Geburtstag.

Die Schüler besuchen zuerst fünf Jahre lang die Ecole élémentaire und anschließend vier Jahre lang gemeinsam das Collège. Erst danach, im Alter von 14-15 Jahren, werden sie in verschiedene weitere Laufbahnen aufgeteilt.

Nach der 3^{e} tritt ein Teil der Schüler in Lyée général und Lycée technologique über. Das Lycée général führt innerhalb von drei Jahren zum Baccalauréat général, der allgemeinen Hochschulreife. Der Abschluss im Lycée technologique wird ebenfalls in drei Jahren erreicht und heißt Baccalauréat technologique. Er bereitet zum Beispiel auf Arbeiten in der Industrie (Maschinenwesen, Bauwesen, Elektronik…), in der Verwaltung und im Rechnungswesen vor. In der 2^{de} haben Lycée général und Lycée technologique im Wesentlichen noch einen gemeinsamen Lehrplan, der sich aber in der Première im Lycée général in drei Zweige und im Lycée technologique in eine Vielzahl von Spezialisierungen aufgliedert.

Ein weiterer Teil der Schüler besucht das Lycée professionnell, in dem mehrere Abschlüsse in unterschiedlicher Zeit vorbereitet werden können. Der höchste davon ist der Baccalauréat professionnel und wird in vier Jahren erreicht. Der Lycée professionnel bereitet auf Berufe in der Industrie und im Dienstleistungssektor vor.

Von den Schülern die 2001/2002 die 3^{e} besucht haben besuchen am Anfang des Schuljahres 2002/2003 62% die 2de in einem Lycée général oder einem Lycée technologique. 31% gehen in ein Lycée professionnel und 7% wiederholen die 3^{e}. Etwa 80% der Schüler eines Jahrgangs erreichen einen der verschiedenen Baccalauréats. (Ministère de la jeunesse, de l'éducation nationale et de la recherche)

Im Allgemeinen besteht ein Unterrichtstag in Frankreich aus sechs bis sieben Schulstunden à 55 Minuten, die auf den Vormittag und den Nachmittag verteilt sind. Eine Unterrichtswoche dauert von Montag bis Freitag, wobei am Mittwochnachmittag kein Unterricht stattfindet. In manchen Fällen wird als Ausgleich für einen komplett unterrichtsfreien Mittwoch am Samstagvormittag unterrichtet.
Das Schuljahr beginnt üblicherweise Anfang September, also unwesentlich später als in den meisten deutschen Bundesländern, wo es im Laufe des Augusts anfängt.

6.1.2.3 Vergleich Deutschland - Frankreich

In der oben aufgeführten Übersicht fällt auf, dass das Selektionsalter in Deutschland mit zehn Jahren wesentlich geringer ist als in Frankreich mit 14-15 Jahren. Im Bericht zu PISA 2003 wird diese frühe Selektion für die große Varianz in den Leistungen der deutschen Schüler mitverantwortlich gemacht.

In PISA 2003 wurde bei der Zielpopulation der 15-jährigen auch erfasst, welche Klassenstufe sie besuchen:

Klassenstufe	7	8	9	10	11
Anteil der Schüler in Deutschland	1,7%	15%	60%	23,3%	0,1%
Anteil der Schüler in Frankreich	0,2%	5,4%	34,9%	57,3%	2,2%

Tabelle 9: Klassenstufenaufteilung der 15-jährigen (OECD, 2005b)

In Deutschland besucht der Hauptteil der Schüler die 9. Klasse. Die restlichen Schüler verteilen sich in etwa gleich auf die Klassenstufen darüber und darunter. In Frankreich dagegen besucht der Hauptteil der Schüler bereits die 10. Klasse. Die anderen Schüler gehen in niedrigere Klassenstufen. Ein Grund für diese Verschiebung zwischen Deutschland und Frankreich ist sicherlich die frühere Einschulung in Frankreich.

Auch Klassenwiederholungen werden in PISA 2003 erfasst. So haben in Deutschland 9,0 % der PISA-Zielpopulation eine Klasse in der Grundschule und 14,1% in eine in der Sekundarstufe I wiederholt. In Frankreich, sind es 15,6 % in der Grundschule und 26,7% in der Sekundarstufe I (OECD, 2004b). Diese Zahlen sind nicht direkt vergleichbar da die Grundschule in Deutschland eine Klassenstufe weniger hat als in Frankreich (für die Erarbeitung des Fragebogens wurden ISCED Level verwendet (International Standard Classificaton of Education); die Grundschule entspricht dem ISCED Level 1). Dennoch fällt auf, dass in Frankreich der Anteil der Wiederholer wesentlich höher ist als in Deutschland.

Für die weiteren Analysen wird Folgendes aus dieser Gegenüberstellung festgehalten:

Bei der Interpretation der Ergebnisse von PISA 2003 ist zu beachten, dass die französischen Schüler im Mittel etwas länger in der Schule sind als die deutschen.

Bei der Analyse von Daten deutscher Schüler ist stets auf dem von ihm besuchten Schultyp zu achten. Daher werden für die deutsche Seite die Lehrpläne und Schulbücher der Hauptschule, der Realschule und des Gymnasiums von Bayern für Vergleiche herangezogen.

6.1.3 Lehrerausbildung

Es wird nun kurz die Ausbildung der Mathematiklehrer dargestellt, da sie Aufschluss über die Ausrichtung des Schulsystems gibt.

6.1.3.1 Mathematiklehrerausbildung in Bayern

In Bayern gibt es für jede der drei Schularten speziell ausgebildete Mathematiklehrer. Ein Hauptschullehrer unterrichtet viele Fächer und hat in der Regel keine intensive Mathematikausbildung. Sie beschränkt sich auf ca. 12 Semesterwochenstunden (SWS; Eine SWS entspricht ein Semester lang 45 Minuten Lehre pro Woche) in denen sowohl der fachliche als auch der didaktische Stoff abgedeckt wird. Die fachlichen Grundlagen bewegen sich auf dem Niveau der gymnasialen Oberstufe, was insbesondere bedeutet, dass keine vertiefte Mathematik gelehrt wird.

Realschullehrer unterrichten zwei Fächer. Während ihres Studiums hören sie Vorlesungen in Mathematik, die jedoch nicht das Niveau einer Vorlesung im reinen Mathematikstudium haben. Außerdem haben sie ca. 12 SWS Lehre in Didaktik der Mathematik.

Genau wie der Realschullehrer unterrichten auch Gymnasiallehrer zwei Fächer. Ihre Ausbildung ist aber weit mathematischer. So besuchen sie für ihre fachliche Ausbildung einen Teil der Veranstaltungen für Studenten der reinen Mathematik und haben nur fünf SWS Didaktikvorlesungen.

Lehrer aller drei Schularten müssen außerdem während ihres Studiums drei Schulpraktika absolvieren, die jeweils drei bis sechs Wochen dauern.

Nach der universitären Ausbildung folgt das zweijährige Referendariat. In diesem erhalten die Lehrer von einem Betreuungslehrer eine praktische Anleitung in der Schule, in der sie auch erste betreute Unterrichtsstunden halten.

6.1.3.2 Mathematiklehrerausbildung in Frankreich

In Frankreich gibt es keinen Unterschied zwischen dem reinen Mathematikstudium und dem Studium um Lehrer am Collège oder Lycée zu werden. Insbesondere ist keine Didaktikausbildung an der Universität vorgesehen. Nach drei Jahren Mathematikstudium können die Studenten ein Auswahlverfahren vorbereiten, das sie zum Schuldienst zulässt (das CAPES; Certificat d'Aptitude Pédagogique à l'Enseignement du Second degré). Diese Vorbereitung dauert üblicherweise ein volles Jahr. Anschließend folgt eine einjährige Ausbildung an einer IUFM (Institut Universitaire de Formation des Maitres), die parallel zu ersten betreuten Unterricht gegeben wird. In diesem Rahmen erhalten die Lehrer ihre Didaktikausbildung.

Französische Mathematiklehrer haben durch ihre Ausbildung somit eine deutlich engere Bindung an die Hochschulmathematik als die bayerischen Mathematiklehrer. Etwaige Unterschiede im intendierten und im potentiellen Curriculum, insbesondere Orientierungen an abstrakteren Aufgaben, können damit zumindest teilweise erklärt werden.

6.2 Historische Entwicklung der Lehrpläne des Funktionsunterrichts

Im diesem Abschnitt wird die historische Entwicklung des Funktionsunterrichts im 20. Jahrhundert in Deutschland und Frankreich kurz dargestellt. Diese läuft ist in beiden Ländern weitestgehend parallel, obwohl verschiedene Schwerpunkte gesetzt werden. Mit Hilfe der Kenntnis von Traditionen beider Länder können Präferenzen im jeweiligen Unterricht besser identifiziert und erläutert werden.

6.2.1 Historische Entwicklung in Deutschland

Bis zum Ende des 19. Jahrhunderts tauchen in den deutschen Lehrplänen keine Funktionen auf.

1905 wird im Zuge des Versuches der Angleichung des Schullehrstoffs an den wissenschaftlichen Wissenstand der so genannte Meraner Lehrplan u.a. von Felix Klein veröffentlicht. Von ihm gehen wichtige Impulse für den Funktionsunterricht aus. So setzt er die *Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens* als Leitlinie für den Aufbau des gesamten Mathematiklehrplanes fest und fordert auch das Einbeziehen anderer Fachbereiche und der Realität. Es soll zum Beispiel durch „Beweglichmachen“ geometrischer Objekte die funktionale Denkweise in den Geometrieunterricht eingebunden werden. Aber auch dem Funktionsunterricht selbst wird ein starkes Gewicht verliehen. In der 7. Klasse werden Abhängigkeiten und Größenänderungen mit Formeln untersucht. Ab der 8. Klasse werden graphische Darstellungen von Funktionen zum Lösen von Gleichungen und zur Veranschaulichung von Zusammenhängen verwendet. Von der 9. bis zur 11. Klasse sollen die Schüler verschiedene Funktionen (z.B. lineare, quadratische, Potenz-, Exponential- und trigonometrische Funktionen) in allen Darstellungsformen kennen lernen. Es ist dabei nicht von dem Funktionsbegriff oder von eindeutigen Zuordnungen die Rede, sondern von funktionalen Abhängigkeiten. Die Funktionsdefinition selbst wird nicht vor die Behandlung von konkreten Funktionen gestellt. Die bis zur Definition betrachteten Funktionen werden erst in der 12. Klasse unter dem Funktionsoberbegriff zusammengefasst. (Krüger, 2000b).

Zu beachten ist, dass der Meraner Lehrplan lediglich ein Vorschlag und keine verbindliche Vorgabe darstellt. Er hat allerdings einen starken Einfluss auf die in den Folgejahren erstellten Lehrpläne, in die Funktionen nach und nach Einzug erhalten.

So wird das Erkennen von gegenseitigen Abhängigkeiten 1925 in den staatlichen Lehrplan Preußens aufgenommen. Dort heißt es:

> Der in den Mittelpunkt zu stellende Funktionsbegriff wird zunächst anschaulich eingeführt, um allmählich schärfer gefasst und auf der Oberstufe in allgemeiner Form behandelt zu werden (Richterschen Richtlinien, zitiert nach Krüger, 2000a).

Im Gegensatz zum Meraner Lehrplan liegt hier mehr Gewicht auf der Einführung des Funktionsbegriffs. Die Forderung nach *Erziehung zur Gewohnheit des funktionalen Denkens* und der damit einhergehenden Betrachtung funktionaler Abhängigkeiten in allen Bereichen der Mathematik und darüber hinaus findet sich hier nicht mehr.

Bis in die 50er Jahre wird in der Schulmathematik eine Funktion als veränderliche Abhängigkeit angesehen. Defizite der Schüler im wissenschaftlichen Umgang mit Funktionen und die voranschreitende Fachwissenschaft mit den Arbeiten von Bourbaki führen Ende der 60er Jahre zur Reform der „modernen Mathematik", in der der Funktionsbegriff mit Hilfe der Mengentheorie eingeführt wird.

Im Gymnasium wird in dieser Zeit ab der 5. Klasse mit Relationen und Paarmengen gearbeitet. In der 7. oder 8. Klasse wird eine formale Definition von Funktionen als speziellen Relationen gegeben und anschließend werden lineare Funktionen betrachtet. In den folgenden Klassenstufen wird die Arbeit mit dem Funktionsbegriff durch die Einführung weiterer Funktionstypen vertieft. Es findet also keine Hinleitung zum Funktionsbegriff mehr statt, der stattdessen vorab mit Hilfe einer abstrakten Definition eingeführt wird.
Die Lehrpläne in den Realschulen orientieren sich an denen des Gymnasiums und vollziehen ähnliche Entwicklungsschritte.
In den Hauptschullehrplänen werden Funktionen, wenn überhaupt, erst sehr spät behandelt. Allerdings beschränken sie sich im Wesentlichen auf die Behandlung von linearen Funktionen. (Andelfinger, 1985)

Auch in der DDR werd Ende der 60er Jahre Funktionen mit Hilfe der Mengenlehre definiert, nachdem sie davor als wechselseitige Abhängigkeit, bzw. eindeutige Zuordnung definiert worden waren (Stoye, 1990, S. 767).

Ab den 80er Jahren findet nach und nach ein Rückgang des Einflusses der Mengentheorie auf den Funktionsunterricht in allen Schulformen statt. Weniger formale Aspekte von Funktionen wie Kovariation oder Zuordnung erhalten wieder mehr Gewicht und Funktionen werden mit Anwendungsbeispielen im Unterricht eingeführt.

Die im Folgenden analysierten Lehrpläne von Bayern stellen den Stand dieser Entwicklungsphase im Jahr 2003 dar.

Diese grobe Darstellung der Entwicklung des Funktionsunterrichts in Deutschland zeigt folgende Phasen: Ausgelöst durch den Meraner Lehrplan von 1905 werden in den darauf folgenden Jahren Funktionen in den Mathematikunterricht aufgenommen. Sie werden zu einem festen Bestandteil des Mathematikunterrichts und mit anschaulichen Beispielen als veränderliche Abhängigkeit eingeführt. Ende der 60er Jahre führen Bestrebungen, den formalen Umgang mit Mathematik zu verbessern, zu einer abstrakten Einführung von Funktionen mit Hilfe von speziellen Relationen. In den 80er Jahren setzt dann eine Gegenbewegung ein, die zu einer breiteren Betrachtung des Funktionskonzeptes und zu einer stärkeren Einbindung der Realität führt.

6.2.2 Historische Entwicklung in Frankreich

Auf Grund des zentralistischen Schulsystems von Frankreich kann hier die Lehrplanentwicklung an Hand der wichtigen Reformschritte konkret dargestellt werden, da es nicht wie in Deutschland eine Vielzahl von Lehrplänen gibt und die Darstellung somit in einem angemessenen Rahmen gehalten werden kann.

Ende des 19. Jahrhunderts werden in der Experimentalphysik in französischen Schulen verstärkt funktionale Zusammenhänge betrachtet. Aus diesem Grund werden 1902 erstmals Funktionen in den Mathematiklehrplan aufgenommen. Ihre Untersuchung bleibt jedoch stark von der Anwendung in anderen Fächern wie der Physik geprägt und beschränkt sich auf einfache Funktionen (Belhoste, 1995; Artigue, 1996, S. 198). In der 4^{e} werden proportionale und antiproportionale Größen betrachtet, bevor in der 3^{e} die Variation und der Graph der Ausdrücke $ax+b$, x^2 und $1/x$ untersucht werden. In der 2de folgen Variation und Graph von ax^2 und $(ax+b)/(a'x+b')$. Das Wort *Funktion* taucht erst in der 1^{ière} gemeinsam mit den Kreisfunktionen auf. Bei dem hier dargestellten Lehrplan handelt es sich um den des mathematisch anspruchvollsten Schulzweiges. Weniger anspruchsvolle Zweige behandeln manche Aspekte jeweils erst ein Jahr später. (Programme France, 1902)

Auch 1923 werden in der 4^{e} proportionale und antiproportionale Größen untersucht. Diese Untersuchungen werden in der 3^{e} vertieft, bevor in der 2de die „Funktion“ $y=ax+b$ einschließlich deren Graphen studiert wird. In dieser Jahrgangsstufe werden auch lineare Gleichungssysteme mit deren graphischen Lösungsmöglichkeiten betrachtet.

Der Lehrplan im Bezug auf Funktionen wurde also vereinfacht. Zwar taucht der Funktionsbegriff nun schon in der 2de auf, aber Funktionen mit höherem Grad als eins oder antiproportionale Funktionen werden frühestens in der 1re behandelt. (Programme France, 1923)

Der nächste untersuchte Lehrplan stammt aus dem Jahr 1945. Dort finden sich bis zur 3^{e} keine Inhalte, die auf Funktionsbetrachtungen hinweisen. Dann wird allerdings schon in der 3^{e} der Funktionsbegriff eingeführt. Es werden dabei proportionale Funktionen, deren Graphen und lineare Gleichungssysteme einschließlich der graphischen Lösung betrachtet. Antiproportionale Verhältnisse zwischen Größen sollen angegeben werden, ohne dass von der Funktion $y=1/x$ die Rede ist. Diese wird zusammen mit den Funktionen $y=ax+b$ und $y=a/x$, jeweils mit Graph und Wachstumsverhalten, in der 2de untersucht.

Es fällt auf, dass die Funktionsdefinition sehr früh, gleichzeitig mit proportionalen Funktionen gebracht wird, aber keine Funktionen höheren Grandes untersucht werden. Lineare Funktionen werden weiterhin in der 2de, ein Jahr nach der proportionalen Funktion behandelt.

(1945 gibt es auch einen enseignement moderne court, der auf einen früheren Schulabgang vorbereitet. Dessen leicht abweichender Lehrplan wird hier nicht untersucht) (Programme France, 1945)

1960 ist schon in der 4^{e} von *Begriff des Zusammenhangs zwischen Variablen* die Rede und in der 3^{e} wird, wie 1945, der Funktionsbegriff eingeführt. Lineare Funktionen werden mit ihrem Variationsverhalten und der graphischen Darstellung untersucht, und lineare Gleichungssysteme werden graphisch gelöst. In der 2^{de} wird die Definition der Funktion als Zusammenhang wiederholt und $y=ax^2+bx+c$ und $y=a/x$ mit ihren Variationsverhalten und Graphiken behandelt (In weniger mathematischen Zweigen nur $y=ax^2$ statt $y=ax^2+bx+c$).

Die Einführung des Funktionsbegriffs bleibt somit in der 3^{e}, aber es kommen mehr Funktionstypen im Unterricht vor. Die Behandlung linearer und quadratischer Funktionen wird um ein Jahr nach vorne gezogen. Das Variationsverhalten und die graphische Darstellung der behandelten Funktionen werden explizit als zu untersuchende Eigenschaften erwähnt. (Programme France, 1960)

1969 findet die „neue Mathematik“ mit ihren mengentheoretischen Auffassungen den Einzug in den Lehrplan. Ab der 6^{e} werden zunächst mit einfachen Beispielen Relationen und deren graphische Darstellung eingeführt. Sie werden ab der 5^{e} als Abbildungen aufgefasst und Bijektionen werden definiert. In der 4^{e} kommen die Zusammensetzungen von Abbildungen und die Umkehrungen von Bijektionen hinzu. Der Begriff *Funktion* taucht erstmals im Zusammenhang mit Beispielen auf, die von Polynomfunktionen gegeben werden sollen.
Im Lehrplan der 3^{e} findet man zum ersten Mal „Funktionen“ als Teil der Kapitelüberschrift. Dort werden lineare Funktionen mit ihren graphischen Darstellungen behandelt. Es werden aber auch Beispiele gegeben, in denen Funktionen stufenweise oder nur auf einem Intervall definiert sind. In diesem Zusammenhang werden auch lineare Gleichungssysteme mit ihren graphischen Lösungen behandelt.
In der 2^{de} werden dann mengentheoretische Abbildungen von einer Menge in eine andere betrachtet. Im Funktionskapitel werden die in der 3^{e} behandelten Funktionen wiederholt und die zusätzlich $f(x)=a/x$ und $f(x)=|x|$ mit Variation und graphischen Darstellung in den Lehrplan aufgenommen. Dabei wird ein besonderer Wert auf die Notation $f(x)$ gelegt.

Man kann erkennen, dass die Abstraktheit stark zugenommen hat. Sehr früh werden Relationen und Abbildungen behandelt, und schon in der 5^{e} wird von Bijektionen gesprochen. Fehlvorstellungen von Funktionen sollen durch Beispiel von nicht stetigen, oder nur auf Intervallen definierten Funktionen vermieden werden. Dennoch tauchen, abgesehen von diesen Beispielen, bis zur 2^{de} nur lineare und antiproportionale Funktionen im Unterricht auf. (Programme France, 1969)

1977 findet die Einführung der Relationen, Abbildungen und Bijektionen erst in der 5^{e} statt. In der 4^{e} werden Zusammensetzungen von Abbildungen und die Umkehrung von Bijektionen dazu genommen. Erst in der 3^{e} werden Beispiele für die graphischen Darstellungen der

Abbildungen gegeben. Hier werden auch affine „Abbildungen“ inklusive deren graphischer Darstellungen eingeführt und lineare Gleichungssysteme insbesondere mit graphischen Mitteln gelöst. Der Funktionsbegriff wird erst in der 2^de^ im Kapitel mit der Überschrift „Funktionen“ definiert. Dieses Kapitel soll laut Lehrplan einen hervorgehobenen Platz im Schuljahr einnehmen. Es werden Beispiele von Funktionen mit Formeln, Tabellen, Graphen und Taschenrechnertasten gegeben, die sich explizit an der Realität orientieren sollen. Die Arbeit mit der graphischen Darstellung wird besonders hervorgehoben. Globale Eigenschaften von Funktionen, wie Variationsverhalten, Periodizität oder Symmetrie sollen untersucht werden. Variation und graphischen Darstellung von folgenden Funktionen werden studiert: $x \to ax+b$, $x \to |x|$, $x \to x^2$, $x \to x^3$, $x \to \sqrt{x}$ und $x \to 1/x$. Beispiele anderer Funktionen, die sich auf diese zurückführen lassen und die Kreisfunktionen kommen noch hinzu. Außerdem wird das lokale Verhalten von Funktionen wie $x \to (1+x)^2$; $x \to (1+x)^3$ zur Vorbereitung auf die Ableitung untersucht.

In der 5^e^ und 4^e^ ist der Lehrplan noch stark von den mengentheoretischen Auffassungen geprägt und in der 3^e^ werden nur lineare „Abbildungen“ behandelt. Der Funktionsbegriff wird jetzt erst in der 2^de^ definiert, in der auch eine umfangreiche Sammlung an Funktionstypen eingeführt wird. Eine besondere Beachtung findet die Einbindung der Realität und das Variationsverhalten, sowie die graphische Darstellung. (Programme France, 1977)

Der Lehrplan von 1986 hat schon ab der 6^e^ ein Kapitel, das „Funktionen“ als Teil der Überschrift enthält. Konkrete Situationen sind mit Hilfe von Tabellen und Graphen zu beschreiben und proportionale Zusammenhänge sollen erkannt werden. In der 5^e^ wird diese Arbeit fortgesetzt, indem geometrische Beispiele hinzukommen. Auch in der 4^e^ wird das Lesen, Interpretieren und Nutzen von Tabellen, Graphen und Diagrammen geübt. Außerdem werden proportionale „Abbildungen“ als „Multiplikationsmaschine“ eingeführt und deren Graphen untersucht.
Lineare Abbildungen mit ihren Graphen stehen im Lehrplan der 3^e^. Bis zu diesen Zeitpunkt soll ausdrücklich die Definition von Funktion unterlassen werden, aber „en fonction de“ (in Funktion/Abhängigkeit von) und „est fonction de“ (ist Funktion/abhängig von) in den natürlichen Sprachgebrauch der Schüler übergehen.
In der 2^de^ folgt dann die formale Definition von Funktionen. Schüler sollen reale und geometrische Situationen mit einfachen Funktionen, d.h. einfachen Formeln, beschreiben, aber auch Beispiele von anders definierten Funktionen kennen lernen. Allerdings sollen Begriffe wie Definitionsmenge oder Funktionszusammensetzungen nicht behandelt werden und keine allgemeine Untersuchung von Polynomfunktionen zweiten Grades oder der antiproportionalen Funktionen stattfinden. Die Variation und graphische Darstellung der „fonctions usuelles“ (üblichen Funktionen) $x \to ax+b$, $x \to |x|$, $x \to x^2$, $x \to x^3$, $x \to \sqrt{x}$ und $x \to 1/x$ und einfachen Zusammensetzungen von diesen sollen untersucht werden. Beispiele von Sinus- und Kosinusfunktion stellen einen ersten Kontakt mit den Kreisfunktionen dar. Sie werden ebenso wie die anderen Beispiele auf Variation, Periodizität, Symmetrie und Extrema untersucht. Schließlich soll die Lösung von linearen Gleichungssystemen auch mit graphischen Mitteln beherrscht werden.

In diesem Lehrplan tauchen Funktionen nun ab der 6^{e} implizit auf. Ein starker Akzent wird auf die Darstellungen in den verschiedenen Darstellungsregistern gelegt, die in allen Jahrgangsstufen geübt werden. Nachdem zwei Jahre proportionale Situationen behandelt werden, tauchen in der 4^{e} lineare Abbildungen und ein Jahr später affine Abbildungen auf. Der Hauptteil der Arbeit mit Funktionen findet erst in der 2^{de} statt. Der Funktionsbegriff wird dort definiert und eine Liste von „üblichen Funktionen“ gegeben, die auch in einfachen Zusammensetzungen auf Variationsverhalten und graphische Darstellung analysiert werden. (Programme France, 1985)

Funktionen werden in Frankreich also erstmals am Anfang des 20. Jahrhundert wegen ihrer physikalischen Anwendungen in der Schule eingeführt. Es wird ein besonderer Wert auf Variationsverhalten und graphische Darstellung gelegt. Die Funktionsdefinition wird eher in den Hintergrund gerückt. Im Laufe der Zeit werden immer mehr Funktionstypen in den Lehrplan aufgenommen und die Funktionsdefinition in frühere Klassenstufen gezogen.
Mit der *neue Mathematik* werden dann in den 70er Jahren Funktionen mit Hilfe von Relationen schon in der 4^{e} definiert. Es werden weniger Funktionstypen behandelt und der Variationsgedanke nicht so stark betont.
Schon mit den Lehrplänen von 1977 verschwindet die frühe Definition von Funktionen wieder und Anwendungen werden wieder in den Vordergrund gerückt. Eine breite Palette von Referenzfunktionen wird auf globales und lokales Verhalten hin untersucht.
Diese Entwicklung setzt sich 1986 fort. Ein erster Kontakt ab der 6^{e} mit realen Beispielen von funktionalen Zusammenhängen in ihren graphischen oder tabellarischen Darstellungsformen führt erst in der 2^{de} zur Definition des Funktionskonzepts und zur Betrachtung von anderen Funktionstypen, als linearen Funktionen.

Neben diesen Änderungen ist auch eine gewisse Konstanz in den Lehrplänen festzustellen. Lineare Zusammenhänge werden bis auf 1923 in der 3^{e} eingeführt und dort für die Lösung von linearen Gleichungssystemen genutzt. Antiproportionale Zusammenhänge tauchen meist erst ein Jahr später in der 2^{de} auf. Graphische Darstellungen und Variationsverhalten nehmen überall eine hervorgehobene Stellung in der Arbeit mit Funktionen ein.
Als Bruch mit der Tradition kann die späte Definition des Funktionsbegriffs ab den Lehrplänen von 1977 gewertet werden. Bis zu diesem Zeitpunkt wird die Funktionsdefinition vor oder mit der Behandlung von linearen Zusammenhängen in den Unterricht aufgenommen. In späteren Lehrplänen folgt die Definition erst ein Jahr nach den linearen Abbildungen.

	Bemerkung	4^{e}	3^{e}	2^{de}
1902	Lehrplan für stärksten Zweig; *Definition erst in 1^{re}*	Proportionale und antiprop. Größen	$y=ax+b$ $y=x^2$ $y=1/x$	$y=ax^2$ $y=ax+b/(a'x+b')$
1923		Proportionale und antiprop. Größen	Proportionale und antiprop. Größen	*Definition* $y=ax+b$

1945			*Definition* y=ax Lin. Gleichungssys Antiprop. Größen	y=ax+b y=a/x
1960		Zusammenhang zwischen Variablen	*Definition* y=ax+b Lin.Gleichungssys.	$y=ax^2+bx+c$ y=a/x
1969	Mengentheorie; 6e: einfache Beispiele von Relationen; 5e: Abbildungen	Zusammensetzung von Abbildungen Begriff *Funktion* mit Beispiel von Polynomen	y=ax+b Lin.Gleichungssys. nichtstetige, auf Intervallen definierte Funktionen	f(x)=a/x f(x)=|x|
1977	5e: Relationen, Abbildungen	Zusammensetzung von Abbildungen	Graphen Darstellung y=ax+b Lin.Gleichungssys.	*Definition* $x\to\|x\|$, $x\to x^2$, $x\to x^3$, $x\to\sqrt{x}$ und $x\to 1/x$
1986	Ab 6e: Explizit Arbeit mit Tabellen und Graphen	y=ax „en fonction de“ und „est fonction de“	y=ax+b „en fonction de“ und „est fonction de“	*Definition* $x\to\|x\|$, $x\to x^2$, $x\to x^3$, $x\to\sqrt{x}$ und $x\to 1/x$

Tabelle 10: Übersicht zur Lehrplanentwicklung in Frankreich

6.2.3 Vergleich der historischen Entwicklungen

Der Verlauf der historischen Einführung des Funktionsunterrichts in Deutschland und Frankreich ist, wie man sieht, weitestgehend parallel. In beiden Ländern werden Funktionen aus einem Anwendungsgedanken heraus am Anfang des 20. Jahrhunderts in die Lehrpläne aufgenommen. Nach einer Phase der Etablierung folgt in den 70er Jahren die *neue Mathematik* mit den früh als spezielle Relationen definierten Funktionen. Anfang der 80er Jahre kehren beide Ländern schrittweise der Mengentheorie den Rücken zu, um wieder mit der vollen Breite des Funktionsbegriffs und dessen Anwendungen zu arbeiten.
Funktionen sind also sowohl im deutschen als auch im französischen Mathematikunterricht ein Gebiet mit langer Tradition, in dem im Laufe der Zeit Erfahrung gesammelt und der gewählte Aufbau verfeinert werden konnte. Es entwickeln sich jeweils Traditionen bezüglich der zu behandelnden Inhalte, die in den heute gültigen Lehrplänen wieder gefunden werden können.
Bei allen Aussagen über die Entwicklungsmöglichkeiten der funktionalen Denkweise seit Anfang des 20. Jahrhunderts ist in beiden Ländern zu beachten, dass sich der Schulbesuch und Bildungszugang im Lauf des letzten Jahrhunderts verändert hat. Ein Bildungssystem, das sich gleichermaßen an alle Bevölkerungsschichten richtet hat sich erst dort voll entwickelt und findet heute seine volle Entfaltung in Konzepten wie der *mathematical literacy* von PISA.

Im restlichen Kapitel werden die aktuellen Lehrpläne von Bayern und Frankreich zu Funktionen in ihren Feinheiten analysiert und vor diesem Hintergrund miteinander verglichen.

6.3 Analyse und Vergleich der aktuellen intendierten Curricula

Im diesen Abschnitt werden zunächst die Lehrpläne der Hauptschule, Realschule und des Gymnasiums von Bayern von der 5. bis zur 10. Klasse in den Bereichen analysiert, die für die Entwicklung funktionalen Denkens ausschlaggebend sind. Eine analoge Analyse wird anschließend mit den französischen Lehrplänen von CM2 bis 2^{de} durchgeführt. Abschließend werden Ähnlichkeiten und Unterschiede im Inhalt und Aufbau der Lehrpläne dargestellt und eine tabellarische Übersicht gegeben.

In späteren Kapiteln dieser Arbeit werden die Leistungen deutscher und französischer Schüler verglichen und die Leistungsentwicklung der bayerischen Schüler analysiert. Dafür werden die Daten von PISA 2003 und von PALMA verwendet. Die Daten von PISA wurden im Frühjahr 2003 mit 15-jährigen Schülern erhoben. Die jährliche Erhebung der PALMA-Daten hat im Frühjahr 2002 in der 5. Klasse angefangen und 2006 die 9. Klasse erreicht.

In dieser Arbeit werden deswegen die zu den jeweiligen Testzeitpunkten gültigen Lehrpläne betrachtet. Dies sind in Frankreich Lehrpläne aus den Jahren 1995, 1997, 1998, 2001 und 2002 (Programme France école primaire, 1995; Programme France 6^{e} à 2^{de}, 1995-2001), in Bayern für die Hauptschule Lehrpläne aus dem Jahr 1997 (Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse 5 bis 10, 1997) und für das Gymnasium Lehrpläne aus dem Jahr 1989 (Lehrplan Bayern Gymnasium G9, 1989). Für die Mehrheit der bei der PISA 2003 getesteten bayerischen Realschüler ist der Lehrplan der inzwischen abgeschafften 4-stufigen Realschule von 1993 ausschlaggebend (Lehrplan Bayern Realschule R4, 1993), während bei den PALMA-Erhebungen bereits die neuen Lehrpläne der 6-stufigen Realschule aus den Jahren 2000 und 2003 gültig sind (Lehrplan Bayern Realschule Klasse 5 bis 10, 2000-2003). Da es sich bei PALMA, im Gegensatz zu PISA 2003, um eine rein bayerische Studie handelt, mit der auch der Einfluss der bayerischen Lehrpläne untersucht werden kann, liegt der Schwerpunkt der Analysen bayerischer Realschullehrpläne auf den aktuellen Lehrplänen von 2000 und 2003, wobei aber auf wichtige Änderungen gegenüber den Lehrplänen von 1993 hingewiesen wird. Es zeigt sich jedoch, dass die beiden Lehrpläne in sehr hohem Maße übereinstimmen (siehe Abschnitt 6.3.1.2).

Für einige Klassenstufen Frankreichs sind inzwischen neue Lehrpläne herausgegeben worden, die teilweise auch schon in Kraft getreten sind (Programme France CM2, 2002; Programme France 6^{e}, 2004; Programme France 5^{e} et 4^{e}, 2005; Programme France Collège Projet, ohne Jahr). Dies ist auch für die bayerischen Hauptschulen und das neu eingeführte 8-stufige Gymnasium der Fall (Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse 5-M10, 2004; Lehrplan Bayern Gymnasium Klasse 5 bis 10, 2004-ohne Jahr). Wichtige in ihnen enthaltene Änderungen, die die funktionale Denkweise betreffen, werden ebenso wie die von der Kultusministerkonferenz beschlossenen Bildungsstandards (Bildungsstandards Hauptschulabschluss, 2004; Bildungsstandards Realschulabschluss, 2003) in Ausblicken nach den jeweiligen Analysen zusammengefasst.

Die intendierte Curricula werden in folgenden Schritten analysiert. Zuerst werden die äußere Form und der Aufbau des jeweiligen Lehrplans betrachtet. Nachdem die zentralen Inhalte für die Ausbildung der funktionalen Denkweise für jede Klassenstufe separat dargestellt und analysiert wurden, wird der Lehrplan für eine Schulart zusammenfassend in einer Übersicht präsentiert.

6.3.1 Intendiertes Curriculum von Bayern

Der Lehrplan der bayerischen Grundschule sieht unter anderem vor, dass Schüler lernen Informationen aus Tabellen, Diagrammen und Schaubildern zu entnehmen, gerundete Zahlen in Säulendiagrammen darzustellen und mit einfachen Maßstäben (z.B. 1:2; 1:10; 1:50; 1:100) umzugehen (Lehrplan Bayern Realschule 5, 2000). Die im Folgenden betrachteten Lehrpläne der Sekundarstufe I bauen auf diesem Vorwissen auf.

6.3.1.1 Hauptschule

Aufbau des Lehrplans der Hauptschule

Der Lehrplan von 1997 für die Sekundarstufe I an der bayerischen Hauptschule (Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse 5 bis 10, 1997) enthält pro Jahrgangsstufe zwei Seiten mit Aufzählungen von Inhalten, die die Schüler am Ende des Schuljahres beherrschen sollen. Diese sind in Teilbereiche wie etwa Geometrie, Brüche oder Zuordnungen zusammengefasst. Die Teilbereiche werden von kurzen Sätzen eingeleitet, die globale Ziele (z.B.: Sicherheit und Geläufigkeit beim Rechnen, tiefes Verständnis des Prozentbegriffs) definieren, etwas detaillierter Hinweise zum Umgang mit den Inhalten geben, Verbindungen zur Realität herstellen, oder Weiteres, wie die Benutzung von Taschenrechnern, regeln. Es werden keine Aufgabenbeispiele oder Kommentare zur Wahl der Inhalte angeboten.
In allen Klassenstufen sind pro Woche fünf Schulstunden Mathematikunterricht vorgesehen, außer in der 8. Klasse, wo es nur vier sind.

Lehrplan der 5. Klasse

In der 5. Klasse sollen Schüler Schaubildern mit größeren Zahlen deuten und erstellen können. Sie arbeiten mit einfachen Gleichungen der Form $ax+b=c$ (mit ganzen Zahlen a, b und c) und lernen mit Maßstäben umzugehen. (Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse 5, 1997)

Aufbauend auf den Kenntnissen der Grundschule werden die Schüler langsam an die Arbeit in den verschiedenen Darstellungsregistern herangeführt. Übersetzungsprozesse finden vor allem mit der Realität statt. Erste Begegnungen mit funktionalen Situationen, wie dem Umgang mit Maßstäben, werden intensiviert.
Es sei hier daran erinnert, dass in dieser Arbeit unter Realität ein Realmodell verstanden wird, bei dem schon wesentliche Vereinfachungen der Realsituation durchgeführt wurden (siehe Abschnitt 3.2.1). Die Arbeit mit solchen, vereinfachten Situationen ist in Mathematikunterricht von Deutschland und Frankreich üblich.

Lehrplan der 6. Klasse

In der 6. Klasse arbeiten die Schüler weiter mit Termen und Gleichungen, die sie auch aus Sachzusammenhängen und Aufgaben entnehmen und mit Hilfe von anschaulichen Modellen, zeichnerischen Darstellungen und Tabellen lösen. Sie lernen auch allgemein Informationen in

Zeit- und Streckenplänen, Tabellen, Schaubilder und ähnlichen Materialen zu erkennen und diese mathematisch aufzubereiten. (Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse 6, 1997)

Mit der Arbeit mit Gleichungen, Schaubildern, Tabellen und der Einbeziehung von realen Sachzusammenhängen werden alle Darstellungsregister, wenn auch in vereinfachten Formen, benutzt. Übersetzungen zwischen den Registern werden eingeführt, wobei diese hauptsächlich die Formeldarstellung als Ziel haben.

Lehrplan der 7. Klasse

In der 7. Klasse taucht erstmals ein Teilbereich auf, der in der Überschrift Bezug auf funktionale Situationen nimmt, nämlich auf Zuordnungen. Die Schüler sollen aus Sachzusammenhängen Zuordnungen ableiten, diese untersuchen und in Tabellen, Schaubildern und Koordinatensystemen darstellen. Der Schwerpunkt liegt dabei auf proportionalen Zuordnungen, die von den Schülern als solche erkannt und in allen Darstellungsregistern untersucht werden. Darstellungen als Formel stehen dabei im Vordergrund, während Darstellungen aus anderen Registern zur Ermittlung fehlender Größen herangezogen werden.
In anderen Teilbereichen wird das Ansetzen von Termen und der Umgang mit ihnen weiter gefestigt und mit der Prozentrechnung und den dabei gesehenen Anwendungsaufgaben (z.B.: Preissenkung, Mehrwertsteuer) weitere funktionale Situationen im Unterricht untersucht. (Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse 7, 1997)

Die Arbeit in allen Darstellungsregistern wird fortgeführt, wobei die Formeldarstellung und Übersetzung mit ihrer Beteiligung weiterhin einen zentralen Platz einnehmen. Mit proportionalen Zuordnungen werden erstmals explizit bestimmte Funktionen betrachtet, wobei die Zuordnungs-Grundvorstellung im Vordergrund zu stehen scheint.

Lehrplan der 8. Klasse

In der 8. Klasse werden zusätzlich zu proportionalen Zuordnungen auch die Eigenschaften umgekehrt proportionaler Zuordnungen betrachtet und fehlende Werte berechnet. Schüler sollen anhand von Sachsituationen aus ihrem Lebens- und Erfahrungsbereich Zusammenhänge zwischen zugeordneten Größen erkennen. Sie gewinnen mit Hilfe von Schaubildern, die sie kritisch lesen, zeichnen und interpretieren sollen, eine anschauliche Vorstellung von diesen Zusammenhängen.
Dem Erstellen und Lösen von Gleichungen wird weiterhin große Bedeutung eingeräumt. (Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse 8, 1997)

Mit den umgekehrt proportionalen Zuordnungen wird ein weiterer Funktionstyp eingeführt, ohne dass eine Definition von Funktionen gegeben wurde. Die intensive Arbeit mit der Formeldarstellung und den Übersetzungen von Realsituationen wird fortgesetzt. Dem Umgang mit graphischen Darstellungen wird mehr Raum eingeräumt, wohingegen die tabellarische Darstellung nicht explizit erwähnt wird. Die Forderung nach dem Erkennen von Zusammenhängen zwischen Größen deutet auf eine verstärkte Beschäftigung mit der Kovariations-Grundvorstellung hin.

Lehrplan der 9. Klasse

In der 9. Klassen wird der Teil des Lehrplans, der funktionales Denken betrifft, unter anderem zugunsten von Statistik reduziert. Die Schüler arbeiten weiter mit proportionalen und umgekehrt proportionalen Zuordnungen in realistischen Sachzusammenhängen. Sie betrachten funktionale Abhängigkeiten auch mit Hilfe Tabellenkalkulationsprogrammen und sie sollen im Zusammenhang mit der Einführung von Quadratwurzeln den funktionalen Zusammenhang zwischen der Fläche und der Seitenlänge von Quadraten studieren. Im Rahmen der Prozent- und Zinsrechnung treten funktionale Situationen mit prozentualem Wachstum auf. Wie schon in den Vorjahren werden immer anspruchsvollere Gleichungen angesetzt und gelöst. (Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse 9, 1997)

In dieser Jahrgangsstufe kommen kaum neue Inhalte im Bereich funktionalen Denkens hinzu. Abgesehen von den im Zusammenhang mit Quadratwurzel betrachteten quadratischen bzw. Wurzelfunktionen und den Tabellenkalkulationen, die der tabellarische Darstellung wieder mehr Gewicht verleihen, handelt es sich im Wesentlichen um eine verkürzte Wiederholung der schon in der 8. Klasse behandelten Inhalte.

Lehrplan der 10. Klasse

Die 10. Klasse wird an der Hauptschule nur noch von den Schülern besucht, die die Mittlere Reife anstreben. Am Anfang des Schuljahres 2002/2003 besuchten 58.600 Schüler die 9. Klassen bayerischer Hauptschulen. In den 10. Klassen waren es 7.600 Schüler (Bayerisches Landesamt für Statistik und Datenverarbeitung).
In der 10. Klasse sehen die Schüler zum ersten Mal den Funktionsbegriff. Aufbauend auf den Erfahrungen, die sie mit Zuordnungen gewonnen haben, lernen sie den Umgang mit funktionalen Situationen so weit, dass sie diese mit Hilfe von Funktionen untersuchen und klären können.
Mit linearen und quadratischen Funktionen werden neue Funktionstypen hinzugenommen. Diese werden in allen Darstellungsregistern untersucht und bei der Parabel auch die Scheitelpunktform angegeben. Im Rahmen der Arbeit mit diesen Funktionen sollen Schüler lineare Gleichungssysteme und quadratische Gleichungen kennen lernen und diese sowohl rechnerisch als auch graphisch lösen. Dabei werden beide Lösungsmethoden verglichen. Funktionale Zusammenhänge tauchen auch in der Geometrie und bei der Arbeit mit Potenzen auf. Die Schüler erfahren, dass die trigonometrischen Funktionen für Berechnungen in rechtwinkligen Dreiecken von großer Nützlichkeit sind und betrachten exponentielles Wachstum in Anwendungsaufgaben. (Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse 10, 1997)

In der letzten Hauptschulklasse, die nur noch von einem kleinen Teil der Schüler besucht wird, werden erstmals Funktionen definiert. Neue Funktionstypen werden untersucht und für die Lösung von Gleichungssystemen genutzt. Dadurch gewinnen die Formeldarstellung, die graphische Darstellung und Übersetzungen zwischen ihnen an Bedeutung.
Trigonometrische Funktionen werden nur als Werkzeug in der Geometrie genutzt und exponentielle Funktionen treten ausschließlich in Anwendungsaufgaben auf, wobei auch nicht von exponentiellem Funktionen die Rede ist, sondern von prozentualem Wachstum. In beiden Fällen wird besonders die Zuordnungs-Grundvorstellung angesprochen.

Übersicht über die Lehrpläne der Hauptschule

In den Lehrplänen der bayerischen Hauptschule tritt der Funktionsbegriff erstmals in der 10. Klasse auf, die nicht mehr von allen Schülern besucht wird. Davor wird mit einem starken Bezug zur Realität erst mit den Darstellungsregistern an sich, dann mit proportionalen Zuordnungen und schließlich mit umgekehrt proportionalen Zuordnungen gearbeitet. Es treten auch Beispiele anderer funktionaler Zusammenhänge auf, ein Studium von quadratischen, trigonometrischen oder exponentiellen Funktionen ist jedoch nicht vor dem qualifizierten Hauptschulabschluss vorgesehen. Die Formeldarstellung und die Zuordnungs-Grundvorstellung spielen bei der Arbeit mit allen Funktionstypen eine zentrale Rolle.

Etwa die Hälfte der bayerischen Schüler besucht die Hauptschule (siehe Abschnitt 6.1.2.1). Die breite Mehrheit von ihnen beendet ihre Schullaufbahn ohne zu wissen was Funktionen sind und mit einem sehr eingeschränkten Repertoire an untersuchten funktionalen Situationen. Die Analyse des potentiellen Curriculums wird weitern Aufschluss darüber geben, inwieweit mit diesen Einschränkungen die Ausbildung von funktionalem Denken möglich ist.

Im folgenden Abschnitt wird der Lehrplan der bayerischen Realschule betrachtet. Um dem Leser eine Übersicht über die Entwicklung der Inhalte in den Lehrplänen zu geben und um bereits bei der Lektüre einen Vergleich zwischen den Lehrplänen zu ermöglichen ist die Entwicklung der Inhalte am Ende dieses Kapitels eine tabellarische Übersicht dargestellt.

6.3.1.2 Realschule

Aufbau des Lehrplans der Realschule

Der Aufbau des Lehrplans für die bayerische Realschule aus den Jahren 2000 bzw. 2003 (Lehrplan Bayern Realschule Klassen 5 bis 10, 2000 bzw. 2003) unterscheidet sich wenig vom Aufbau des Hauptschullehrplans. Auf etwa drei Seiten pro Jahrgangsstufe werden die zu behandelnden Inhalte in Teilbereiche unterteilt und jeweils nach einigen einleitenden Sätzen in Stichpunkten aufgezählt. Dabei wird zu den einzelnen Teilbereichen die Anzahl der Schulstunden angegeben, die für die Arbeit mit ihnen verwendet werden soll.
Ab der 7. Klasse können Realschüler zwischen drei Schulzweigen wählen (siehe Abschnitt 6.1.2.1). Aus diesem Grund kommen ab der 7. Jahrgangsstufe zusätzlich zu den drei Seiten Lehrplan, die für den ersten, mathematisch-technischen Zweig gültig sind, noch zwei weitere Seiten hinzu, auf denen die Inhalte für die beiden anderen Zweige angegeben werden (die Mathematiklehrpläne des zweiten und dritten Zweiges unterscheiden sich nicht).
Ein Unterschied zum Lehrplan der Hauptschule stellt im Lehrplan der 5. Klasse die Zusammenfassung der Inhalte der Grundschule dar, auf denen im Folgenden aufgebaut wird. Außerdem wird der Lehrplan jeder Jahrgangsstufe durch einige Sätze eingeleitet und anschließend werden dessen wichtigste Ziele in einer Aufzählung hervorgehoben. Diese werden dabei als Grundwissen zusammengefasst, über das die Schüler am Ende der jeweiligen Jahrgangsstufe verfügen sollen.
Wie im Hauptschullehrplan werden auch hier keine Aufgabenbeispiele oder Kommentare zur Wahl der Inhalte angeboten.
In der 5. und 6. Klasse sind fünf Wochenstunden Mathematikunterricht an den Realschulen

vorgesehen. Ab der 7. Klasse wird nach Zweigen unterschieden. Im mathematisch-technischen Zweig sind es in der 7. und 8. Klasse vier Wochenstunden in der 9. und 10. Klasse fünf. In den beiden anderen Zweigen sind dahingegen nur drei Wochenstunden Mathematikunterricht von der 7. bis zur 9. Klasse angesetzt und in der 10. Klasse vier Wochenstunden.

Lehrplan der 5. Klasse

In der 5. Klasse erfahren, verstehen und üben Schüler anhand von Anwendungssituationen wie man Größen misst und darstellt, und erlernen den Umgang mit Maßstäben. Sie bereiten außerdem mit einfachen Dreisatzaufgaben in Sachzusammenhängen die Arbeit mit Proportionalitäten und Zuordnungen in späteren Klassenstufen vor. (Lehrplan Bayern Realschule Klasse 5, 2000)

Die Schüler werden in dieser Klassenstufe langsam auf die Arbeit mit funktionalen Situationen vorbereitet. Dabei stehen realitätsnahe Aufgabestellungen im Vordergrund und es werden erste Arbeiten mit der graphischen und der algebraischen Darstellung durchgeführt.

Lehrplan der 6. Klasse

In der 6. Klasse findet sich ein Teilbereich *direkte Proportionalität* im Lehrplan. Darin wird gefordert, dass die Schüler die direkte Proportionalität an geeigneten Beispielen aus ihrem Erfahrungsbereich entdecken. Sie arbeiten mit deren tabellarischen und graphischen Darstellung und ermitteln fehlende Größen. Dabei lernen sie den Proportionalitätsfaktor kennen. Diese neu gewonnen Kenntnisse vertiefen sie mit Aufgaben zum Prozentbegriff.
Des Weiteren wird im Teilbereich *Gleichungen und Ungleichungen* die Arbeit mit Termen fortgeführt. Die Schüler erkennen, dass einem Term bei jeder Belegung ein Termwert zugeordnet ist, lösen Gleichungen der Form $ax+b=c$ und lernen den Umgang mit Grundmenge (Definitionsmenge) und Lösungsmenge. Auch hier wird mit graphischen und tabellarischen Darstellungen gearbeitet. (Lehrplan Bayern Realschule Klasse 6, 2000)

In dieser Jahrgangstufe beginnt verstärkt die Arbeit mit funktionalen Zusammenhängen und ihren Darstellungen. Die beiden Kapitel die sich auf funktionale Denkweise beziehen, machen 15 (direkte Proportionalität) und 18 Stunden (Gleichungen und Ungleichungen) der insgesamt 140 angesetzten Mathematikstunden aus.
Sämtliche Darstellungen werden genutzt und es besteht eine starke Anbindung an Realsituationen, die durch offene Aufgaben und Aufgabenvariationen noch verstärkt wird. Mit Behandlung des Prozentbegriffs innerhalb des Teilbereiches mit der Überschrift *direkte Proportionalität* wird dessen Anbindung an die funktionale Denkweise deutlich. Die Einführung von Grund- und Lösungsmenge bereitet die Relationenlehre in späteren Jahrgangstufen vor.

Lehrplan der 7. Klasse

Die 7. Jahrgangsstufe ist die erste, in der im Mathematiklehrplan der Realschulen nach Zweigen unterschieden wird. Die Inhalte mit Bezug auf die funktionale Denkweise sind jedoch identisch, so dass in dieser Arbeit nicht weiter unterschieden werden muss.
Die Schüler sollen in dieser Jahrgangsstufe ihre Kenntnisse über direkte Proportionalität an geeigneten Anwendungsbeispielen festigen und Einblicke in die indirekte Proportionalität und

ihre Merkmale erhalten. Insbesondere soll auf die Quotienten- bzw. Produktgleichheit der jeweiligen Wertepaare eingegangen werden und fehlende Größen berechnet werden. Das graphische und das tabellarische Register dienen zur Darstellung der Proportionalitäten, aber auch zur Ermittlung graphischer Lösungen von Sachaufgaben. In diesem Teilbereich *Proportionalitäten* wird, wie in der 5. Klasse, die Prozentrechnung zur Vertiefung des Wissens behandelt und noch dazu einfache Zinsrechnung eingeführt. Hinzu kommen mit Umfang und Flächeninhalt von Kreisen Anwendungen aus der Geometrie.
Wie schon in der 5. Klasse findet sich auch hier ein Teilbereich *Gleichungen und Ungleichungen,* in dem festgelegt wird, dass die Schüler ihre Arbeit mit Termen und Gleichungen fortsetzen, graphische und tabellarische Darstellungen nutzen und in Sachaufgaben mit offenen Aufgaben und Aufgabenvariationen arbeiten sollen. (Lehrplan Bayern Realschule Klasse 7, 2003)

In dieser Jahrgangsstufe wird die Arbeit mit proportionalen Situationen vertieft und die indirekte Proportionalität neu eingeführt. Beide Zweige haben in diesem Bereich identische Inhalte. Allerdings steht in den nichtmathematischen Zweigen 1 Schulstunde mehr für deren Behandlung zur Verfügung, obwohl die Gesamtzahl der Mathematikstunden dort nur 84 statt der 112 im ersten Zweig beträgt.
Darstellungen aus allen Registern werden genutzt und es wird auf Anbindung an die Realität geachtet. Bei Übersetzungen scheint die Formeldarstellung neben der Realität wichtigster Ausgangspunkt zu sein, während die anderen Register zu Darstellungszwecken und zum Lösen von Aufgaben gebraucht werden. Durch die Betrachtung von Wertepaaren wird mehr die Zuordnungs-Grundvorstellung als die Kovariations-Grundvorstellung angesprochen. Es ist aber noch nicht von der systematischen Betrachtung von Zusammenhängen oder Zuordnungen die Rede.

Lehrplan der 8. Klasse

In der 8. gibt es erstmals große Unterschiede zwischen den Zweigen im Lehrplan zu funktionalem Denken.
Im mathematisch technischen Zweig erscheinen drei Teilbereiche mit dem Wort Funktionen im Titel, nämlich *Funktionen*, *Lineare Funktionen* und *Funktionen der indirekten Proportionalität*. Die Schüler sollen anhand praktischer Beispiele Funktionen als besondere Relationen kennen lernen. Daher arbeiten sie mit Produktmengen und mit Definitions- und Wertemengen. Funktionen werden durch Wertetabellen, Graphen, Gleichungen und verbale Vorschriften festgelegt. Es sollen Funktionswerte und Nullstellen ermittelt und die Funktionsgraphen auch mit Hilfe graphikfähiger Taschenrechner untersucht werden. Umkehrfunktionen werden mit Hilfe von Umkehrrelationen eingeführt.
Als spezielle Funktionen sollen lineare Funktionen und Funktionen der indirekten Proportionalität behandelt werden. Geradenbüschel und Parallelenscharen verdeutlichen die Einfluss der Parameter m und t der Geradengleichung $y=mx+t$. Auch Gleichungen achsenparalleler Geraden werden gezeigt, was Problemen mit konstanten Funktionen vorbeugen soll. Die Untersuchung der Graphen erlaubt im Fall der indirekt proportionalen Funktionen das Studium der Asymptoten.
Es gibt auch weiterhin einen Teilbereich *Terme,* der sich unter anderem mit der Formeldarstellung funktionaler Zusammenhänge beschäftigt. Die Schüler sollen als

Vorbereitung des Funktionsbegriffs erkennen, dass jeder Belegung von Variablen in Termen ein Termwert zugeordnet ist. Sie arbeiten mit quadratischen Termen der Form ax^2+bx+c und entwickeln Verfahren um deren Extremwerte rechnerisch zu bestimmen. Dabei wird auf die Bearbeitung praxisorientierter Aufgaben Wert gelegt.

Schüler der beiden anderen Zweige betrachten in dieser Klassenstufe noch keine Funktionen. Ihr Mathematiklehrplan beschränkt sich im Bereich funktionales Denken auf den soeben beschriebenen Teilbereich *Terme*. (Lehrplan Bayern Realschule Klasse 8, 2000)

In dieser Jahrgangsstufe wird für einen Teil der Schüler der Funktionsbegriff eingeführt, wobei ein starker Einfluss der Mengentheorie ausgemacht werden kann. 27 der 112 im mathematischen-technischen Zweig angesetzten Mathematikstunden beziehen sich direkt auf die Arbeit mit Funktionen, 22 weitere auf den Teilbereich *Terme*. Funktionen werden wie währen der Reform der *modernen Mathematik* Ende der 60er Jahre (siehe Abschnitt 6.2.1) als spezielle Relationen eingeführt, was den Platz, den Definitions- und Wertemenge im Lehrplan einnehmen, erhöht. Trotz der expliziten Betrachtung linearer und indirekt proportionaler Funktionen in allen Darstellungsregistern dominiert dennoch die Formelschreibweise, die im Detail untersucht wird. Dabei werden auch quadratische Funktionen behandelt, was allerdings ohne Bezug auf andere Darstellungsformen und nur mit der Zuordnungs-Grundvorstellung geschieht. Übersetzungen finden oft zwischen dem algebraischen Register und dem graphischen Register statt, wo Auswirkungen von Änderungen in der Formelschreibweise untersucht werden sollen. Der Platz, der der Arbeit mit Realsituationen eingeräumt wird, ist weniger groß, als in den vorangegangenen Jahrgangsstufen.

Während die Schüler des mathematisch-technischen Zweiges eine große Fülle an neuen Inhalten mit Bezug zu funktionalem Denken kennen lernen, vertiefen die Schüler der beiden anderen Zweige lediglich ihr Verständnis von Termen.

Lehrplan der 9. Klasse

Der Lehrplan der 9. Klasse sieht im mathematisch-technischen Zweig vor, die Arbeit mit Funktionen durch die Betrachtung von quadratischen Funktionen der Form $y=ax^2+bx+c$ zu vertiefen. Dabei wird neben der Arbeit in mit der Formeldarstellung (Scheitelpunktform, Schargleichungen) besonderen Wert auf graphische Darstellungen gelegt. Auswirkungen von Änderungen von Parametern der Formeldarstellung werden an Graphen untersucht und Gleichungen zu geometrisch erzeugten Parabeln ermittelt. Dabei erleichtern graphikfähige Taschenrechner die Arbeit.
Außerdem sollen Extremwertprobleme bearbeitet und mit Hilfe von Überlegungen zu Umkehrrelationen die Wurzelfunktion eingeführt werden.
Außerhalb des Teilbereiches zu quadratische Funktionen werden Systeme linearer und quadratischer Gleichungen behandelt. Die Schüler sollen dabei graphische und algebraische Lösungen finden. Außerdem wird auch in den geometrischen Teilbereichen, die sich mit Umfang-, Flächen- und Volumenberechungen beschäftigen, die Berücksichtigung funktionaler Abhängigkeiten gefordert.

Die Schüler der beiden anderen Zweige lernen in der 9. Klasse Funktionen erstmals kennen. Die Einführung geschieht analog zu der in der 8. Klasse im mathematisch-technischen Zweig über Relationen. Allerdings werden keine Umkehrfunktionen und Funktionen der indirekten

Proportionalität behandelt und die Zeit, die für die Teilbereiche die sich mit Funktionen beschäftigen vorgesehen ist, ist mit 18 statt 25 Stunden (Zeit für Funktionseinführung und lineare Funktionen in der 8. Klasse im mathematisch-technischen Zweig) deutlich beschränkt. Funktionale Abhängigkeiten sollen wie im mathematisch-technischen Zweig bei der Berechnung von Flächeninhalten berücksichtigt werden. Bei der Arbeit mit Termen lösen die Schüler dieser Zweige Systeme mit zwei linearen Gleichungen sowohl algebraisch als auch graphisch. Sie lernen noch keine quadratischen Terme kennen. (Lehrplan Bayern Realschule Klasse 9, 2003)

In dieser Jahrgangsstufe wird im mathematisch-technischen Zweig die Arbeit mit Funktionen durch die Einführung der quadratischen Funktionen vertieft. Im zweiten und im dritten Zweig wird der Funktionsbegriff eingeführt und es werden lineare Funktionen betrachtet. Von den 140 vorgesehenen Mathematikstunden im ersten Zweig sollen sich 18 mit quadratischen Funktionen und 43 mit linearen und quadratischen Gleichungen beschäftigen. In den beiden anderen Zweigen sind von 84 Mathematikstunden 18 für Funktionen und 12 für Systeme linearer Gleichungen vorgesehen.
Die graphische Darstellung wird hier deutlich mehr betont als in den Jahren zuvor. Übersetzungen zwischen dem algebraischen und dem graphischen Register stehen im Vordergrund, wohingegen funktionale Zusammenhänge in Realsituationen nicht mehr explizit im Lehrplan auftauchen. Stattdessen findet eine Vernetzung mit der Geometrie statt. Der Einfluss der Mengentheorie scheint im Gegensatz zum Lehrplan der 9. Klasse stark begrenzt worden zu sein und taucht nur im Zusammenhang mit Umkehrrelationen bzw. mit Umkehrfunktionen auf.
Da verstärkt mit Darstellungen aus dem graphischen Register gearbeitet wird und Extremwertprobleme bearbeitet werden sollen kann davon ausgegangen werden, dass die Kovariations-Grundvorstellung in stärkerem Maße als in früheren Jahrgangsstufen angesprochen wird.

Die Inhalte der anderen Zweige wurden in der 8. Klasse des mathematisch-technischen Zweiges behandelt, weswegen Ausführungen dazu dort nachgelesen werden können.

Lehrplan der 10. Klasse

Die Schüler des mathematisch-technischen Zweiges sollen in der 10. Klasse eine ganze Reihe neuer Funktionen kennen lernen. Potenzfunktionen der Form $y = x^{\frac{m}{n}}$ werden mit ihren Umkehrfunktionen untersucht, wobei insbesondere deren Graphen betrachtet werden. Weiter sollen die Schüler Exponential- und Logarithmusfunktionen (letztere als Umkehrfunktion der ersten) der Formen $y = a \cdot b^{x+c} + d$ bzw. $y = a \cdot \log_b(x+c) + d$ für das Erfassen und Darstellen von Wachstums- und Abklingprozessen nutzen. Bei den beiden letzten Funktionstypen soll auf eine starke Anbindung an Realsituationen geachtet werden. Dabei werden bei allen Funktionen auch Arbeiten wie Verschiebungen und Spiegelungen im graphischen Register durchgeführt. Zu Darstellungszwecken sollen graphikfähige Taschenrechner benutzt werden.
Funktionale Abhängigkeiten werden zusätzlich im Rahmen der Geometrie bei Berechnungen im Dreieck und bei der dort verankerten Betrachtung trigonometrischer Funktionen gesehen.

Diese werden allerdings nur sehr kurz studiert, wobei viel Wert auf die graphische Darstellung gelegt wird.

Die Schüler der beiden anderen Zweige beschäftigen sich in dieser Jahrgangsstufe so mit quadratischen Funktionen, wie es im mathematisch-technischen Zweig ein Jahr zuvor getan wurde. Allerdings werden keine Umkehrrelationen bzw. Umkehrfunktionen erwähnt, was bedeutet, dass Wurzelfunktionen nicht behandelt werden. Ebenso findet kein Studium von Parabelscharen statt.
Dazu kommen die Betrachtung von Funktionen der indirekten Proportionalität (analog zur Betrachtung in der 8. Klasse des mathematisch-technischen Zweiges) und Beispiele für Exponentialfunktionen mitsamt deren Definition und Graphen. Die Arbeit mit diesen Funktionstypen fallen jedoch weit weniger ausführlich als im ersten Zweig aus, wo statt der insgesamt sieben hier geplanten Stunden 19 Stunden in der 10. Klasse für Exponential- und Logarithmusfunktionen und zwei Stunden in der 8. Klasse für Funktionen der indirekten Proportionalität vorgesehen sind.
Das Studium der quadratischen Funktionen wird durch den Teilbereich unterstützt, der sich mit quadratischen Gleichungen beschäftigt. Dort werden algebraische und graphische Lösungen von quadratischen Gleichungen bestimmt und Koordinaten der Schnittpunkte von Gerarden und Parabeln berechnet.
Funktionale Abhängigkeiten treten außerdem bei Berechnungen am Kreis und in der Raumgeometrie auf. Von den in der Geometrie genutzten trigonometrischen Funktionen werden nur die Graphen vorgestellt, ohne sie weiter zu untersuchen. (Lehrplan Bayern Realschule Klasse 10, 2003)

In der letzten Jahrgangsstufe der Realschule werden im mathematisch-technischen Zweig viele neue Funktionstypen eingeführt. In den beiden anderen Zweigen wird das Studium der Funktionen durch die Einführung von quadratischen Funktionen und Funktionen der indirekten Proportionalität, sowie durch Beispiele exponentieller und trigonometrischer Funktionen abgerundet. Im ersten Zweig beziehen sich 35 der geplanten 120 Mathematikstunden direkt auf die Arbeit mit Funktionen, während es in den anderen Zweigen 22 von insgesamt 96 Stunden sind. Dort entfallen noch 20 weitere Stunden auf das Studium von quadratischen Gleichungen. Wie schon in der vorangegangenen Klassenstufe werden funktionale Zusammenhänge auch in der Geometrie betrachtet werden, was zu einer Vernetzung des gesamten Mathematikunterrichts beiträgt.
Mit den Beispielen zu Exponentialfunktionen treten wieder Anbindungen an die Realität auf, wobei die Kovariations-Grundvorstellung am stärksten angesprochen wird. Beim Studium der Potenzfunktionen steht allerdings das Wechselspiel zwischen dem algebraischen und graphischen Register im Mittelpunkt.

Übersicht über die Lehrpläne der Realschule

Bei der Analyse des Realschullehrplans ist klar zwischen dem mathematischen-technischen Zweig, den etwa 20% der Realschüler besuchen (siehe Abschnitt 6.1.2.1.), und den beiden anderen Zweigen zu unterscheiden. Bis in die 7. Klasse sind die Lehrpläne im Bereich funktionalen Denkens gleich, doch ab der 8. Klasse erinnert die Entwicklung im ersten Zweig an den Lehrplan des Gymnasiums (siehe Abschnitt 6.3.1.3), während die beiden anderen

Zweige nur wenig mehr Inhalte behandeln als in der Hauptschule vorgesehen sind (siehe Abschnitt 6.3.1.1). So erfahren Schüler der beiden letzten Zweige nichts von Funktionen höheren Grades als zwei, Wurzel- oder Logarithmusfunktionen und betrachten nur Beispiele von Exponentialfunktionen. Da die Realschule nach der 10. Jahrgangstufe endet, steht diesen Schülern nur eine begrenzte Basis für die Ausbildung der funktionalen Denkweise zur Verfügung.
In den niedrigen Klassenstufen wird gefordert alle Darstellungsregister bei der Arbeit mit funktionalen Situationen zu nutzen und stets auf realitätsnahe Aufgaben zu achten. In den höheren Klassenstufen stehen dann allerdings das algebraische und das graphische Register und Übersetzungen zwischen ihnen stark im Mittelpunkt. Auch die Anbindung an Realsituationen wird weit weniger oft betont. Eine genaue Analyse der angesprochenen Grundvorstellungen wird erst mit der Betrachtung des potentiellen Curriculums möglich, aber dennoch scheint die Kovariations-Grundvorstellung verstärkt in höheren Klassenstufen angesprochen zu werden, während sich die Arbeit mit der Zuordnungs-Grundvorstellung durch den gesamten Lehrplan zieht. Wie erwartet (siehe Abschnutt 3.1.4) sind keine Hinweise auf die Nutzung der Objekt-Grundvorstellung zu finden.
Als Besonderheit des Realschullehrplans ist die mengentheoretische Einführung des Funktionsbegriffs zu werten. Deren Einfluss ist im mathematisch-technischen Zweig größer als in den beiden anderen Zweigen. (Die starke Nutzung der Mengentheorie ist auch nicht für deutsche Realschullehrpläne typisch und stellt eine bayerische Besonderheit dar).

Rückblick auf die 4-stufige Realschule

Die Schüler, die an der PISA-Erhebung von 2003 teilgenommen haben wurden nicht nach dem soeben analysierten Lehrplan unterrichtet (siehe Abschnitt 6.3). Zu diesem Zeitpunkt gab es in Bayern noch eine 4-stufige Realschule. Die Schüler, die die Realschule besuchen wollten, gingen in der 5. und 6. Klasse auf eine Hauptschule, da Realschulen erst mit der 7. Klasse begannen. Die Lehrpläne der Realschule von 1993 entsprechen allerdings sehr hohem Maße den hier analysierten Lehrplänen. Aufbau, Teilgebiete und Inhalte wurden teilweise wörtlich übernommen.
Es fällt aber auf, dass der Einfluss der Mengentheorie in diesem Lehrplan noch deutlich größer ist. Funktionen werden beispielsweise als rechtseindeutige Relationen eingeführt und das mengentheoretische Vokabular wird länger verwendet.
Die vorgesehene Anzahl von Mathematikstunden, die für Inhalte zu funktionalem Denken genutzt werden soll, wurde im neuen Lehrplan meist um einige Stunden erhöht. Lediglich für die Einführung von Funktionen mit Hilfe von Relationen ist im Lehrplan von 1993 mehr Zeit vorgesehen als in dem von 2000 bzw. 2003.
Als weitere wichtige Umgestaltung ist zu nennen, dass im Lehrplan des zweiten und dritten Zweiges bei der Erneuerung des Lehrplans die Einführung von zwei Funktionstypen geändert wurde. Funktionen der indirekten Proportionalität wurden 1993 statt jetzt in der 10., schon in der 9. Klasse eingeführt und Wurzelfunktionen wurden als Umkehrung quadratischer Funktionen in der 10. Klasse betrachtet. Letztere sind im Lehrplan von 2003 überhaupt nicht mehr vorgesehen.
Ansonsten sind keine weiteren wichtigen Änderungen auszumachen. (Lehrplan Bayern Realschule R4, 1993)

6.3.1.3 Gymnasium

Aufbau des Lehrplans des Gymnasiums

Der Mathematiklehrplan für das bayerische Gymnasium aus dem Jahr 1989 (Lehrplan Bayern Gymnasium G9, 1989) unterscheidet sich im Aufbau etwas von den Lehrplänen der Haupt- und Realschule. Die zu behandelnden Inhalte werden auf drei bis vier Seiten pro Jahrgangsstufe aufgezählt, wobei in der 9. und 10. Klasse noch eine Seite pro Wahlpflichtfach (siehe unten) hinzukommt.
Für jeden Teilbereich werden zunächst die Ziele in einleitenden Sätzen beschrieben. Danach werden die Inhalte in zwei Spalten dargestellt, wobei die linke den Themenbereich stichpunktartig eingrenzt (z.B. Prozentbegriff, rechtwinkliges Dreieck, Umkehrbarkeit von Potenzfunktionen) und die rechte Präzisierungen der Inhalte und geforderte Fähigkeiten enthält.
Wie im Realschullehrplan werden für jeden Teilbereich Richtwerte dafür angegeben, wie viele Wochenstunden Mathematikunterricht für dessen Unterricht eingeplant werden sollten. Im Unterschied zum Realschullehrplan gibt es keine einleitenden Sätze zu jedem Teilbereich und die Ziele werden auch nicht zu einer Grundwissensliste zusammengefasst.
Auch im Gymnasiallehrplan finden sich keine Aufgabenbeispiele oder Kommentare zur Wahl der Inhalte. Es werden aber in fast allen Teilbereichen Hinweise auf Querbezüge zu anderen Fächern und auf fächerübergreifende Bildungs- und Erziehungsaufgaben (z.B. Verkehrserziehung, Gesundheitserziehung) gegeben, die einen vernetzten Unterricht ermöglichen sollen.
Von der 5. bis zur 8. Klasse sind vier Wochenstunden Mathematikunterricht am Gymnasium vorgesehen. Ab der 9. Klasse hängt die vorgesehene Mathematikstundenanzahl von der Ausrichtung des Gymnasiums ab (Mögliche Ausrichtungsschwerpunkte sind etwa Mathematik-Naturwissenschaften, alte Sprachen, neue Sprachen oder Musik). In allen Gymnasien sind in der 9. und 10. Klasse drei Wochenstunden Mathematik eingeplant, außer in den mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasien, wo noch eine zusätzliche Wahlpflichtstunde hinzukommt. Inhalte zu funktionalem Denken werden aber zum überwiegenden Teil außerhalb dieser Wahlpflichtstunden behandelt.

Lehrplan der 5. Klasse

In der 5. Jahrgangsstufe sollen Schüler verbal beschriebene Zusammenhänge in Sachaufgaben erfassen, diese Aufgaben mathematisch in einer Rechnung bearbeiten und das Ergebnis schließlich im ursprünglichen Zusammenhang deuten. Außerdem lösen sie einfache Gleichungen und arbeiten mit Maßstäben in Anwendungsaufgaben mit Bezug zum Erdkundeunterricht. (Lehrplan Bayern Gymnasium G9, 1989, Jahrgangsstufe 5)

Es findet demnach noch keine Arbeit mit graphischen Darstellungen oder Proportionalitäten in der 5. Jahrgangsstufe statt. Stattdessen werden erste Arbeiten im algebraischen Register und Übersetzungen zwischen der Realität und dem algebraischen Register durchgeführt.

Lehrplan der 6. Klasse

Der Lehrplan der 6. Klasse betont, dass die Behandlung der direkten und indirekten Proportionalität für die Vorbereitung des Funktionsbegriffs von großer Bedeutung ist. Die

Schüler sollen beide anhand von Beispielen aus ihrer Erfahrungswelt kennen lernen, wobei besonders auf die graphische Darstellung Wert gelegt wird. Quotienten- bzw. Produktgleichheit sollen als kennzeichnende Merkmale dieser funktionalen Zusammenhänge erkannt werden.
Außerdem werden in dieser Klassenstufe mit der Prozent- und Zinsrechnung noch weitere funktionale Zusammenhänge betrachtet. (Lehrplan Bayern Gymnasium G9, 1989, Jahrgangsstufe 6)

Die Vorbereitung auf die Arbeit mit Funktionen wird hier erstmals im Lehrplan genannt. Für die Arbeit mit proportionalen und indirekt proportionalen Situationen sind 12 der insgesamt 112 geplanten Mathematikstunden vorgesehen. Hinzukommen noch einmal 15 Schulstunden für die Prozent- und Zinsrechnung, die nicht, wie in der Realschule, explizit zur Vertiefung der Proportionalität genutzt werden sollen.
Neben der starken Anbindung an die Realität werden die funktionalen Situationen in dieser Klassenstufe vor allem im algebraischen und graphischen Register betrachtet, wobei graphische Darstellungen zuvorderst der Veranschaulichung dienen. Übersetzungen werden damit scheinbar hauptsächlich zwischen der Realität und dem algebraischen Register bzw. vom algebraischen Register ins graphische Register durchgeführt.

Lehrplan der 7. Klasse

In der 7. Klasse vertiefen die Schüler ihre Kenntnisse von Termen. Der Termbegriff wird eingeführt und Grund- und Definitionsmenge tauchen erstmals auf. Als besonders wichtig wird weiterhin die Arbeit mit Sachsituationen angesehen. In diesem Zusammenhang sollen Schüler Terme aufstellen, interpretieren und lernen sicher mit ihnen umzugehen.
In einem zweiten Teilbereich, der der Entwicklung funktionalen Denkens zugeordnet werden kann, wird das Lösen linearer Gleichungen und Ungleichungen mit einer Unbekannten als Ziel festgesetzt. Dabei nimmt die Arbeit mit Sachaufgaben auch wieder einen wichtigen Platz ein. (Lehrplan Bayern Gymnasium G9, 1989, Jahrgangsstufe 7)

Insgesamt sind 40 der 112 geplanten Mathematikstunden für die Arbeit mit Termen und Gleichungen vorgesehen. Dadurch erlangen die Schüler mehr Sicherheit im Umgang mit Darstellungen funktionaler Situationen im algebraischen Register. Übersetzungen finden zwischen der Realität und dem algebraischen Register statt. Weitere Darstellungen, insbesondere die graphische Darstellung, werden nicht erwähnt und eine Beschäftigung mit funktionalen Situationen wie Proportionalitäten oder Prozentrechnung ist nicht geplant. Der Lehrplan der 7. Klasse ist also im Bezug auf die funktionale Denkweise einseitiger ausgeprägt als der der 6. Klasse.

Lehrplan der 8. Klasse

In der 8. Klasse wird im Gymnasium der Funktionsbegriff eingeführt. Funktionen sollen zum Erfassen von Zusammenhängen zwischen Größen und zum Beschreiben von Abhängigkeiten in einer Vielzahl von Situationen genutzt werden. Mit der ausführlichen Behandlung von linearen Funktionen wird in dieser Jahrgangsstufe die Basis für weitere Arbeiten mit Funktionen gelegt.
Der Funktionsbegriff soll mit der Unterstützung von Beispielen als Zuordnungsvorschrift

definiert werden. Die Schüler lernen Definitions- und Wertemengen kennen und untersuchen Funktionen in ihren algebraischen und graphischen Darstellungen. Beim Studium der linearen Funktionen wird die graphische Bedeutung der Koeffizienten a und b der Funktionsgleichung $y=ax+b$ deutlich. Weiter wird besonders auf Sonderfälle linearer Funktionen hingewiesen. Dazu gehören direkt proportionale Funktionen, intervallweise lineare Funktionen und Betragsfunktionen.
Neben diesem Teilbereich, der sich ausschließlich mit Funktionen beschäftigt lassen sich zwei weitere Teilbereiche im Lehrplan finden, in denen Inhalte der Entwicklung funktionalen Denkens zugeordnet werden können.
Der Teilbereich lineare Gleichungssysteme greift das Wissen über lineare Funktionen auf und nutzt es zur Lösung von Gleichungssystemen mit zwei linearen Gleichungen und zwei Unbekannten. Dabei werden auch graphische Lösungen gesucht und es sollen insbesondere realitätsnahe Aufgaben bearbeitet werden. .
Wie in der 7. Klasse beschäftigt sich ein Teilbereich mit Termen und unterstützt damit den sicheren Umgang mit der algebraischen Darstellung von Funktionen. (Lehrplan Bayern Gymnasium G9, 1989, Jahrgangsstufe 8)

Mit der Einführung des Funktionsbegriffs wird in dieser Jahrgangstufe das Studium von Funktionen am Gymnasium begonnen. 20 der 112 vorgesehenen Mathematikstunden sind für Arbeit mit Funktionen eingeplant und in zwölf weiteren wird dieses Wissen beim Lösen linearer Gleichungssysteme genutzt. Für die Arbeit im algebraischen Register sind noch einmal 22 weitere Mathematikstunden vorgesehen.
Bei der Einführung des Funktionsbegriffs fällt auf, dass Realität, Graphen und Gleichungen zur Darstellung von Funktionen explizit genannt werden, aber Tabellen wie im bisherigen Gymnasiallehrplan nicht genannt werden. Zentrale Darstellung scheint die algebraische Darstellung zu sein, wobei allerdings auch im graphischen Register Lösungen linearer Gleichungssysteme gefunden werden sollen.
Proportionale Funktionen dienen hier nicht wie in der Realschule zur Einführung der Funktionen, sondern werden als Sonderfall von linearen Funktionen betrachtet. Zur Vermeidung einer Fixierung auf durchgängig lineare Funktionen wird z.B. mit stückweise linearen Funktionen oder mit auf Intervallen definierten linearen Funktionen gearbeitet.
Mit der Definition als Zuordnungsvorschrift wird klar die Zuordnungs-Grundvorstellung angesprochen. Im einleitenden Text ist jedoch von Zusammenhängen und Abhängigkeiten die Rede, so dass davon ausgegangen werden kann, dass auch die Kovariations-Grundvorstellung in den behandelten Inhalten zum Ausdruck kommt.

Lehrplan der 9. Klasse

Der Lehrplan der 9. Jahrgangsstufe sieht eine Vertiefung der Arbeit mit Funktionen vor, indem erstmals nichtlineare Funktionen im Detail betrachtet werden. Die Schüler sollen quadratische Funktionen und Wurzelfunktionen als deren Umkehrfunktion kennen lernen. Eine systematische Betrachtung der Umkehrbarkeit von Funktionen ist aber nicht vorgesehen. Auf die Arbeit mit der graphischen Darstellung quadratischer Funktionen wird explizit hingewiesen, wobei die Graphen aus der Normalparabel entwickelt werden sollen.
Beide in dieser Klassenstufe neuen Funktionstypen sollen auch in Anwendungsaufgaben studiert werden, in denen u.a. einfache Extremwertprobleme behandelt werden.

Ein weiterer Teilbereich des Lehrplans bezieht sich auf das Lösen von quadratischen Gleichungen. Hierbei werden allerdings keine graphischen Lösungen angesprochen.
Die Arbeit im algebraischen Register festigt die Kenntnisse der Schüler im Umgang mit Gleichungen weiter und hat somit Auswirkungen auf die Arbeit mit quadratischen Funktionen. (Lehrplan Bayern Gymnasium G9, 1989, Jahrgangsstufe 9)

Die Einführung zweier neuer Funktionstypen in dieser Jahrgangsstufe ermöglicht es den Schülern ihre Kenntnisse über Funktionen zu vertiefen. Mit elf von 84 bzw. 112 (inkl. des Wahlpflichtfachs) vorgesehenen Mathematikstunden nimmt diese Arbeit aber einen relativ geringen Platz im Mathematiklehrplan ein. 13 weitere Stunden sind für quadratische Gleichungen vorgesehen.
Während der Teilbereich *quadratische Gleichungen* vollkommen auf Übersetzungen und graphische Darstellungen verzichtet, scheint beim Studium quadratischer Funktionen großer Wert auf die graphische Darstellung gelegt zu werden. Es sollen zum Beispiel Symmetrien, Scheitel und Nullstellen der Funktionen untersucht werden, was auf ein ständiges Wechselspiel zwischen dem algebraischen und dem graphischen Register hindeutet. Tabellarische Darstellungen werden auch in dieser Jahrgangsstufe nicht erwähnt.
Im Gegensatz zum Lehrplan des mathematisch-technischen Zweiges der Realschule soll keine systematische Betrachtung der Umkehrung von Funktionen stattfinden und es finden sich auch keine Querverbindungen zu den geometrischen Teilbereichen.

Lehrplan der 10. Klasse

In der 10. Klasse lernen die Schüler eine große Bandbreite an Funktionen kennen und erhalten dadurch eine solide Basis für die Arbeit mit Funktionen in der Oberstufe.
Zwei Teilbereiche des Lehrplans beschäftigen sich mit Potenzen: der Bereich *Rechnen mit Potenzen*, in dem die Schüler langsam an die Arbeit mit rationalen Potenzen herangeführt werden, und der Bereich *Potenzfunktionen*. Es wird darauf hingewiesen dass beide Bereiche auch zusammengelegt werden können, so dass nach dem kennen lernen und arbeiten mit einem neuen Potenztyp die dazugehörige Potenzfunktion gesehen wird. Dadurch stellt der Bereich *Rechnen mit Potenzen* die algebraische Grundlage für die funktionalen Betrachtungen dar.
Bei der Arbeit mit Potenzfunktionen sollen geometrische Gemeinsamkeiten der Graphen verschiedener Potenzfunktionen herausgearbeitet werden und mit Parabeln, Hyperbeln und Wurzelfunktionen bestimmte Grundtypen erkannt werden. Die Schüler sollen die Umkehrbarkeit von Potenzfunktionen entscheiden können und auch die graphische Darstellung der Umkehrfunktion kennen.
Umkehrfunktionen spielen auch im Teilbereich *Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen* eine zentrale Rolle, da Logarithmusfunktionen als Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen eingeführt werden. Den Schülern ist zu zeigen, dass diese Funktionstypen es ermöglichen Wachstums- und Abklingprozesse quantitativ zu erfassen, funktional darzustellen und zu bewerten. Ihre algebraischen und graphischen Darstellungen und ihr Verhalten am Rand der Definitionsmenge sollen untersucht werden. In diesem Zusammenhang werden auch exponentielle und logarithmische Gleichungen behandelt, die die Sicherheit der Arbeit im algebraischen Register erhöhen sollen.
Im Rahmen der Geometrie gibt es mit der *Trigonometrie* einen dritten Teilbereich der sich mit

Funktionen beschäftigt. Die Schüler sollen erkennen, dass funktionale Zusammenhänge zwischen Seitenlängen und Winkeln in rechtwinkligen Dreiecken bestehen und dass man periodische Zusammenhänge durch Funktionen beschreiben kann. Die graphischen Eigenschaften der trigonometrischen Funktionen sollen den Schülern bekannt sein und Funktionenscharen der Form $f(x)=a \cdot sin(bx+c)$, inklusive der Bedeutung der Parameter, untersucht werden.
Auch in diesem Teilbereich wird, wie bei allen anderen Funktionstypen, eine starke Anbindung an Realsituationen gefordert.
Bei allen Funktionstypen, die in dieser Jahrgansstufe betrachtet werden, ist darauf zu achten, dass die Schüler mit Definitions- und Wertemengen umgehen können.
Schüler der mathematisch-naturwissenschaftlichen Gymnasien müssen in dieser Jahrgangsstufe ein Wahlpflichtfach wählen. In zwei der vier möglichen Wahlpflichtfächer treten Funktionen auf. Es werden aber keine neuen Funktionstypen behandelt. Im Wahlpflichtfach *Kegelschnitte* kommen Parabeln und Hyperbeln als Kegelschnitte vor und in Teilbereich *Informatik (Fortführung)* werden Funktionen in Programmen verwendet und es sollen die Werte der Sinusfunktion durch ein Programm ausgegeben werden. Es werden also keine neuen Inhalte zu funktionalem Denken studiert, sondern schon bekannte Inhalte in anderen Kontexten gesehen. (Lehrplan Bayern Gymnasium G9, 1989, Jahrgangsstufe 10)

In der letzten Klasse der Sekundarstufe I sehen die Schüler eine Vielzahl von neuen Funktionstypen und werden dadurch auf den Mathematikunterricht der Oberstufe vorbereitet. Für die Arbeit mit Potenzen und Potenzfunktionen sind 21 der 84 bzw. 112 (inkl. des Wahlpflichtfachs) geplanten Mathematikstunden vorgesehen. 17 Schulstunden sind für Exponential- und Logarithmusfunktionen eingeplant und 22 für Trigonometrie. Insgesamt wird also über die Hälfte der Zeit mit Inhalten gearbeitet, die zu funktionalem Denken gerechnet werden können.
Wie schon in den Jahrgangstufen davor stehen auch hier das algebraische und das graphische Register im Mittelpunkt. Die Vernetzung scheint jedoch noch größer geworden zu sein, so dass ständig Übersetzungsvorgänge stattfinden. Außerdem wird bei allen Funktionstypen Wert auf Anwendungen in der Realität gelegt. Die tabellarische Darstellung wird allerdings auch in dieser letzten untersuchen Jahrgangstufe nicht erwähnt.
Die Klassifizierung der Graphen der Potenzfunktionen in Verbindung mit der algebraischen Darstellung ist ein wichtiger Baustein bei der Entwicklung der funktionalen Denkweise. Durch die Arbeit mit den Graphen, die Betrachtung von Zuwachs und Abklingprozessen und durch das Studium des Verhaltens von Funktionen am Rande ihrer Definitionsmengen scheint die Kovariations-Grundvorstellung an Gewicht gegenüber der Zuordnungs-Grundvorstellung zu gewinnen.

Übersicht über die Lehrpläne des Gymnasiums

Der Mathematiklehrplan für die Sekundarstufe I des bayerischen Gymnasiums erlaubt es den Schülern am Ende der 10. Jahrgangstufe eine große Auswahl an Funktionen mit ihren algebraischen und graphischen Darstellungen zu kennen. Sie sollen eine gewisse Sicherheit im Umgang mit den Darstellungen und in den Übersetzungsvorgängen zwischen ihnen erworben haben. Außerdem lernen sie Anwendungen von diesen kennen und übersetzen von und zu Realsituationen. Sowohl die Zuordnungs- als auch die Kovariations-Grundvorstellung

werden angesprochen. Obwohl keiner der zu behandelnden Inhalte eine Sicht von Funktionen als Objekten zwingend erfordert, können dennoch mit der Klassifizierung von Funktionstypen und der Betrachtung von Funktionenscharen erste Schritte auf dem Weg der Reifizierung gemacht werden.
Es fällt auf, dass in niedrigen Klassenstufen nicht wie in der Real- und Hauptschule mit Schaubildern und anderen graphischen Darstellungen gearbeitet wird und dass Darstellungen im tabellarischen Register nie erwähnt werden. Während Funktionen der indirekten Proportionalität in der 8. Klasse des mathematisch-technischen Zweiges der Realschule zusammen mit den linearen Funktionen eingeführt werden, tauchen sie im Gymnasium erst in der 10. Klasse auf. Eventuelle Defizite der Gymnasialschüler in diesen Bereichen können damit erklärt werden.
Mit der 10. Klasse des Gymnasiums wurde ein Großteil der Inhalte abgedeckt, die für die Ausbildung der funktionalen Denkweise benötigt werden. In den folgenden Jahrgangsstufen werden mit der allgemeinen Umkehrbarkeit oder der Stetigkeit Eigenschaften von Funktionen behandelt, die nicht zu zentralen Gebieten der funktionalen Denkweise gehören. Die Schüler sehen bis zum Abitur nur wenige neue Funktionstypen und lernen im Bereich der Funktionen hauptsächlich zu differenzieren und zu integrieren.

In den folgenden Abschnitten werden die aktuellen Entwicklung der Lehrpläne und die Bildungsstandards dargestellt.

6.3.1.4 Bildungsstandards

Im Anschluss an die Veröffentlichung der Ergebnisse der ersten PISA Erhebung aus dem Jahr 2000 hat die Kultusministerkonferenz (siehe Abschnitt 6.1.1.1) Bildungsstandards für den Hauptschulabschluss und für den Mittleren Schulabschluss erarbeitet, die jetzt von allen Bundesländern implementiert und dann angewendet werden. Statt der in vielen Lehrplänen konkret beschriebenen zu behandelnden Inhalte werden in den Bildungsstandards Kompetenzen festgelegt, die zum Zeitpunkt des jeweiligen Abschlusses erworben sein sollen. Dadurch wie den Schulen und Lehrern größere Freiheit bei der Wahl der Inhalte und deren Reihenfolge im Unterricht gelassen. Außerdem soll so eine bundesweite Vereinheitlichung der Lernergebnisse gefördert werden, die sich nun nicht an Inhalten, sondern an Fähigkeiten, Fertigkeiten und Bereitschaften orientieren.
In den Bildungsstandards werden zuerst allgemeine mathematische Kompetenzen festgelegt, die in allen mathematischen Bereichen relevant sind und über die alle Schüler verfügen sollen. Dabei handelt es sich um

- Mathematisch argumentieren (Fragen stellen, wie: „Wie verändert sich…?“, mathematische Argumentationen entwickeln)
- Mathematisch Probleme lösen (Probleme innerhalb der Mathematik lösen)
- Mathematische modellieren (Übersetzungen von und zur Realität)
- Mathematische Darstellungen verwenden (Verschiedene mathematische Darstellungen kennen, die am besten passende auswählen, zwischen ihnen übersetzen)

- Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen (Mit den Darstellungsformen arbeiten können)
- Kommunizieren (Überlegungen und Lösungswege darstellen)

Durch die Definition der funktionalen Denkweise wird klar, dass alle allgemeinen mathematischen Kompetenzen zu ihrer vollen Entfaltung benötigt werden (siehe Kapitel 1).

Die allgemeinen mathematischen Kompetenzen lassen sich an mathematischen Inhalten konkretisieren. Diese inhaltsbezogenen mathematischen Kompetenzen sind in fünf Leitideen unterteilt: *Zahl*, *Messen*, *Raum und Form*, *Funktionaler Zusammenhang* und *Daten und Zufall*.

Die für diese Arbeit wichtigen inhaltesbezogenen Kompetenzen zur Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* werden in den folgenden Abschnitten kurz dargestellt.

6.3.1.4.1 Funktionaler Zusammenhang im Hauptschulabschluss

Die Schüler sollen beim Abschluss der Hauptschule funktionale Zusammenhänge in Alltagssituationen beschreiben und interpretieren können und all ihre Darstellungsformen verwenden. Sie kennen proportionale und antiproportionale Zusammenhänge und nutzen diese für die Arbeit mit Sachsituationen.
Unter der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* wird außerdem die Prozentrechnung, das Nutzen von Maßstäben und das Lösen einfacher linearer Gleichungen aufgeführt. (Bildungsstandards Hauptschulabschluss, 2004)

Es fällt auf, dass der Funktionsbegriff nicht gefordert wird und nur von Zuordnungen die Rede ist. Diese werden allerdings in allen Darstellungsregistern untersucht und eine ständige Anbindung an Realsituationen gefordert. Die Auswahl der betrachteten Funktionstypen ist sehr eingeschränkt und beinhaltet nicht einmal lineare Zuordnungen. Auch quadratische Zuordnungen tauchen nicht auf.
Sämtliche inhaltsbezogene Kompetenzen der Bildungsstandards für den Hauptschulabschluss werden im oben analysierten Lehrplan der bayerischen Hauptschule bereits abgebildet (siehe Abschnitt 6.3.1.1).

6.3.1.4.2 Funktionaler Zusammenhang im Mittleren Schulabschluss

Mit dem Mittleren Schulabschluss sollen die Schüler Funktionen als Mittel zur Beschreibung quantitativer Zusammenhänge und Veränderungen nutzen. Sie sollen diese in den üblichen Darstellungsregistern darstellen, die verschiedenen Darstellungen vergleichen und Wechsel zwischen den Darstellungen durchführen.
Sie lernen lineare, antiproportionale, quadratische, Exponential- und Sinusfunktionen kennen und bestimmen deren kennzeichnende Merkmale. Dabei ist, wie in der Hauptschule, auf die Anbindung an Sachsituationen zu achten.
Auch hier werden unter der Leitidee *Funktionaler Zusammenhang* zusätzliche Inhalte aufgeführt, wie lineare Gleichungssysteme und quadratische Gleichungen (mit graphischen und rechnerischen Lösungen). (Bildungsstandards Realschulabschluss, 2003)

Wie bei den Bildungsstandards zum Hauptschulabschluss wird die Nutzung aller Darstellungsformen und Übersetzungen zwischen ihnen explizit erwähnt. Die Schüler lernen

den Funktionsbegriff und eine, im Vergleich zum Hauptschulabschluss, relativ breite Auswahl von Funktionstypen kennen. Außerdem sollen sie Funktionen auch zur Beschreibung von Veränderungen verwenden, was auf die die Nutzung der Kovariations-Grundvorstellung hinweist.
Mit Hilfe des oben gesehenen bayerischen Lehrplans der Realschule wird deutlich, dass dort für den mathematisch-technischen Zweig noch weit mehr Inhalte vorgesehen sind, als in den Bildungsstandards genannt werden (z.B.: Potenzfunktionen, alle trigonometrischen Funktionen, Logarithmusfunktionen). Allerdings wird weniger Wert auf die Arbeit mit Sachsituationen gelegt. Letzteres gilt auch für den Lehrplan der beiden anderen Zweige. Dort tauchen aber auch nicht alle in den Bildungsstandard festgelegten Inhalte auf. So sind nur Beispiele der Exponentialfunktionen und nur die Graphen der trigonometrischen Funktionen vorgesehen (siehe Abschnitt 6.3.1.2).

Für die Hauptschule und das Gymnasium sind neue Lehrpläne herausgegeben worden, die im folgenden Abschnitt kurz dargestellt und mit den oben analysierten Lehrplänen verglichen werden

6.3.1.5 Die neuen Lehrpläne

Im diesem Abschnitt werden die Lehrpläne zusammengefasst, die nach der Durchführung von PALMA an den bayerischen Hauptschulen und Gymnasien eingeführt wurden und deswegen nicht im zentralen Blickpunkt dieser Arbeit stehen (siehe Abschnitt 6.3).

6.3.1.5.1 Die neuen Hauptschullehrpläne

2004 sind neue Lehrpläne für die bayerische Hauptschule herausgegeben worden. Obwohl einige Passagen von den alten Lehrplänen übernommen wurden, sind darin wichtige Änderungen zu finden, die die Ausbildung der funktionalen Denkweise betreffen.

Zunächst ist zu bemerken, dass der Aufbau des Lehrplans etwas verändert wurde. Jeder Teilbereich ist nun in Lernziele, Lerninhalte und einen Abschnitt *Wiederholen, Üben, Anwenden, Vertiefen* dreigeteilt. Die zu behandelnden Lerninhalte sind ein bisschen ausführlicher dargestellt, sodass der Umfang des Lehrplans zugenommen hat. Ein neuer Teilbereich *Terme und Gleichungen* zieht sich nun durch den gesamten Lehrplan.
Gute Schüler können die 10. Klasse der Hauptschule mit der Mittleren Reife abschließen. Diese Schüler werden ab der 7. Jahrgangsstufe in einer Klasse zusammengefasst und werden auf den angestrebten Abschluss gesondert vorbereitet. Aus diesem Grund enthält der neue Lehrplan ab der 7. Jahrgangstufe separate Anweisungen für den M-Zug (Klassen mit Ziel Mittlere Reife).

Die Lehrpläne der 5. und 6. Klassen entsprechen im Wesentlichen denen von 1997. In der 7. Klasse wird mit der Betrachtung proportionaler Funktionen der Funktionsbegriff eingeführt. Funktionen, die als Zuordnungen definiert sind, werden in den üblichen Darstellungsformen betrachtet, wobei die algebraische Darstellung nur im M-Zug untersucht wird. In allen Klassenstufen wird die Fähigkeit Übersetzungen zwischen den Darstellungsformen durchzuführen besonders betont.
In der 8. Klasse arbeiten die Schüler mit linearen Funktionen und ihren Darstellungen, die im Lehrplan von 1997 erst in der 10. Klasse gesehen wurden. Wieder wird die Formeldarstellung

nur im M-Zug studiert, wo die Schüler auch den Steigungsbegriff kennen lernen sollen. Umgekehrt proportionale Funktionen tauchen in dieser Jahrgangsstufe jetzt nicht mehr auf.
In der 9. Klasse sehen die Schüler die die Hauptschule danach verlassen noch umgekehrt proportionale Funktionen und Beispiele weiterer nicht-linearer Funktionen. Auch in dieser Jahrgangsstufe wird kein Wert auf die algebraische Darstellung gelegt. Im M-Zug dagegen wird die algebraische Darstellung der umgekehrt proportionalen Funktionen explizit erwähnt. Hier arbeiten die Schüler auch schon in dieser Jahrgangsstufe mit linearen Gleichungssystemen.
Der Lehrplan der 10. Klasse hat sich in dem Bereich, der für die Ausbildung der funktionalen Denkweise ausschlaggebend ist, nur unwesentlich gegenüber dem Lehrplan von 1997 verändert. Natürlich tauchen die Definition des Funktionsbegriffs und von linearen Funktionen nun dort nicht mehr auf, da sie bereits in frühren Klassenstufen behandelt wurden. (Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse 5, 2004; Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse 6, 2004; Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse 7, 2004; Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse M7, 2004; Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse 8, 2004; Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse M8, 2004; Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse 9, 2004; Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse M9, 2004; Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse M10, 2004)

Die hauptsächlichen Änderungen zwischen den Lehrplänen betreffen die Reihenfolge der Einführung des Funktionsbegriffs und der betrachteten Funktionstypen. Der Funktionsbegriff wird mit proportionalen Funktionen, früher als in den anderen Schularten eingeführt. Lineare Funktionen werden um zwei Jahre vorgezogen, wohingegen Funktionen der umgekehrten Proportionalität um ein Jahr nach hinten verschoben werden. Die Arbeit mit Darstellungen im algebraischen Register wird nur im Lehrplan des M-Zuges explizit erwähnt.
Die Schüler, die nach der mit dem Hauptschulabschluss die Schule verlassen, lernen im Gegensatz zu denen, die nach dem Lehrplan von 1997 unterrichtet werden, eine Definition von Funktionen kennen und arbeiten auch mit linearen Funktionen. Daher ist von einer erhöhten Fähigkeit zur Ausbildung der funktionalen Denkweise auszugehen. Allerdings kann sich die Definition von Funktionen ohne breit angelegte Vorarbeiten als schwierig erweisen. (siehe Abschnitt 3.3.3)

6.3.1.5.2 Die neuen Gymnasiallehrpläne

Mit der Umstellung vom 9-stufigen auf das 8-stufige Gymnasium wurde der Lehrplan vollkommen überarbeitet. Im Aufbau erinnert er jetzt an den Realschullehrplan. Der Lehrplan jeder Klassenstufe ist mit einer zusammenfassenden Einleitung versehen, anschließend wird zu erwerbendes Grundwissen aufgezählt und schließlich die Inhalte in knapperer Form als bisher in Teilbereiche untergliedert.

Im Bereich funktionalen Denkens gibt es in der 5. Klasse keine wichtigen Neuerungen. Direkte und indirekte Proportionalität sind aus dem Lehrplan der 6. Klasse entfernt worden und werden auch in der 7. Klasse noch nicht gesehen. Dort werden Arbeiten mit Termen und linearen Gleichungen durchgeführt, die die Funktionen vorbereiten sollen.
In der 8. Klasse wird mit Hilfe der direkten und indirekten Proportionalität und Beispielen nicht-linearer Funktionen der Funktionsbegriff als übergeordneter Begriff eingeführt, der alle Abhängigkeiten zusammenfasst. Alle Darstellungen, inklusive der Tabellen, werden genutzt

und mit Übersetzungen untersucht, wie sich algebraische und die graphische Darstellungen gegenseitig bedingen.
Der Lehrplan der 9. Klasse entspricht etwa dem der 9. Klasse von 1989. Allerdings werden keine Umkehrfunktionen mehr betrachtet und die Wurzelfunktion taucht auch nicht mehr auf. Stattdessen wird hier schon begonnen mit den trigonometrischen Funktionen zu arbeiten, ohne diese jedoch als Funktionen zu sehen.
In der 10. Klasse werden Sinus- und Kosinusfunktionen mit ihren Graphen und Formeldarstellungen untersucht. Die Tangensfunktion steht nicht mehr im Lehrplan. Auch in dieser Jahrgangstufe werden keine Umkehrungen von Funktionen betrachtet, was dazu führt, dass die Logarithmusfunktionen nicht mehr studiert werden. Der Teilbereich *Potenzfunktionen* wurde durch einen Teilbereich *Ausbau der Funktionenlehre* ersetzt, in dem ganzrationale und einfache gebrochen-rationale Funktionen studiert werden. Hierbei soll auf das Wechselspiel zwischen algebraischer und graphischer Darstellung geachtet werden. (Lehrplan Bayern Gymnasium Klasse 5, 2004; Lehrplan Bayern Gymnasium Klasse 6, 2004; Lehrplan Bayern Gymnasium Klasse 7, 2004; Lehrplan Bayern Gymnasium Klasse 8, 2006; Lehrplan Bayern Gymnasium Klasse 9, ohne Jahr; Lehrplan Bayern Gymnasium Klasse 10, ohne Jahr)

Auf den ersten Blick fällt auf, dass der Lehrplan im Aufbau umgestaltet und an den Aufbau des Lehrplans der Realschule angepasst wurde. Inhaltlich sind die Änderungen weniger einschneidend als im Hauptschullehrplan. Die Betrachtung der direkten und der indirekten Proportionalität werden um zwei Jahre nach hinten verschoben. Weiter wird der Funktionsbegriff jetzt ähnlich wie im neuen Hauptschullehrplan ohne wesentliche Vorarbeiten in der 8. Klasse als Abhängigkeit und nicht mehr als Zuordnung eingeführt. Bei der weiteren Arbeit mit Funktionen sind die Umkehrfunktionen aus dem Lehrplan verschwunden, was die Nichtbehandlung der Logarithmus- und Wurzelfunktionen zur Folge hat (letztere können in der 10. Klasse im Rahmen der gebrochen-rationalen Funktionen gesehen werden).
Durch die vollkommene Neugestaltung der Lehrpläne ist es schwierig eine Bewertung bezüglich der Ausbildung einer funktionalen Denkweise abzugeben. Wegen der verstärkten vernetzten Arbeit mit allen Darstellungen sind positive Effekte zu erwarten. Andererseits kann die etwas kleinere Auswahl an bekanten Funktionen und besonders die um zwei Jahre verzögerte Arbeit mit Proportionalitäten, also mit ersten funktionalen Situationen, negative Auswirkungen haben.
Wie im neuen Hauptschullehrplan kann sich auch hier die Definition von Funktionen am Anfang der Arbeit mit funktionalen Situationen als hinderlich erweisen.

6.3.1.6 Zusammenfassung

Die hier analysierten Lehrpläne ordnen sich im historischen Kontext in die Phase der Entfernung von mengentheoretischen Betrachtungen hin zu konkreten Anwendungsaufgaben ein (siehe Abschnitt 6.2.1). Letzte Überreste der Mengentheorie finden sich nur noch im Realschullehrplan.
Die Reihenfolge der eingeführten Inhalte ist in allen Schulformen in etwa die gleiche. Nach einer Betrachtung der direkten und indirekten Proportionalität wird mit den linearen Funktionen der Funktionsbegriff einführt. Anschließend werden quadratische und

Wurzelfunktionen betrachtet und am Ende der Sekundarstufe I kommen zur Menge der bekannten Funktionen noch die Potenz-, die Exponential-, die Logarithmischen und die trigonometrischen Funktionen hinzu. Allerdings variiert der Zeitpunkt der Einführung und es ist zu beachten, dass Hauptschüler, die nach der 9. Klasse die Schule verlassen, nicht einmal lineare Funktionen kennen lernen (dies hat sich mit den neuen Lehrplänen geändert) und dass auch Realschüler nicht das gesamte Funktionsspektrum sehen werden.
Die Funktionsdefinition wird an der Hauptschule nur von den Schülern gesehen, die die Mittlere Reife anstreben. Genau wie am Gymnasium werden Funktionen dort als Zuordnungen eingeführt, wohingegen sie an den Realschulen als spezielle Relationen definiert sind. Definitions- und Wertemenge werden nur im Realschul- und Gymnasiallehrplan erwähnt.
Die Nutzung der Darstellungsregister hängt vom Schultyp ab. Auf eine Anbindung an die Realität wird immer Wert gelegt, wobei dies in den oberen Klassenstufen der Realschule eine weniger große Rolle zu spielen schein als in den anderen Klassenstufen und Schularten. In der Haupt- und Realschule werden im Gegensatz zum Gymnasium in den unteren Klassenstufen Vorarbeiten in allen Darstellungsregistern durchgeführt. An der Hauptschule steht dann das algebraische Register im Vordergrund, während an Realschule und Gymnasium zusätzlich dazu auch viel mit dem graphischen Register gearbeitet wird. Das tabellarische Register kommt im Gymnasiallehrplan überhaupt nicht vor und ist an der Realschule ab der 9.Klasse auch nicht mehr zu finden.
Die Nutzung der Register deutet schon darauf hin, dass das algebraische Register eine zentrale Rolle bei Übersetzungsvorgängen innehat. Neben der Untersuchung von dessen Verbindung zu Realsituationen beschäftigen sich die Schüler an Realschulen und Gymnasien auch intensiv mit der Verbindung von Formel und Graph. Auch wenn nicht alle Übersetzungsvorgänge gleichermaßen von den Schülern gesehen werden, sind diejenigen, die betrachtet werden, aber immer ein wichtiger Punkt in den jeweiligen Lehrplänen.
Was die Grundvorstellungen zu Aspekten funktionalen Denkens betrifft, so fällt auf, das in allen Fällen zuerst hauptsächlich mit der Zuordnungs-Grundvorstellung gearbeitet werden soll. An der Realschule und am Gymnasium wird später verstärkt die Kovariations-Grundvorstellung angesprochen. Zur Notwendigkeit der Nutzung der Objekt-Grundvorstellung kommt es aber in keiner der Schularten.
Durch die Betrachtung von Situationen der umgekehrten Proportionalität vor der Funktionsdefinition kann möglicherweise das Überschreiten der epistemologischen Hürde der linearen Fixierung (siehe Abschnitt 4.3) erleichtert werden. In der Realschule werden zusätzlich achsenparallele Geraden gesehen, was einem weiteren typischen Fehler im Zusammenhang mit linearen Funktionen vorbeugen soll (siehe Abschnitt 4.1.1). Trotzdem ist, insbesondere am Gymnasium, durch das lange Studium ausschließlich linearer Funktionen eine gewisse Präferenz linearer Zusammenhänge zu erwarten.
Die Forderung der Bildungsstandards nach einem kritischen Umgang mit den Darstellungsformen wird in keinem Lehrplan viel Bedeutung beigemessen, so dass mögliche Schwierigkeiten der Schüler dadurch erklärbar sind.

Am Ende dieses Kapitels findet sich eine tabellarische Übersicht über die Inhalte in den jeweiligen Lehrplänen, mit der die verschiedenen Entwicklungen schneller erfasst werden können.

6.3.2 Intendiertes Curriculum von Frankreich

In diesem Abschnitt wird das intendierte Curriculum von Frankreich analysiert. Wie oben schon erklärt, wurde als Referenzpunkt für den Vergleich der beiden Länder der in 2003 für 15-jährige Schüler gültige Lehrplan gewählt (siehe Abschnitt 6.3). Dieser wird im ersten Unterpunkt dieses Abschnittes analysiert. Anschließend wird eine Zusammenfassung der aktuellen Lehrplanentwicklung gegeben.

6.3.2.1 Der Lehrplan

Aufbau des Lehrplans des CM2

Die 5. Jahrgangsstufe von Deutschland entspricht der letzten Klassenstufe der Grundschule in Frankreich, dem CM2 (siehe Abschnitt 6.1.2.2). Dessen Lehrplan wird zusammen mit den Lehrplänen des Kindergartens und der gesamten Grundschule veröffentlicht, die in drei dreijährige Zyklen unterteilt sind. Die Inhalte werden dabei nicht pro Jahrgangstufe, sondern pro Zyklus zusammengefasst. Der CM2 ist die letzte Jahrgangstufe des dritten Zyklus, dem Zyklus der Vertiefung (Originalbegriff: cycle d'approfondissement), der außerdem noch die Klassenstufen CE2 und CM1 enthält.
Der Bereich des Lehrplans, der sich mit der Mathematik des dritten Zyklus befasst, ist nach einer zusammenfassenden Einleitung in drei Teilbereiche unterteilt: Zahlen und Rechnung, Geometrie und Messung. Darin werden auf insgesamt drei Seiten die Inhalte, die die Schüler am Ende des Zyklus beherrschen sollen, stichpunktartig aufgezählt.
In diesem Lehrplan werden keine Aufgabenbeispiele oder Erklärungen zur Wahl der Inhalte angeboten.
Am Ende des Lehrplans sind für alle Zyklen, Fächer und Teilbereiche die Kompetenzen zusammengefasst, die die Schüler am Ende jedes Zyklus haben sollen. Bei der Darstellung wurde darauf geachtet, dass die Entwicklung der Teilbereiche über die einzelnen Zyklen hinweg erfasst werden kann.
Im dritten Zyklus sind pro Woche 5h 30 Mathematikunterricht vorgesehen. (Programme France école primaire, 1995)

Lehrplan des CM2

Im CM2 wird eine erste Annäherung an die Proportionalität und damit an Funktionen durchgeführt. Die Schüler sollen einfache proportionale Situationen erkennen und mit ihren Darstellungen in Tabellen, Diagrammen und Graphiken umgehen können. In diesem Zusammenhang werden auch erste Arbeiten mit Maßstäben und Prozenten durchgeführt, ohne dass diese vertieft werden.
Allgemein wird darauf hingewiesen, dass bei der Einführung von neuen Begriffen stets auf den Erfahrungen der Schüler aufgebaut werden soll. Sie übersetzen im Rahmen von Anwendungsaufgaben von der Realität zu mathematischen Darstellungen und validieren ihre Ergebnisse, wobei sie den umgekehrten Übersetzungsvorgang durchführen. (Programme France école primaire, 1995)

In dieser Jahrgangsstufe beginnt die Hinführung zur Arbeit mit funktionalen Situationen. Es wird angefangen mit allen Darstellungsformen, außer der algebraischen Darstellung, zu arbeiten. Erste Übersetzungen werden durchgeführt. Eine Präferenz für die Nutzung einer bestimmten Grundvorstellung zu Aspekten funktionalen Denkens ist noch nicht erkennbar.

Aufbau der Lehrpläne des Collège

Nach dem CM2 treten die Schüler ins Collège über in dem sie bis zur 3^e bleiben (siehe Abschnitt 6.1.2.2). Die Lehrpläne der vier Jahrgangsstufen des Collège sind sehr ähnlich gestaltet, wobei die von 5^e und 4^e gemeinsam veröffentlicht werden. In den beim Ministerium erhältlichen Lehrplänen werden vor der eigentlichen Erklärung der Inhalte zehn Seiten mit verschiedenen ministeriellen Verordnungen abgedruckt, die die Anwendung der Lehrpläne genau regeln. Anschließend werden auf zwei bis fünf Seiten die Ziele des Mathematikunterrichts im Allgemeinen (z.B.: Mathematik als Allgemeinbildung, als Werkzeug und als Ausdrucksmittel), eine Übersicht über die zu behandelnden Inhalte und die Organisation und Durchführung der Lehre detailreich dargestellt.
Dann erst werden die fachlichen Inhalte des Mathematikunterrichts auf acht bis elf Seiten pro Klassenstufe vorgestellt. Diese sind drei Teilbereiche (*geometrische Arbeiten, numerische Arbeiten, Organisation und Umgang mit Daten – Funktionen*) unterteilt und jeweils mit einer weiteren zusammenfassenden Einleitung versehen.
Die Inhalte an sich werden in drei Spalten präsentiert. Die erste Spalte enthält die Inhalte in Stichpunkten (z.B.: Parallelogramm, Anwendung der Proportionalität), die zweite die dazugehörigen Kompetenzen (z.B. Kennen und Nutzen einer Parallelogrammdefinition, graphische Darstellungen lesen und interpretieren) und die dritte ausführliche Kommentare, die die Inhalte präzisieren und Querverbindungen zu anderen mathematischen Inhalten (auch aus anderen Jahrgangstufen) herstellen.
Die Lehrpläne aller Jahrgangsstufen werden durch ein vier (in der 6^e) bis 15 (in der 3^e) Seiten langes Begleitdokument ergänzt, in dem einzelne Inhalte nochmals im Fließtext beschrieben und in einen allgemeinen Kontext eingeordnet werden. Außerdem werden dort Anweisungen zu übergreifende Themen, wie dem Computereinsatz, der mathematischen Argumentation, dem Übergang zum Lycée oder dem Umgang mit der mathematischen Sprache gegeben.
Im Gegensatz zu den meisten bayerischen Lehrplänen, werden keinerlei Zeitvorgaben für die Behandlung der einzelnen Inhaltsbereiche gemacht. Insgesamt sind in der 6^e und 3^e vier Wochenstunden Mathematikunterricht vorgesehen und in der 5^e und 4^e 3h 30. (Programme France 6^e, 1995; Programme France 5^e et 4^e, 1997; Programme France 3^e, 1998)

Lehrplan der 6^e

In der 6^e fällt der Teil des Lehrplans, der sich auf funktionales Denken, bezieht sehr knapp aus. Die im CM2 gesehene Proportionalität spielt nur eine untergeordnete Rolle im Teilbereich *Organisation und Umgang mit Daten – Funktionen*. Dort wird lediglich darauf hingewiesen, dass mit Arbeiten im graphischen und algebraischen Register begonnen werden soll, wobei stets von konkreten Situationen aus anderen Teilbereichen und anderen Fächern ausgegangen wird. Dabei werden proportionale und nicht proportionale Situationen gesehen. Es wird aber explizit darauf hingewiesen, dass trotz des Studiums funktionaler Situationen der Begriff *Funktion* zu vermeiden ist, wohingegen *in Funktion von* (Originalbezeichnung: *en fonction de*) und *ist Funktion von* (Originalbezeichnung: *est fonction de*) genutzt werden können.

Außerdem sollen die Schüler mit dem algebraischen Register arbeiten, indem sie einfache Gleichungen der Formen $x+b=c$ oder $a{\cdot}x=c$ lösen. Allgemein wird mehrmals betont, dass die Schüler lernen sollen Realsituationen mit Tabellen, Schaubildern und Graphen zu verbinden. (Programme France 6^{e}, 1995)

In dieser Jahrgangsstufe finden hauptsächlich Vorarbeiten mit den verschiedenen Darstellungsregistern statt. Übersetzungen sind lediglich von und zur Realität vorgesehen. Beispiele und Gegenbeispiele proportionaler Situationen werden betrachtet, ohne dass sie systematisch untersucht werden.

Lehrplan der 5^{e}

Der Lehrplan der 5^{e} sieht eine weitere Arbeit mit den algebraischen, tabellarischen und graphischen Darstellungsregistern sowie mit Proportionalitäten vor. Im Teilbereich zu *Organisation und Umgang mit Daten – Funktionen* wird zuerst auf das graphische Darstellungsregister eingegangen. Die Schüler sollen lernen, Punkte zu setzen und ihre Koordinaten abzulesen. Bei diesen Übungen sehen sie auch erstmals die graphische Darstellung von proportionalen Situationen.
Das Studium von Proportionalitäten wird fortgesetzt, wobei insbesondere die tabellarische Darstellung genutzt wird. Die Schüler ermitteln fehlende Werte der Tabellen und erkennen, dass die Korrespondenz durch ein Wertepaar, und damit durch einen Proportionalitätskoeffizienten, bestimmt wird. Sie analysieren Tabellen daraufhin, ob diese eine proportionale Situation darstellen und sollen auch erstmals eine die Verbindung zwischen der tabellarischen und der graphischen Darstellung herstellen.
Am Ende dieses Teilbereichs werden mehrere Aufgabenbeispiele zu proportionalen Situationen gegebenen. Diese Beziehen sich auf andere mathematische Inhalte, wie die Volumen und Flächenberechnung von Dreiecken und Zylindern und sprechen in gleichem Maße die Zuordnungs- und die Kovariations-Grundvorstellung an. Es wird speziell betont, dass in den Aufgaben Variationen untersucht werden sollen. Auch die Prozentrechnung wird als proportionale Situation innerhalb dieses Teilbereiches betrachtet.
Eine formale Definition von Funktionen wird weiterhin explizit ausgeschlossen. Die Nutzung eines hinführenden Vokabulars wird aber wie in der vorangegangen Jahrgangstufe fortgesetzt.
Im Teilbereich *Organisation und Umgang mit Daten – Funktionen* wird die algebraische Darstellung von Proportionalitäten nicht erwähnt. Allerdings wird das Erlernen des Umgangs mit dem algebraischen Darstellungsregister innerhalb des Teilbereiches *numerische Arbeiten* weitergeführt, wo jetzt auch Gleichungen der Form $\frac{a}{x}=c$ gesehen werden. Bei einfachen Gleichungen mit zwei Variablen wird geprüft, für welche Variablenpaare die Gleichung erfüllt ist.
Alle hier genannten Inhalte werden explizit als Vorbereitung der Funktionsdefinition gesehen. (Programme France 5^{e} et 4^{e}, 1997)

In dieser Klassenstufe werden die Schüler näher an die Arbeit mit den Darstellungsregistern herangeführt. Diese werden nicht immer mit Proportionalitäten verbunden. So lernen sie keine algebraische Darstellung von Proportionalitäten kennen, berechnen aber mit den Proportionalitätskoeffizienten fehlende Werte von ihren tabellarischen Darstellungen. Auch die Arbeiten mit dem graphischen Register befinden sich noch auf einem sehr niedrigen

Niveau.
Übersetzungen zwischen den Darstellungen finden vor allem zwischen proportionalen Situationen aus anderen mathematischen Gebieten und der tabellarischen Darstellung statt.
Die Kovariations-Grundvorstellung scheint in gleichem Maße wie die Zuordnungs-Grundvorstellung angesprochen zu werden.

Lehrplan der 4^{e}

In der 4^{e} werden die bisher bekannten Inhalte zu funktionalem Denken gefestigt, aber keine neuen hinzugenommen. Im Teilbereich *Organisation und Umgang mit Daten – Funktionen* wird gefordert, dass die Schüler ihre Kenntnisse von Anwendungen der Proportionalität weiter vertiefen (z.B. zurückgelegter Weg in Abhängigkeit von der Zeit; Einheitenwechsel, Prozentrechung). Es ist weiterhin eine Nutzung des Funktionen vorbereitenden Vokabulars vorgesehen, noch immer ohne dass Funktionen formal definiert werden. Die graphische Darstellung von Punkten, die mit dem Ursprung aufgereiht sind, soll als Darstellung von proportionalen Situationen erkannt werden und auch Beispiele nicht proportionaler Funktionen sind zu betrachten.
Im Teilbereich *numerische Arbeiten* soll die progressive Hinführung zur Arbeit im algebraischen Register mit einfachen Gleichungen, in enger Verbindung zu Situationen aus dem Erfahrungsbereich der Schüler fortgesetzt werden. Dabei finden Übersetzungen von und zur Realität statt. Situationen, die zu quadratischen Gleichungen führen sind explizit ausgeschlossen.
Das Studium proportionaler Situationen zieht sich durch den gesamten Mathematiklehrplan der 4^{e}. Auch in der Geometrie sollen damit Variationen von Flächen und Volumina untersucht werden. Außerdem wird die Proportionalität bei der Definition des Kosinus eines Winkels als Längenverhältnis zweier Seiten in einen Dreieck genutzt. Von einer Kosinus*funktion* wird aber noch nicht gesprochen. (Programme France 5^{e} et 4^{e}, 1997)

In dieser Klassenstufe werden keine wesentlichen neuen Schritte auf dem Weg der Ausbildung funktionalen Denkens gemacht. Die Arbeit mit proportionalen Situationen wird durch ihre diskrete graphische Darstellung, durch Anwendungen und durch Gegenbeispiele vertieft. Wie in den Vorjahren ist auch hier keine Definition vorgesehen und auch die algebraische Darstellung proportionaler Situationen steht nicht im Lehrplan. Die tabellarische Darstellung, die in der 5^{e} noch sehr viel genutzt wurde, wird nun gar nicht mehr erwähnt. Dennoch scheint sie für die Bearbeitung der Beispielaufgaben vorgesehen zu sein.
Übersetzungen finden vor allem von und zu Realsituationen und proportionalen Situationen aus anderen Teilbereichen statt. Außerdem sind erste Übersetzungsprozesse zur graphischen Darstellung vorgesehen sind.
Bei vielen proportionalen Situationen, insbesondere aus der Geometrie, scheint explizit die Variation und damit die Kovariations-Grundvorstellung angesprochen zu werden. Die Zuordnungs-Grundvorstellung steht dagegen bei der Definition von Kosinus im Mittelpunkt.

Lehrplan der 3^{e}

In der 3^{e} treffen die Schüler erstmals auf den Funktionsbegriff und auf lineare Funktionen, wenn auch die Definition noch nicht in ihrer vollen Abstraktheit behandelt werden soll.
Die Schüler sollen ausgehend von proportionalen Funktionen die Notation $x \mapsto ax + b$ (mit

festen *a* und *b*) für lineare Funktionen kennen lernen und proportionale Funktionen als Sonderfall davon identifizieren. Dabei erfassen sie die graphischen Rollen der Koeffizienten *a* und *b* der algebraischen Darstellung, ohne allerdings die allgemeine Geradengleichung zu sehen.
Auch die anderen Darstellungsregister werden zur Darstellung linearer Funktionen genutzt und Verbindungen zwischen ihnen hergestellt. Die graphische Darstellung soll aus der algebraischen Darstellung erstellt werden. Außerdem soll zwei Bild-Urbild-Paaren (bzw. einem Bild-Urbild-Paar bei proportionalen Funktionen), die aus der graphischen Darstellung entnommen werden können, soll die algebraische Darstellung gewonnen werden.
Des Weiteren tabellarische Darstellungsregister genutzt und Anwendungsbeispiele proportionaler und linearer Funktionen gezeigt. Die Arbeit mit Proportionalitäten, mit ihren Anwendungen in der Geometrie, der Prozentrechnung und den Einheitenwechseln soll in dieser Klassenstufe abgeschlossen werden.
Wie schon in den vorigen Klassenstufen sollen auch in der 3^{e} Beispiele nichtproportionaler betrachtet werden (etwa quadratische Funktionen), wobei jetzt auch auf Variationsverhalten, Maxima und Minima eingegangen wird.
Funktionen werden aber nicht allgemein definiert, sondern nur in konkreten Fällen als Prozess erklärt, der eine Zahl mit einer anderen in Verbindung setzt. Die Notation *f(x)* wir nur in mit konkreten Zahlen für *x* verwendet.
Neben diesen im Teilbereich *Organisation und Umgang mit Daten – Funktionen* gesehenen Inhalten wird die Arbeit mit dem algebraischen Darstellungsregister im Teilbereich *Numerische Arbeiten* fortgesetzt. Die Schüler bearbeiten Aufgabenstellungen aus vielen unterschiedlichen Bereichen (z.B.: Geometrie, andere Fächer, Realsituationen), bei denen mit Gleichungen bis zum Grad zwei umgegangen werden muss. Außerdem finden sie die algebraische Lösung von Systemen mit zwei linearen Gleichungen in zwei Unbekannten und interpretieren dieses graphisch mit Hilfe von linearen Funktionen.
Im Teilbereich *Geometrische Arbeiten* wird weiter mit trigonometrischen Zusammenhängen gearbeitet. Zusätzlich zum Kosinus lernen die Schüler Sinus und Tangens eines Winkels als Längenverhältnis kennen. Ihre Betrachtung als Funktionen ist nicht vorgesehen.
In den Begleittexten wird darauf hingewiesen, dass die Arbeit mit Computern für das Verständnis von Funktionen sehr förderlich sein kann. (Programme France 3^{e}, 1998)

In der letzten Klasse des Collège werden erstmals nichtproportionale Funktionen studiert und der Funktionsbegriff genutzt. Eine allgemeine Funktionsdefinition ist aber genauso wenig vorgesehen wie die allgemeine algebraische Darstellung linearer Funktionen. Im Lehrplan selber werden Funktionen als Korrespondenz zwischen zwei Zahlen definiert, in den Begleittexten wird aber allgemeiner, von Korrespondenz zweier Elemente von zwei Mengen gesprochen. Diese allgemeinere Definition erlaubt und erfordert die Betrachtung von Definitions- und Wertemengen.
Lineare Funktionen werden in allen Darstellungsregistern untersucht und die Fähigkeit Übersetzungen zwischen den einzelnen Darstellungen durchführen zu können explizit als Ziel genannt. Es sollen Anwendungsaufgaben aus einer Vielzahl von Bereichen betrachtet werden. Auffallend ist, dass proportionale Funktionen weiterhin eine dominierende Rolle spielen, obwohl sich mit den linearen Funktionen ein vollkommen neuer Bereich eröffnet hat.
In dieser Klassenstufe scheinen keine Darstellung und kein Übersetzungsvorgang im

Vordergrund zu stehen.
Zu Grundvorstellungen lässt sich zumindest sagen, dass die genutzte Definition die Zuordnungs-Grundvorstellung anspricht. Aber auch Hinweise auf die Nutzung der Kovariations-Grundvorstellung tauchen mehrmals im Lehrplan auf, insbesondere bei der Untersuchung nichtlinearer Funktionen.

Aufbau des Lehrplans der 2^de^

Nach der 3^e^ teilen sich die Schüler auf die Lycées généraux und die Lycées technologiques auf, in denen in der 2^de^ noch im Wesentlichen übereinstimmende Lehrpläne gelten (siehe Abschnitt 6.1.2.2).
Der Lehrplan der 2^de^ erinnert im Aufbau an die Lehrpläne aus dem Collège. In einer kurzen Einleitung werden allgemeine Ziele des Mathematikunterrichts definiert, der Aufbau des Lehrplans beschrieben, eine Zeiteinteilung vorgeschlagen und auf die größer werdende Bedeutung von Computern im Mathematikunterricht hingewiesen.
Die Inhalte werden in drei Teilbereiche zusammengefasst: *Statistik*, *Berechung und Funktionen* und *Geometrie*. Für Statistik soll 1/8 der Unterrichtszeit verwendet werden, die beiden anderen Teilbereiche teilen sich die restliche Zeit.
Am Anfang jedes Teilbereiches werden die jeweils signifikanten Teile des Lehrplans des Collège in einer knappen Tabelle zusammengefasst. Außerdem werden die Ziele des Teilbereichs in einer kurzen Liste zusammengefasst und übergreifende Anweisungen (z.B.: Erlernen der Beweisführung, Nutzung von Software) gegeben.
Die Inhalte selber werden auf vier Seiten in Tabellen mit drei Spalten präsentiert. Ebenso wie in den anderen französischen Lehrplänen enthält die erste Spalte die Inhalte in Stichpunkten, die zweite die erwarteten Fähigkeiten und die dritte die Kommentare.
Am Schluss des Lehrplans werden auf einer Seite Studienthemen vorgeschlagen, mit denen einzelne Schüler oder die gesamte Klasse bestimmte Inhalte vertiefen können. Dabei wird darauf hingewiesen, dass es sich nur um Vorschläge handelt und die Lehrkraft durchaus auch andere Studienthemen wählen kann.
Der Lehrplan der 2^de^ wird durch ein ausführliches, 60 Seiten langes Begleitdokument ergänzt, in dem etwa die Motivation der Programme, die Organisation der mathematischen Aktivitäten in den Klassen oder der Platz der neuen Technologien im Unterricht im Detail erläutert werden. Des Weiteren werden zu den Inhalten aller Teilbereiche einige Präzisierungen gegeben, die auch auf mögliche Probleme hinweisen und konkrete Aufgabenbeispiele enthalten. Auf den letzten 40 Seiten des Begleitdokumentes werden Aufgabenvorschläge aus den Bereichen Statistik und Geometrie gegeben.
Dieser Lehrplan ist der einzige hier untersuchte französische Lehrplan, der zumindest eine grobe Vorgabe für die Zeiteinteilung enthält. Der Teilbereich *Numerische Arbeiten* aus dem Collège existiert nicht mehr und dessen Inhalte wurden auf die anderen Teilbereiche verteilt. Dafür wurde der Teilbereich *Statistik* aus *Organisation und Umgang mit Daten – Funktionen* ausgegliedert. Insgesamt werden die Inhalte im Vergleich zu den Lehrplänen des Collège etwas knapper dargestellt, auch wenn sie im Vergleich zu den bayerischen Lehrplänen weiterhin sehr ausführlich und mit vielen Hinweisen, Erklärungen und Beispielen versehen sind. (Programme France 2^de^, 2001; Programme France 2^de^ Document d'accompagnement, 2000)

Lehrplan der 2^{de}

Im Lehrplan der 2^{de} wird die allgemeine Funktionsdefinition eingeführt und es werden erstmals nichtlineare Funktionen nicht nur in Beispielen gesehen.
Die Schüler sollen anhand von Anwendungssituationen Überlegungen zu den Ausdrücken *Funktion sein von* und *abhängen von* anstellen und auch nichtfunktionale Beispiele sehen. Die betrachteten Funktionen hängen in der Regel von einer reellen Variablen mit gegebenem Definitionsbereich ab. Aber auch andere funktionale Abhängigkeiten (z.B.: diskrete Funktionen, Funktionen in zwei Variablen) sollen exemplarisch gezeigt werden. Die Schüler lernen hierbei auch den Begriff des Definitionsbereichs kennen und fassen Funktionen bei der Arbeit mit Taschenrechnern und Computern als Blackbox auf, die nach der Eingabe einer Zahl einen numerischen Wert ausgibt.
Funktionen sollen in allen Darstellungsregistern gesehen, und jetzt auch mit der Notation $f(x)$ ohne festgelegtem x genutzt werden. Selbst die Notation f kann jetzt verwendet werden, was auf eine erste Betrachtung des Objektes *Funktion* hindeutet. Auf die Schwierigkeiten beim Übergang zur Objekt-Grundvorstellung wird allerdings hingewiesen und festgestellt, dass dieser sich wohl über die Zeit in der 2^{de} erstrecken wird.
Einen wichtigen Platz nimmt das Studium von Variation ein. Mit Hilfe von Variationstabellen (siehe Tabelle 11) sollen steigende und fallende Abschnitte der Funktionen, sowie Maxima und Minima identifiziert werden. Da Variationstabellen im deutschen Schulsystem nicht genutzt werden sollen diesen nun kurz vorgestellt werden:

Im französischen Schulsystem werden ab der 2^{de} Variationstabellen bei der Arbeit mit Funktionen als Darstellungsmittel verwendet. Mit ihnen lässt sich knapp darstellen in welchen Bereichen die betrachtete Funktion steigt und fällt, was insbesondere zur Hinführung und Verdeutlichung von Ableitungen genutzt wird. Damit steht bei dieser Darstellungsart die Kovariations-Grundvorstellung im Vordergrund.
In der französischen Mathematikdidaktik werden Variationstabellen auch als Darstellungsregister gesehen und als solche analysiert (siehe etwa Amra, 2003). In der hier vorliegenden Arbeit werden Variationstabellen allerdings nicht in den Kreis der genauer untersuchten Darstellungsregister aufgenommen, da aus dieser Darstellungsart nur sehr wenige Informationen über den ihr zugrunde liegenden funktionalen Zusammenhang entnommen werden können, und sie daher bei genauen Analysen immer in Verbindung mit Darstellungen aus anderen Darstellungsregistern verwendet werden muss.
In deutschen Schulen und in der deutschen Mathematikdidaktik ist diese Art der Funktionsdarstellung unüblich. Folgende Tabelle zeigt die Variationstabelle einer Funktion f, die bei 1 ein Maximum und bei 3 ein Minimum hat.

x	-3		1		3		7
f	3	$\nearrow$	10	$\searrow$	-3	$\nearrow$	0

Tabelle 11: Beispiel einer Variationstabelle

In der 2de sollen die Schüler zu gegebenen Variationstabellen mögliche graphische Funktionsverläufe erstellen und wissen, dass eine steigende Funktion die Ordnung beibehält, was sie von einer fallenden Funktion unterscheidet.
Mit dieser Klassenstufe wird angefangen einen Grundschatz von Referenzfunktionen aufzubauen. Zusätzlich zu den schon in den letzten Jahren gesehenen linearen Funktionen lernen die Schüler $x \mapsto x^2$ und $x \mapsto \frac{1}{x}$ mit ihren Graphen und ihrem Variationsverhalten kennen. Weitere Funktionen wie $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x^3$ und $x \mapsto |x|$ können in Aufgaben bearbeitet werden, ohne dass sie jedoch im Detail analysiert werden sollen. Die graphischen Darstellungen von $x \mapsto \sin x$ und $x \mapsto \cos x$ werden erlernt und mit den bisher gesehenen trigonometrischen Zuordnungen in der Geometrie verbunden. Aber auch mit den linearen Funktionen soll weiter gearbeitet werden um die Proportionalität der Zuwächse zu erkennen. In diesem Zusammenhang wird darauf hingewiesen, dass diese Eigenschaft von nichtlinearen Funktionen eben nicht erfüllt wird.
Im Umgang mit dem algebraischen Register soll in der 2de weitestgehende Sicherheit erlangt werden. Formeln werden umgestellt, vereinfacht und die für die jeweilige Aufgabe am besten geeignete Art der algebraischen Darstellung ausgewählt. Gleichungen werden algebraisch und graphisch gelöst, wobei gegebenenfalls schon bekannte Referenzfunktionen genutzt werden sollen.
Die Studienthemen, die zum Bereich funktionalen Denkens vorgeschlagen werden beziehen sich auf die konkrete Untersuchung eines Funktionstyps und seiner Anwendungen, oder auf Variationsarbeiten verschiedener Art. (Programme France 2de, 2001, Programme France 2de Document d'accompagnement, 2000)

In dieser Klassenstufe werden wesentliche Inhalte zu funktionalem Denken in den Lehrplan aufgenommen. Funktionen werden als Zuordnungen definiert und erste Referenzfunktionen eingeführt. Auf realitätsnahe Aufgaben wird ebensoviel Wert gelegt, wie auf die Nutzung aller Darstellungsregister und auf Übersetzungen zwischen ihnen. Lediglich die Nutzung tabellarischer Darstellungen scheint in dieser Jahrgangstufe etwas weniger wichtig zu sein. Das graphische Darstellungsregister soll kritisch analysiert werden und ist zur Erfassung von Variation zu nutzen. Diese ist ein zentraler Bestandteil des Lehrplans und wird bei der Untersuchung von allen Referenzfunktionen verlangt.
Das zeigt, dass die Kovariations-Grundvorstellung trotz der Definition über die Zuordnungs-Grundvorstellung bei der Arbeit mit funktionalen Situationen eine sehr wichtige Rolle einnimmt. Eine erste Hinführung zur Objekt-Grundvorstellung wird in dieser Jahrgangsstufe in der Notation *f* gesehen. Es handelt sich jedoch allenfalls um einfachste Vorarbeiten. Inwieweit die Referenzfunktionen mit Parametern verbunden werden sollen, wird im Lehrplan nicht geklärt. Dies wird mit Hilfe der Lehrbücher zu untersuchen sein.

Ausblick

Nach der 2^de^ fächert sich das französische Bildungssystem sehr stark auf. Die Schüler können eine von vielen Ausbildungswegen einschlagen und an den verschiedenen Schulen nochmals zwischen unterschiedlichen Zweigen wählen. Auf dem Weg zum Baccalaureat général lernen die Schüler dann zu verschiedenen Zeitpunkten weitere Referenzfunktionen kennen und arbeiten mit Ableitungen und in manchen Zweigen auch mit Integralen. Auffällig dabei ist, dass Exponential- und Logarithmusfunktionen erst ein Jahr nach den Ableitungen eingeführt werden, und dass nur sehr spät mit allgemeinen Potenzfunktionen gearbeitet wird.

6.3.2.2 Die neuen Lehrpläne

In den Jahren 2002 bis 2004 sind in den Klassen CE2 bis CM2 des Zyklus der Vertiefung neue Lehrpläne in Kraft getreten. Diese enthalten bis auf wenige Ausnahmen dieselben Inhalte zu funktionalem Denken wie die in dieser Arbeit analysierten Lehrpläne. Es fällt jedoch auf, dass explizit erwähnt wird, dass Beispiele nichtproportionaler Situationen betrachtet werden sollen. Der Arbeit mit Darstellungen im graphischen und im tabellarischen Register scheint nun auch etwas mehr Gewicht verliehen worden zu sein.
Größte Änderung ist aber der Aufbau des Lehrplans und die Ausführlichkeit der Anweisungen. Proportionalitäten werden nun in einem Teilbereich mit dem Titel *Nutzung numerischer Daten* (Originalbezeichnung: *Exploitation de données numériques*) behandelt, der explizit auf die Arbeit mit Funktionen im Collège vorbereiten soll.
Die Inhalte werden nun wesentlich detailreicher dargestellt und in zusätzlichen Begleittexten noch einmal genauer anhand von Aufgabenbeispielen mit Musterlösungen erklärt. In den Begleittexten wird außerdem aufgeführt, zu welchem Zeitpunkt innerhalb des drei-Jahres-Zyklus die einzelnen Inhalte von den Schülern gesehen werden sollen. (Programme France CM2, 2002; Programme France CM2 Document d'application, 2002; Programme France CM2 Accompagnement Articulation, 2002).

Mit dem Schuljahr 2005/2006 wurden, anfangen mit der 6^e^, neue Lehrpläne am Collège eingeführt. Da die offiziellen neuen Lehrpläne für die 3^e^ noch nicht veröffentlicht wurden, wird in dieser Arbeit das Lehrplanprojekt für diese Klassenstufe analysiert. Die Lehrplanprojekte stimmen erfahrungsgemäß stark mit den tatsächlich veröffentlichten Lehrplänen überein, wie bei den Lehrplanprojekten der 6^e^ bis 4^e^ gesehen werden kann.
Die neuen Lehrpläne erinnern stark an die alten. Nach einer zusammenfassenden Einführung werden die Inhalte, wie im alten Lehrplan, in drei Spalten erklärt. Allerdings hat die dritte Spalte deutlich an Umfang gewonnen und trägt nun den Titel *Beispiele von Aktivitäten, Kommentare* (Originalbezeichung: *exemples d'activités, commentaires*) und nicht nur *Kommentare*. Tatsächlich finden sich jetzt zu den einzelnen Inhalten Beispielaufgaben, die die Inhalte noch genauer erklären. Außerdem sind nun nicht mehr drei, sondern vier Teilbereiche vorgesehen, wobei der Teilbereich *Organisation und Umgang mit Daten – Funktionen* von der letzten Stelle des Lehrplans an die erste vorgerückt ist. Bisher wurden keine Begleitdokumente zu den neuen Lehrplänen veröffentlicht. (Programme France 6^e^, 2004; Programme France 5^e^ et 4^e^, 2005; Programme France Collège Projet, ohne Jahr)

In der 6^e^ erscheinen gegenüber den Lehrplänen von 1995 keine neuen Inhalte zu funktionalem Denken. Allerdings wird der Arbeit mit Proportionalitäten nun etwas mehr Platz im Lehrplan eingeräumt wobei eine rein numerische Behandlung weiterhin nicht in dieser Jahrgangsstufe vorgesehen ist. Die gegebenen Aufgabenbeispiele deuten auf die Nutzung der Kovariations-Grundvorstellung hin (z.B.: dreimal mehr Objekte kosten dreimal mehr; Der Maßstab macht 200-mal kleiner). (Programme France 6^e^, 2004)

In den neuen Lehrplänen der 5^e^ und 4^e^ sind im Bereich von funktionalem Denken keine wichtigen Änderungen gegenüber den Vorgängerlehrplänen zu finden. Lediglich die Reihenfolge, bzw. die Plätze im Lehrplan wurden variiert. (Programme France 5^e^ et 4^e^, 2005)

Das neue Lehrplanprojekt für die 3^e^ sieht ein paar Änderungen vor, die sich auf die Ausbildung der funktionalen Denkweise beziehen. Im Gegensatz zum Vorgängerlehrplan wird auf die Funktionsdefinition hingearbeitet, obwohl eine allgemeine Funktionsdefinition weiterhin explizit nicht in den Lehrplan aufgenommen wird. Die Notationen *f(x)* und $x \mapsto ax + b$ werden von den Schülern nicht nur für bekannte *x* bzw. *a* und *b* gesehen. Bilder von Zahlen sollen nicht nur mit Hilfe der algebraischen, graphischen und tabellarischen Darstellungen von linearen Funktionen bestimmt werden, sondern auch in allgemeiner Form angegeben werden. Außerdem soll jetzt bei der Lösung von Systemen mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten auch nach einer graphischen Lösung gesucht werden. Die restlichen Inhalte zu funktionalem Denken sind teilweise wörtlich, aus dem Lehrplan von 1998 entnommen.
Es handelt sich hierbei noch um ein Lehrplanprojekt, so dass sich vor der Veröffentlichung des endgültigen Lehrplans für die 3^e^, der im Schuljahr 2008/2009 in Kraft treten wird, möglicherweise noch einige Änderungen ergeben werden. Das vorliegende Projekt deutet darauf hin, dass die tatsächliche Funktionsdefinition ein Stück weiter in die 3^e^ vorgezogen wurde, ohne dass dieser Schritt in voller Konsequenz vollzogen wird. (Programme France Collège Projet, ohne Jahr)

6.3.2.3 Zusammenfassung

Die hier analysierten französischen Lehrpläne ordnen sich in einen relativ stabilen historischen Kontext ein, in dem sich seit 1977 an der wesentlichen Abfolge nicht viel geändert hat. Die Untersuchung von Variation hat ebenso wie die späte Einführung nichtlinearer funktionaler Zusammenhänge in den französischen Lehrplänen Tradition (siehe Abschnitt 6.2.2). Mengentheoretische Überlegungen, die Anfang der 80er Jahren aktuell waren, sind wieder vollkommen aus den Lehrplänen verschwunden (Ausnahme: das Begleitdokument der 3^e^).
Die französischen Mathematiklehrpläne für Klassenstufen CM2 bis 2^de^ sehen vor, dass die Schüler am Ende dieser Ausbildungszeit den Funktionsbegriff und erste Referenzfunktionen kennen. Sie sollen lernen mit funktionalen Situationen aus vielen verschiedenen Gebieten zu arbeiten, mit den unterschiedlichen Darstellungsregistern und Übersetzungen umzugehen und die Darstellungen auch kritisch zu bewerten.
Hinweise auf die Arbeit mit der Kovariations- und auch mit der Zuordnungs-Grundvorstellung sind im Lehrplan zu finden. Die Kovariations-Grundvorstellung scheint jedoch in vielen Fällen stärker angesprochen zu werden, obwohl Funktionen in der 2^de^ als Zuordnungsvorschrift definiert werden. Die Nutzung des Objektes Funktion oder hinführende Arbeiten, wie das Zusammenfassen der Funktionen zu Klassen, sind nicht vorgesehen.

Lediglich die Einführung der Notation *f* kann als erster Schritt hin zur Ausbildung der Objekt-Grundvorstellung gesehen werden.
Es fällt auf, dass sich die Hinführung zur Funktionsdefinition explizit über drei bzw. vier Jahre erstreckt, in denen nur proportionale bzw. proportionale und lineare Funktionen behandelt werden und eine formale Definition strikt ausgeschlossen wird. Während dieser Hinführung werden den Schülern zwar einige Beispiele nichtlinearer funktionaler Zusammenhänge gezeigt, von einer Vorbereitung der Funktionsdefinition als vereinigender, übergeordneter mathematischer Begriff für eine Vielzahl verschiedener funktionaler Zusammenhänge kann aber nicht die Rede sein.
Nach der Definition von Funktionen als Zuordnungen wird sehr intensiv mit der Kovariations-Grundvorstellung gearbeitet. Die Anzahl der untersuchten Funktionstypen ist allerdings relativ beschränkt. In der 2de werden mit $x \mapsto x^2$ und $x \mapsto \frac{1}{x}$ erstmals nichtlineare Funktionen intensiv studiert. Mit den Lehrbüchern ist zu untersuchen, inwieweit etwa quadratische Funktionen im Allgemeinen betrachtet werden sollen, oder ob eine Beschränkung auf einfache Parabeln stattfindet. Von den trigonometrischen Funktionen sind nach der 2de nur Sinus- und Kosinusfunktionen bekannt, Exponential- oder Logarithmus-funktionen fehlen ganz.
Durch das lange Arbeiten mit proportionalen Situationen und linearen Funktionen ist zu erwarten, dass das Überspringen die epistemologische Hürde der linearen Fixierung (siehe Abschnitt 4.3) nicht erleichtert, womöglich sogar erschwert wird. Eine andere Quelle möglicher Schwierigkeiten ist die Definition von Funktionen durch Ansprechen der Zuordnungs-Grundvorstellung und die anschließende sehr starke Nutzung der Kovariations-Grundvorstellung. Ähnlich wie zur Zeit der mengentheoretischen Definition, kann dies bei einigen Schülern zur Abnabelung des concept images von der concept definition und damit zu Konflikten führen (siehe Abschnitt 3.1.6)

Die neuen Lehrpläne, die zurzeit in Kraft treten, sehen kaum Änderungen vor. Als wichtigste inhaltliche Änderung ist zu nennen, dass scheinbar Vorbereitungen für das Vorziehen der Funktionsdefinition in die 3^{e} getroffen wurden.

Im nächsten Abschnitt können nun die Lehrpläne von Bayern und Frankreich miteinander verglichen werden.

6.3.3 Vergleich der intendierten Curricula

In diesem Kapitel wurden die Lehrpläne von Deutschland am Beispiel von Bayern und von Frankreich analysiert. In einer ersten Annäherung fallen viele Ähnlichkeiten auf, die die Lehrpläne miteinander verbinden. Genauere Analysen zeigen allerdings, dass von den Lehrplanautoren an vielen Stellen unterschiedliche Schwerpunkte gesetzt wurden.

Die Lehrpläne beider Länder sind inputorientiert. Sie schreiben vor, welche Inhalte in den jeweiligen Jahrgangsstufen behandelt werden sollen. Allerdings sind die Lehrpläne von Frankreich wesentlich umfangreicher. Sie enthalten viel mehr Anweisungen für den tatsächlichen Unterricht und auch deutliche Verbote für bestimmte Inhalte. In den Begleitdokumenten werden bestimmte Inhalte, Verbindungen zu anderen Unterrichtsfächern und allgemeine Hinweise noch detailreicher erklärt und, insbesondere in den neuen Lehrplänen, auch Aufgabenbeispiele gegeben.

Einerseits werden den Schulbuchautoren und Lehrern durch die Knappheit der Darstellung der bayerischen Lehrpläne mehr Freiheiten bei der tatsächlichen Ausgestaltung eingeräumt. Andererseits können eben durch diese Knappheit wichtige Details unklar bleiben oder Verbindungen zu anderen Inhalten nicht erstellt werden. Ein Grund für die Ausführlichkeit der französischen Lehrpläne mag sein, dass die Schulbücher in Frankreich vor dem Schuleinsatz nicht von den Behörden genehmigt werden müssen (siehe Kapitel 7). Damit stellt der Lehrplan in Frankreich die wichtigste Möglichkeit der Einflussnahme auf das Curriculum dar.

Was Inhalte betrifft, so sind Ähnlichkeiten in der generellen Abfolge auszumachen. In beiden Ländern wird früh mit dem Betrachten von Proportionalitäten begonnen und alle Darstellungsregister werden eingeführt. Im Rahmen der Betrachtung von linearen Funktionen werden Funktionen nach einer mehrjährigen Phase der Arbeit mit Proportionalitäten definiert. Anschließend wird von den Schülern, beginnend mit quadratischen Funktionen, ein Grundschatz an Funktionen aufgebaut. Die Arbeit mit allen Darstellungsregistern und insbesondere die Anbindung an die Realität werden in beiden Ländern als wichtig erachtet. Die Ausbildung der Objekt-Grundvorstellung gehört dagegen in beiden Ländern übereinstimmend nicht zum Lehrplan der Sekundarstufe I.

Bei der Analyse fallen jedoch auch Unterschiede in der Wahl und Abfolge der Inhalte und dem Zeitpunkt ihrer Einführung auf.
In Frankreich wird sehr lange nur mit Proportionalitäten und linearen Funktionen gearbeitet, wobei letztere erst in der 3^{e} dazukommen. Nichtlineare funktionale Zusammenhänge werden erst in der 2de ausgiebig studiert, nachdem der allgemeine Funktionsbegriff eingeführt wurde.
In den bayerischen Lehrplänen wird im Gegensatz dazu sehr früh mit nichtlinearen funktionalen Zusammenhängen gearbeitet. Zeitgleich mit der Proportionalität in der 6. Klasse am Gymnasium, oder ein Jahr nach der Proportionalität in der 8. Klasse an der Hauptschule werden indirekt proportionalen Zuordnungen studiert.
Betrachtet man zum Zeitpunkt der 3^{e} nur die eingeführten Funktionstypen, so stellt man fest, dass bayerische Hauptschüler zwar keine linearen Funktionen gesehen haben, aber dafür, im Gegensatz zu den französischen Schülern, indirekt proportionale Zusammenhänge kennen. Schüler der Realschulen und des Gymnasiums kennen zu diesem Zeitpunkt schon die Funktionsdefinition und teilweise auch quadratische und Wurzelfunktionen.
Auch am Ende der Sekundarstufe I sind Unterschiede festzustellen. Die an den bayerischen Schulen verbliebenen Schüler kennen alle zumindest Beispiele von exponentiellem Wachstum. Am Gymnasium und im mathematisch-technischen Zweig der Realschule werden die allgemeinen Exponential- und Logarithmusfunktionen behandelt und auch Potenzfunktionen, Umkehrfunktionen und die trigonometrischen Funktionen im Allgemeinen studiert. Bis auf die Sinus- und Kosinusfunktion und spezielle Potenzfunktionen sind all diese Funktionstypen den französischen Schülern am Ende der Sekundarstufe I unbekannt.
Bei der Betrachtung der studierten Funktionstypen fällt also auf, dass der französische Lehrplan eine spätere Einführung von weniger Funktionstypen vorsieht. Manche Funktionen, wie etwa die Exponentialfunktion, die in den deutschen Bildungsstandards für den mittleren

Schulabschluss vorgesehen sind (siehe Abschnitt 6.3.1.4.2), tauchen überhaupt nicht auf.
Im Gegensatz zum deutschen Lehrplan sieht der französische eine intensive Befassung mit Variationen und damit der Kovariations-Grundvorstellung vor. Außerdem wird dort das algebraische Register nur langsam eingeführt und erst spät mit funktionalen Situationen verbunden.

Der Vergleich der zukünftigen Lehrplanentwicklungen zeigt, dass sich die Lehrpläne beider Länder sowohl im Aufbau, als auch bei den Inhalten nur wenig verändern. Eine Entwicklung auf einander zu findet allem Anschein nach nicht statt, sodass, trotz immer stärker werdender europäischer Verknüpfung und großen internationalen Vergleichsuntersuchungen, auf absehbare Zeit wesentliche Unterschiede in den Lehrplänen bestehen bleiben werden.

Nach diesen Befunden können unter Anderem folgende Fragen gestellt werden:
Wird in Frankreich nicht eine proportionale Fixierung, trotz der gesehnen Gegenbeispiele, gefördert, wenn die Schüler mehrere Jahre lang hauptsächlich nur mit ihr arbeiten?
Ist nicht auch in Frankreich eine frühere Beschäftigung mit mehr Funktionstypen möglich, wenn dies beispielsweise in Deutschland gemacht wird?
Führt die intensive Befassung mit der Kovariations-Grundvorstellung in Frankreich nicht zu Problemen, da Funktionen später als Zuordnung definiert werden?

Diese Fragen können auch anders formuliert werden:
Führt in Deutschland die frühe Beschäftigung mit vielen Funktionstypen nicht zu Problemen, da die Schüler zu deren Aufnahme noch nicht bereit sind?
Haben deutsche Schüler nicht eine zu wenig ausgebildete Kovariations-Grundvorstellung, wenn sie sich deutlich weniger mit Variationen befassen, als die Schüler in Frankreich?

Ein Ziel im weitern Verlauf dieser Arbeit wird sein diese Fragen zu beantworten.

In diesem Kapitel wurde versucht die Fragen zu beantworten, die sich auf das intendierte Curriculum beziehen. Präzisierungen zu vielen Einzelheiten, wie der tatsächlichen Einbeziehung von Realsituationen oder dem Gewicht der verschiedenen Grundvorstellungen können mit Hilfe der Analyse des potentiellen Curriculums gegeben werden. Diese ist das Ziel des nächsten Kapitels.

6.3.4 Tabellarische Übersicht

	Bayern – Hauptschule	**Bayern – Realschule** Wahlpflichtfächergruppe 1	**Bayern – Realschule** Wahlpflichtfächergruppe 2/3	**Bayern – Gymnasium**	**Frankreich**
Davor - Avant	- Gerundete Zahlen in Säulendiagrammen darstellen - Informationen aus Tabellen, Schaubildern und Diagrammen entnehmen - einfache Maßstäbe				- Tabellen Diagramme und Grafiken lesen, benutzen, erstellen - Erste Einführung in die **Proportionalität** (Prozentrechnung, Maßstab, einfache Einheitenwechsel)
5. – CM2	- Schaubilder deuten und erstellen - einfache Gleichungen - Maßstäbe	- Größen in Anwendungen messen und darstellen - Dreisatz zur Vorbereitung auf Proportionalität und Zuordnung - Maßstab		- In Anwendungsaufgaben: Erfassen und Bearbeiten verbal gegebener Zusammenhänge - Maßstab	
6. – 6e	- Informationen aus Tabellen und Schaubildern entnehmen und mathematisch aufbereiten - Ansatz von Termen	- **Proportionalität** anhand von Anwendungsaufgaben - Proportionalitätsfaktor - Einsatz von Tabellen, Diagrammen und Computer - Prozentbegriff - numerische und graphische Wertetabelle zu einfachen Termen; Definitionsmenge		- **Proportionalität** und **indirekte Proportionalität** - Untersuchung der Graphen - Übersetzung von und zur algebraischen Darstellung - Prozent und Zinsrechnung	- Arbeit mit Proportionalität: - Nichtproportionale Beispiele - Arbeit in den Darstellungsregistern - Übersetzungen von und zur Realität - Benutzung von „**en fonction de**, **est fonction de**“ - KEINE Definition von Funktion
7. – 5e	- Zuordnungen untersuchen, darstellen (Tabelle, Schaubilder, Koordinatensystem) - **proportionale Zuordnungen** in allen Darstellungen - Übersetzungen von und zur Formeldarstellung - Prozentbegriff und Anwendungsaufgaben	- Proportionalität und **indirekte Proportionalität.** - Arbeit insbesondere mit Realität und Formeldarstellung - Tabellen, Diagramme und Graphen zur Veranschaulichung - Prozent und Zinsrechung - numerische und graphische Wertetabelle zu Termen		- Terme aufstellen, auswerten und interpretieren - Lösen linearer Gleichungen	- Proportionalität vertiefen, Proportionalitätsfaktor - Arbeit mit Darstellungsregistern. Insbesondere mit Tabellen. Keine Verbindung von Proportionalität und Formeldarstellung - Übersetzungen von und zu Tabellen - KEINE Definition von Funktion

8. – 4e	- Zusammenhänge in Lebenssituationen erkennen - Proportionalität und **umgekehrte proportionale Zuordnungen** - Schaubilder lesen, zeichnen, interpretieren	- **Funktionen** als Relationen - Arbeit in allen Registern. - Aus Proportionalität folgen **lineare Funktionen** - Achsenparallele Geraden - Umkehrrelation und **Umkehrfunktion** - **Funktionen der indirekten Proportionalität** mit Asymptoten - Einfluss der Parameter in den jeweiligen Gleichungen - Terme: Aus der Belegung der Variable folgt der Termwert - quadratische Terme und Extremwerte	- Terme: Aus der Belegung der Variable folgt der Termwert - quadratische Terme und Extremwerte	- **Funktionen** als Zuordnungs-vorschrift - **lineare Funktionen** - graphische Bedeutung der Koeffizienten - Intervallweise lineare Funk-tion und Betragsfunktion. - Formeln als zentrale Darstellung - 2 lineare Gleichungen mit 2 Unbekannten graphisch und algebraisch lösen	- Proportionalität: diskrete graphische Darstellung - Gegenbeispiele - Übersetzungen von und zu Realsituationen - Kovariations-GV verstärkt angesprochen - Weiter KEINE Definition von Funktion
9. – 3e	- Anwendungsaufgaben zu proportionalen und umgekehrt proportionalen Zusammenhängen Tabel-lenkalkulation Veranschaulichung - funktionaler Zusammenhang zwischen Fläche und Seitenlänge im Quadrat - Prozentrechnung, Wachstumsfaktor, Zinnsrechnung.	- **Quadratische Funktionen**, Extremwertprobleme, Gleichung von Parabel ermitteln, Scheitelpunktform, Scharengleichung - **Wurzelfunktion** als Umkehrfunktion - Flächeninhalte: funktionaler Zusammenhang, Extremwerte - Kovariations-GV mit Graphen - 2 lineare Gleichungen mit 2 Unbekannten graphisch und algebraisch lösen - quadratische Gleichungen	- **Funktionen** als Relationen - Arbeit in allen Registern. - Aus Proportionalität folgen **lineare Funktionen** - Achsenparallele Geraden - Flächeninhalte: funktionaler Zusammenhang, Extremwerte - 2 lineare Gleichungen mit 2 Unbekannten graphisch und algebraisch lösen	- **Quadratische Funktionen** - Extremwertprobleme - Übersetzung zwischen Formel und Graph - **Wurzelfunktion** als Umkehrfunktion - quadratische Gleichungen	- **Funktionsbegriff in Beispielen** als Zuordnung, aber KEINE formale Definition - Proportionale und **Lineare Funktionen:** $x \mapsto ax+b$ mit festem a und b. - Ihre Darstellung in allen Registern und Übersetzungen zwischen den Registern - keine allgemeine algebraische Darstellung - 2 lineare Gleichungen mit 2 Unbekannten graphisch und algebraisch lösen

10. – 2de	- **Funktionsbegriff** als Zuordnung - **lineare Funktionen** in allen Darstellungen. - **quadratische Funktionen** in allen Darstellungen. (Scheitelpunktform, Schnittpunkte) - lineare Gleichungssysteme, quadratische Gleichungen graphische und algebraisch lösen - Anwendungsaufgaben zu Prozentualem Wachstum - trigonometrische Funktionen im Dreieck	- **Potenzfunktionen** und ihre Umkehrbarkeit - **Exponential**- und **Logarithmusfunktionen** - Arbeit mit deren Graphen - Wechsel zwischen algebraischer und graphischer Darstellung , bei Parametervariationen - **Trigonometrische Funktionen** in der Geometrie mit Graphen	- **Quadratische Funktionen**, Extremwertprobleme, Gleichung von Parabel ermitteln, Scheitelpunktform - **Funktionen der indirekten Proportionalität** mit Asymptoten - **Beispiele von Exponentialfunktionen**, Definition und Graph - Nur **Graphen der Trigonometrischen Funktionen** - quadratische Gleichungen	- **Potenzfunktionen** und ihre Umkehrbarkeit - Klassifizierung in Grundtypen: Parabeln und Hyperbeln n-ter Ordnung - **Exponential**- und **Logarithmusfunktionen** - Arbeit mit deren Graphen - Umfang und Fläche von Kreis - Volumenformeln - **Trigonometrische Funktionen** in der Geometrie mit Graphen - Funktionenschar *y = a*sin (bx+c)* - Übersetzung zwischen Formel und Graph - Kovariations-GV bei Grenzwertbetrachtungen	- Allgemeiner **Funktionsbegriff**. - Funktionen in einer reellen Variablen, Beispiele diskreter Funktionen und Funktionen in zwei Variablen. Nichtfunktionale Beispiele - Alle Darstellungsregister, insbesondere das graphische - Notation *f(x)* und *f* mit Übergang zum Objekt - **Variationstabellen**, Untersuchung von Maxima, Minima unterstützen die Kovariations GV - **Referenzfunktionen** kennen: - $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \sin x$ und $x \mapsto \cos x$, jeweils mit Graph und Variationsverhalten - In Aufgaben werden $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x^3$ $x \mapsto \lvert x \rvert$ entdeckt - Graphisch Gleichungen lösen

7 Analyse und Vergleich der potentiellen Curricula

Im letzten Kapitel wurden die intendierten Curricula von Deutschland und Frankreich analysiert und miteinander verglichen. Dabei sind einige Unterschiede im Aufbau sowie in der Auswahl und Abfolge der Inhalte festgestellt worden. Zu manchen Punkten, insbesondere der Ausbildungsmöglichkeit von Grundvorstellungen, konnten anhand der Lehrpläne keine Detailanalysen durchgeführt werden.
Mit Hilfe einiger im Mathematikunterricht von Bayern und Frankreich genutzter Schulbücher wird in diesem Kapitel versucht diese offen gebliebenen Fragen zu beantworten. Außerdem wird untersucht, wie die Inhalte der Lehrpläne in den Schulbüchern tatsächlich umgesetzt werden. Hierdurch sind Erkenntnisse darüber zu erwarten, welche Möglichkeiten den Schülern für eine Ausbildung der funktionalen Denkweise gegeben werden.

Schulbücher müssen in allen Bundesländern Deutschlands von den zuständigen Regierungsstellen genehmigt werden bevor sie für den Einsatz in den Schulen zugelassen sind. Es ist somit anzunehmen, dass sich die Intentionen und behandelten Inhalte der bayerischen Lehrpläne und der bayerischen Schulbücher nicht wesentlich voneinander unterscheiden.
In Frankreich gibt es keine solchen Genehmigungsverfahren. Die Lehrer und Schulen können selbstständig aus allen auf dem Markt angebotenen Büchern das Buch auswählen, das sie im Unterricht verwenden wollen. Aus diesem Grund sind hier größere Unterschiede zwischen dem intendierten und dem potentiellen Curriculum möglich.
Der Staat hat seine Einflussmöglichkeiten mit dem intendierten Curriculum ausgeschöpft. Es liegt im Ermessen der Schulbuchautoren, inwiefern sie das intendierte Curriculum respektieren, oder Inhalte hinzufügen, ändern oder weglassen wollen. Die Lehrer ihrerseits sind natürlich verpflichtet das intendierte Curriculum umzusetzen, wobei das genutzte Schulbuch aber sicherlich eine leitende Rolle spielt. Somit besteht in Frankreich eine spezielle Verwebung der intendierten und potentiellen Curricula, die bei den nun folgenden Analysen stets beachtet werden muss.

In den folgenden Abschnitten werden einige Schulbücher der Klassen 5 bis 10 in Bayern bzw. CM2 bis 2de in Frankreich analysiert. Für Bayern werden je eine Schulbuchserie für Hauptschule, Realschule und Gymnasium betrachtet. In allen drei Fällen gehören die gewählten Schulbücher im jeweiligen Schultyp zu den am weitesten verbreiteten. Für die Hauptschule wird *Mathe aktiv 5-9 für bayerische Hauptschulen* (Rinkens & Wynands, 1997-2001) und *Formel 10* (Vogel, Vollrath & Haubner, 2002), für die Realschule *Mathematik für Realschulen. 5.-10. Jahrgangsstufe* (Habler et al., 1994-2002) und für das Gymnasium *Mathematik 5-10 Algebra/Geometrie* (Rieck, 1994; Kunesch & Rieck, 1995; Feuerlein, Titze & Walter, 1992a-d; Kratz, 1993a-c; Kratz, Schweiger & Wörle, 1994) analysiert.
In Frankreich werden alle Schüler fast im gesamten betrachteten Zeitraum gemeinsam unterrichtet, so dass sie alle Schulbücher derselben Serien benutzen können. Um dennoch einen breiteren Einblick in das potentielle Curriculum von Frankreich zu bekommen und um dem Umstand Rechnung zu tragen, dass Schulbücher in Frankreich nicht genehmigt werden müssen, wodurch möglicherweise größerer Unterschiede entstehen, werden hier zwei Schulbuchserien analysiert. Bei diesen handelt es sich auch um Serien, die beide stark in den

Klassenzimmern vertreten sind. Für den CM2 werden *Cap maths CM2* (Charnay, Combier & Dussuc, 2004a-b) und *J'apprends les maths, manuel CM2* (Brissiaud, 2000a-b), für das Collège *Collection Triangle, Mathématiques 6^e-3^e* (Chapiron, Mante, Mulet-Marquis & Pérotin, 2001-2005) und *Collection Cinq sur Cinq, Maths 6^e-3^e* (Delord & Vinrich, 2000-2003), und für die 2^de *Déclic 2^de Mathématiques* (Misset, Turner & Lotz, 2004) und *Transmath 2^de* (Antibi, Barra, & Morin, 2004) untersucht.

Die potentiellen Curricula werden in mehreren Schritten analysiert. Zuerst werden die äußere Form und der Aufbau der jeweiligen Lehrbücher betrachtet. Anschließend werden die zentralen Inhalte für die Ausbildung der funktionalen Denkweise für jede Klassenstufe separat dargestellt und analysiert. Die Betrachtung aller Klassenstufen einer Schulart wird mit einer zusammenfassenden Übersicht abgeschlossen.

7.1 Potentielles Curriculum von Bayern

In diesem Abschnitt wird das potentielle Curriculum von Bayern analysiert. Zuerst wird auf die Schulbücher der Hauptschule, dann auf die der Realschule und zuletzt auf die der Gymnasien eingegangen, bevor ein abschließender Überblick über gesamte potentielle Curriculum Bayerns gegeben wird.

7.1.1 Hauptschule

Aufbau des Hauptschulbuches

Für die Klassenstufen 5 bis 9 der Hauptschule wird das Schulbuch *Mathe aktiv* untersucht. Beim Betrachten der äußeren Form des Buches sticht hervor, dass die große Mehrheit der Seiten eine Aufgabenaufzählung enthält und dass die Aufgaben oftmals mit Illustrationen versehen sind.

Der Aufbau des Buches orientiert sich sehr stark am Aufbau des Hauptschullehrplans. In fast allen Jahrgangsstufen wird nach dem Inhaltsverzeichnis eine kurze Wiederholung einiger Inhalte früherer Jahrgangstufen angeboten. Anschließend folgt die Reihenfolge der Kapitel der Reihenfolge der Unterpunkte des Lehrplans, wobei die Überschriften oft wörtlich übernommen werden. Die Bücher werden mit einer Formelsammlung, der Lösung bestimmter Knobelaufgaben und einem Stichwortverzeichnis abgeschlossen. Da die Lehrpläne nicht abgedruckt werden, kann man sich nur anhand des Inhaltsverzeichnisses einen Überblick über die zu behandelnden Inhalte machen. Es ist auch keine Gebrauchsanleitung oder Erläuterung zum Aufbau der Bücher angegeben.

Die Kapitel der Bücher bestehen aus Aufgabensammlungen zu den jeweiligen Teilbereichen. Einführend wird eine etwas längere Anwendungsaufgabe mit einem großen Photo präsentiert, die das Kapitel motivierend einführt. Diese einleitenden Aufgaben dienen der Hinführung an die neuen Inhalte und sind manchmal mit Beispielrechnungen oder kurzen Merkregeln versehen. Diese begleiten auch sonst, in Kästen vom restlichen Text abgehoben, die Einführung neuer Inhalte oder neuer Methoden. In diesen Büchern ist eine von den Aufgaben abgekoppelte, theoretische oder beispielhafte Erklärung der Inhalte, genauso wenig wie eine Beschreibung und Vorführung der Methoden zu finden.

Zwischen den Aufgaben, die in Typen aufgeteilt unter Überschriften aufgelistet werden (z.B.:

Grundwert gesucht, Quotientengleiche Wertepaare), finden sich einige Aufgaben, deren Lösungen am Rand der Seite, in zufälliger Reihenfolge angegeben wird. Gegen Ende der meisten Kapiteln werden Aufgaben *zum knacken und knobeln* und Wissenstests angeboten, deren Ergebnisse am des Buches angegeben sind. Außerdem finden sich in vielen Kapiteln auf ein bis zwei Seiten abgesetzte, längere Aufgaben, die sich ausführlich mit einem Thema beschäftigen (z.B.: Energie sparen im Haushalt, Modell eines Stadttors).

Inhalte des Hauptschulbuches der 5. Klasse

Im Schulbuch der 5. Klasse lassen sich nur sehr wenige Inhalte mit Bezug zur funktionalen Denkweise finden. Wie im Lehrplan vorgesehen, werden Gleichungen der Form $ax+b=c$ studiert, und zusätzlich auch $a:x+b=c$ betrachtet (jeweils mit ganzen Zahlen). Die Schüler sollen zuerst in Aufgaben innerhalb des algebraischen Registers lernen mit der unbekannten Zahl x umzugehen und dann in Anwendungsaufgaben Gleichungen aufstellen und lösen. Ausgangspunkt der Übersetzungsvorgänge ist dabei stets die Realität.
Hier sei nochmals daran erinnert, dass in dieser Arbeit unter Realität ein Realmodell verstanden wird, bei dem schon wesentliche Vereinfachungen der Realsituation durchgeführt wurden (siehe Abschnitt 3.2.1). Schulbuchaufgaben aus Deutschland und Frankreich sind typische Beispiele für Aufgaben, bei denen solche Vereinfachungen bereits durchgeführt wurden.
Die Arbeit mit Gleichungen befindet sich auf den letzten Seiten des Kapitels *Grundrechenarten, Terme, Gleichungen* und nimmt keinen großen Platz ein. Im letzten Kapitel *Sachrechnen* finden sich dann noch ein paar Aufgaben zu Gleichungen, wobei auch dort die Realität immer die Ausgangsdarstellung ist.
Hier befindet sich außerdem ein Unterpunkt *Zuordnung Ware-Preise,* in dem mehrere einfache Aufgaben zu proportionalen Situationen vorgeschlagen werden. Dabei wird auch untersucht, wie sich beispielsweise der Preis bei Verdoppelung der Ware entwickelt, was zusätzlich zur Zuordnungs-Grundvorstellung, die Kovariations-Grundvorstellung anspricht. Die Arbeit mit Schaubildern und der Darstellung großer Zahlen hat in dieser Klassenstufe noch sehr wenig mit dem später genutzten graphischen Register zu tun, trainiert aber die Fähigkeiten der Schüler Übersetzung von der Realität in eine andere Darstellung durchzuführen. (Rinkens & Wynands, 2001a)

Wie im Lehrplan stehen auch im Schulbuch der 5. Klasse die Vorarbeiten zu Funktionen nicht im Mittelpunkt. Alle im Lehrplan vorgesehenen Inhalte werden behandelt und ihnen einen weiterer Gleichungstyp und erste Aufgaben zur Proportionalität hinzugefügt.
Die Übersetzungsaufgaben zu Gleichungen haben die Realität als Ausgangspunkt. Das bedeutet, dass der Modellierungskreislauf in der 5. Jahrgangsstufe stets von der Realität ausgehend zum algebraischen Register und zurück durchlaufen wird.

Inhalte des Hauptschulbuches der 6. Klasse

Mathe aktiv 6 führt die im Vorjahr angefangene Arbeit mit Gleichungen fort. In dieser Klassenstufe werden Variablen, die schon im Vorjahr benutzt wurden, als Platzhalter eingeführt. Im Rahmen dieser Einführung werden Wertetabellen einfacher Terme der Form

ax+b (mit ganzen Zahlen *a* und *b*) erstellt, die für verschiedene Unbekannte ausgewertet werden sollen. Implizit wird also mit der Zuordnungs-Grundvorstellung bei linearen Zusammenhängen gearbeitet. Im letzten Kapitel werden außerdem einfache Sachaufgaben zu proportionalen Zuordnungen bearbeitet, ohne dass dieses thematisiert wird.
Bei Übersetzungen ins tabellarische Register die von Realsituationen ausgehen wird der Term meist vorgegeben, so dass nicht von einer eigenständigen Übersetzung von der Realität zur tabellarischen Darstellung gesprochen werden kann. Übersetzungen von der Realität finden allerdings beim Lösen von Gleichungen statt, die entweder mathematisch oder in Sachkontexten gegeben werden. Bei den Übersetzungsprozessen sollen sich die Schüler auch mit Streifenbildern oder Waagen helfen, um die Gleichungen besser zu visualisieren.
Es werden Terme der Formen *ax+b=c* und *x:a+b=c* (mit Brüchen) behandelt, deren Ursprung auch in der Geometrie sein kann. Eine Besonderheit stellen Aufgaben dar, die eine Realsituation in einem Bild darstellen, aus dem alle Informationen, bis hin zur Fragestellung entnommen werden müssen. (Rinkens & Wynands, 1998)

Der Platz, der insgesamt für die Vorarbeiten zu Funktionen im Schulbuch vorgesehen ist, ist relativ gering. Wie nach der Analyse des Lehrplans zu erwarten war, steht die algebraische Darstellung mit der Einführung von Variablen und dem Aufstellen und Lösen von Gleichungen im Mittelpunkt. Aber es werden auch ein paar tabellarische Darstellungen erstellt, so dass ein neues Register mit neuen Übersetzungsvorgängen hinzukommt. Die während der Ausführungen zu den Lehrplänen erwarteten graphischen Darstellungen sind nur in extrem beschränkten Umfang auf den letzten Seiten des Buches zu finden.

Inhalte des Hauptschulbuches der 7. Klasse

Das Schulbuch der 7. Klasse führt die intensive Beschäftigung mit Gleichungen fort.
In dem 20 Seiten langen Kapitel *Gleichungen* wird weiter mit Gleichungen der Form *ax+b* (mit Dezimalzahlen und auch erstmals mit Variablen) gearbeitet. Sie werden im algebraischen Register oder in Realsituationen gegeben, so dass Übersetzungen zwischen der Realität und dem algebraischen Register weiter geübt werden. Aufgaben aus der Geometrie bieten die Möglichkeit die verschiedenen mathematischen Teilbereiche zu vernetzen.
Zur Lösung der Gleichungen sollen mehrere Methoden genutzt werden: das Lösen durch Probieren, das Waagemodell, das Streifenmodell und formal algebraische Umformungen. Beim Lösen durch Probieren werden Wertetabellen angelegt und die Lösung darin gesucht. Somit werden hier Übersetzungen zwischen dem algebraischen und dem tabellarischen Register durchgeführt.
Bei der Arbeit mit Gleichungen werden außerdem *Rechenmaschinen* eingeführt, die an *black boxes* erinnern. Dadurch wird die Zuordnungs-Grundvorstellung angesprochen, was mit Aufgaben mit der Suche von Bildern und Urbildern verstärkt wird. In den Sachaufgaben des Kapitels *Gleichungen* sollen weitere Terme erstellt und gelöst werden, die lineare Zuordnungen modellieren.
Im Kapitel *negative Zahlen* tauchen erstmals Graphen in Koordinatensystemen auf. Der Umgang mit ihnen wird in dem 10 Seiten langen Kapitel *Zuordnungen und Sachrechnen*, dem letzten Kapitel des Buches, im Detail erlernt. Graphen werden mit Hilfe von Tabellen erstellt

und Werte von ihnen abgelesen. Hier werden also Übersetzungen in beiden Richtungen zwischen dem tabellarischen und dem graphischen Register durchgeführt. Neben dem Punktweisen ablesen wird auch Wert auf Variationsbeobachtungen gelegt.
Die Einführung von proportionalen Zuordnungen geschieht mit einer auf der Kovariations-Grundvorstellung fußenden Merkregel (Rinkens & Wynands, 1997, S. 130).

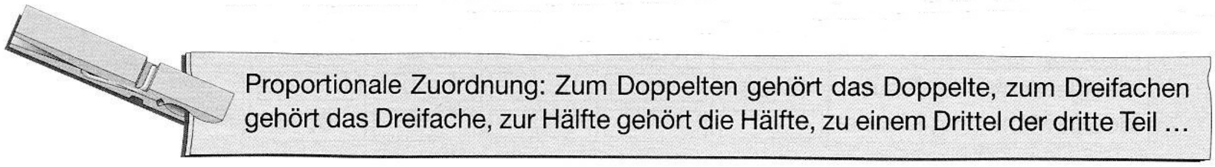

Proportionale Zuordnung: Zum Doppelten gehört das Doppelte, zum Dreifachen gehört das Dreifache, zur Hälfte gehört die Hälfte, zu einem Drittel der dritte Teil …

Abbildung 16: Hauptschule 7, Definition proportionaler Zuordnungen

In den anschließenden Aufgaben werden proportionale Zuordnungen in einer Vielzahl von Sachsituationen betrachtet. Meist wird nur im algebraischen Register gearbeitet, aber vereinzelt auch Tabellen und Graphen mit einbezogen. Hier gibt es auch Beispiele nichtproportionaler Zuordnungen.
Es ist noch anzumerken, dass es in dieser Klassenstufe ein Kapitel *Prozentrechnung* gibt. In diesem sind keine Hinweise oder Querverbindungen zu proportionalen Zuordnungen zu finden. Nur sehr wenige Aufgaben beschäftigen sich mit dem Prozentwert als Operator, der auf mehrere verschiedene Grundwerte angewendet wird. Dies ist deswegen bemerkenswert, da die Prozentrechnung in Frankreich im Rahmen der proportionalen Zuordnungen gesehen wird. (Rinkens & Wynands, 1997)

Neben der umfangreichen Arbeit mit dem algebraischen Darstellungsregister werden in dieser Jahrgangsstufe proportionale Zuordnungen in allen Darstellungsregistern betrachtet und alle Übersetzungsvorgänge durchgeführt.
Beim Studium von Gleichungen steht die Zuordnungs-Grundvorstellung im Mittelpunkt. Bei der Betrachtung von proportionalen Zuordnungen und ihrer Graphen kommt zusätzlich noch die Kovariations-Grundvorstellung hinzu.
Rechenmaschinen können den Schülern helfen von einer Aktions-Auffassung zu einer Prozess-Auffassung von Gleichungen zu kommen.

Inhalte des Hauptschulbuches der 8. Klasse

Ausgehend von den proportionalen Zuordnungen und deren Quotientengleichheit werden im Schulbuch der 8. Klasse umgekehrt proportionale Zuordnungen mit der Betrachtung der Produktgleichheit eingeführt. Diese Inhalte werden wieder im letzten Kapitel des Buches eingeführt, allerdings diesmal als Teil des Kapitels *Sachrechnen*.
Zuerst werden proportionale Zuordnungen mit ihrer Definition über Kovariation wiederholt. Im Gegensatz zum Vorjahr werden dann Graphen zur direkten Proportionalität mit ihren charakteristischen Eigenschaften untersucht. Die Graphen werden meist aus Tabellen erstellt, die wiederum aus Realsituationen gewonnen werden. Umgekehrt werden auch Tabellen aus Graphen erstellt.
An hand von Sachsituationen wie dem Stundenlohn oder der Dichte von unterschiedlichen Materialien lernen die Schüler die Quotientengleichheit als Eigenschaft von Wertepaaren

proportionaler Zuordnungen kennen. Sie sollen mit diesem Quotienten fehlende Bilder und Urbilder von Wertepaaren in Tabellen berechnen, ohne aber eine allgemeine Formel aufzustellen oder den Quotienten als a in der Formel $y=ax$ zu identifizieren.
Auch umgekehrt proportionale Zuordnungen werden mir einer Definition eingeführt, die sich auf Variation stützt (Zum Doppelten gehört die Hälfte, …). In den dazugehörigen Aufgaben sollen Wertepaare aus Realsituationen ergänzt werden.
Später sollen die Schüler die Produktgleichheit entdecken und diese Eigenschaft mit den Hyperbeln verbinden. Es ergibt sich eine Vielzahl an Aufgaben, in denen diese Eigenschaft genutzt wird. Dabei wird allerdings keine Schreibweise genutzt, die an $f(x)=a/x$ erinnert, sondern mit der Produktgleichheit in Aufgaben des Typs *$ab=c$, für welches x ist $dx=c$ oder $xd=c$?*
Lineare Zuordnungen werden als *Zuordnungen mit Grundbetrag* einführt. Dementsprechend sind die dazugehörigen Aufgaben meist Zuordnungen bei denen ein Preis mit Grundgebühr für bestimmte Verbrauchswerte berechnet werden muss. In manchen Fällen wird auch der dazugehörige Graph betrachtet
In Vergleichen von proportionalen Zuordnungen, Zuordnungen mit Grundbetrag und umgekehrter proportionalen Zuordnungen sollen Realsituationen und Graphen dem jeweiligen Typ zugeordnet werden. In mehreren Aufgaben sollen die Schüler jetzt selbstständig entscheiden, welche Zuordnung vorliegt um die Lösung berechnen zu können.
Am Ende des Abschnittes der sich mit Funktionen beschäftigt wird noch einmal genauer auf die Graphen von linearen Zuordnungen eingegangen. Ihre Steigung wird mit Hilfe von Dichte und Durchschnittsgeschwindigkeit erklärt. Hauptsächlich soll Punktweises Ablesen der Graphen gelernt werden, aber es gibt auch einige Aufgaben zur globalen Sicht des Graphen. Im Rahmen dieses Graphenstudiums werden auch lineare Gleichungssysteme graphisch betrachtet und gelöst.
Beim Betrachten von Zuordnungen werden also keine allgemeinen Formeln aufgestellt und die typischen algebraischen Darstellungen der unterschiedlichen Zuordnungen nicht kennen gelernt. Vorarbeiten hierzu werden aber im Kapitel *Terme* gemacht. Dort werden Tabellen zu Termen der Form $ax+b$ erstellt und vereinzelt der zu einer Tabelle gehörige Term gesucht. Außerdem werden allgemeine Formeln zur Berechung von geometrischen Größen und zur Prozentrechnung gesehen. Eine Verbindung mir funktionalen Situationen findet nicht statt und es gibt keine Bruchterme mit Unbekannten im Nenner.
Die meisten Aufgaben dieses Kapitels sind innermathematische Aufgaben, die sich mit Übungen zu Termen und Gleichungen die Fähigkeiten der Schüler im Umgang mit dem algebraischen Register stärken sollen.
Wie schon im Vorjahr lassen sich im Kapitel *Prozentrechnung* keine direkten Verbindungen zu proportionalen Zuordnungen finden. (Rinkens & Wynands, 2001b)

In dieser Klassenstufe zeigen sich einige Abweichungen von dem, was nach der Analyse des Lehrplans erwartet wurde. Lineare Zuordnungen, Gleichungssysteme und Tabellen werden behandelt, obwohl sie nicht im Lehrplan stehen. Der Umgang mit Termen wird zwar geübt, sie werden aber nicht zur algebraischen Darstellung der Zuordnungen genutzt, was wegen des fehlenden Studiums von Termen mit Unbekannten im Nenner auch nicht immer möglich

wäre.
Es zeigt sich also eine starke Verknüpfung von Realität und Tabellen, und, mit gewissen Einschränkungen, auch mit der graphischen Darstellung. Die algebraische Darstellung funktionaler Zusammenhänge wird in dieser Jahrgangsstufe noch nicht mit dem hier untersuchten Konzept verknüpft.
Die Zuordnungen werden mit Beschreibungen eingeführt, die großen Wert auf Variation legen. In den Aufgaben wird dann aber mit der Berechnung fehlender Werte von Wertepaaren hauptsächlich die Zuordnungs-Grundvorstellung angesprochen.

Inhalte des Hauptschulbuches der 9. Klasse

Im Schulbuch der 9. Klasse gibt es mit *Zuordnungen und Schaubilder* wieder ein Kapitel mit dem Wort *Zuordnung* im Titel. Die hier analysierten Inhalte befinden sich aber nur auf den ersten zehn Seiten des Kapitels, da sich der Rest auf Statistik bezieht.
Das Kapitel beginnt mit mehreren Aufgaben zur zeitabhängigen Stromproduktion von Windrädern, die als Zuordnungen gesehen werden. Trotz dieser Beispiele für Zuordnungen, die nicht mit einer einfachen algebraischen Darstellung ausgedrückt werden können, wird der Unterschied zu den sonst gesehenen Zuordnungen nicht thematisiert. Anschließend werden proportionale und umgekehrt proportionale Zuordnungen in Sachaufgaben wiederholt. Dabei wird manchmal mit Tabellen oder Graphen gearbeitet und die Quotienten- bzw. Produktgleichheit genutzt. Meist handelt es sich aber um Aufgaben aus Realsituationen in denen ein Sachverhalt für einige paar andere Werte berechnet werden soll.
Auch lineare Zuordnungen werden wiederholt. Hier wird deutlich mehr mit dem graphischen Register gearbeitet, in dem auch lineare Gleichungssysteme gelöst werden. Beim Erstellen von Tabellen werden Formeln angegeben. Dies ist deswegen bemerkenswert, da sonst von keinem anderen Funktionstyp die algebraische Darstellung gesehen wird. Auch in diesem Fall wird die Formel nur mit konkreten Werten gegeben und nicht die allgemeine Gleichung linearer Funktionen.
In manchen Aufgaben dieses Kapitels verändert sich nach einer gewissen Zeit die Zuordnung (Eine Planierraupe fällt aus; Es kommen mehr Arbeiter). Solche Zuordnungen, die nicht im gesamten Definitionsbereich durch eine Regel gegeben werden, werden als zwei verschiedene Zuordnungen behandelt. Sie werden weder in ihrer tabellarischen, noch in ihrer graphischen Darstellung betrachtet. Ähnliches gilt für Zuordnungen mehrerer Größen (also der Form $f(x,y)=z$), die nur Punktweise betrachtet werden.
Bei der Einführung von Quadraten und Wurzeln werden quadratische Zuordnungen und ihre Umkehrungen gesehen. In beiden Fällen wird die algebraische Darstellung zusätzlich zur tabellarischen Darstellung untersucht. Graphische Darstellungen sind nicht zu finden. Funktionale Betrachtungen finden aber nicht statt, so dass noch nicht von einem Studium quadratischer Zusammenhänge und deren Umkehrungen gesprochen werden kann.
In dieser Jahrgangsstufe wird weiterhin der Umgang mit Gleichungen in einem eigenen Kapitel erlernt. Zu den schon bekannten linearen Gleichungen kommen jetzt Bruchgleichungen mit einer Unbekannten im Nenner.
Im Kapitel *Prozent- und Zinsrechnung* werden Prozentgeraden als Möglichkeit genutzt um die Prozentrechnung mit den proportionalen Zuordnungen zu verbinden. Die Prozentformel wird als Geradengleichung aufgefasst, mit dem Prozentsatz als Steigungskoeffizienten. Im

Rahmen dieses Übersetzungsprozesses werden auch Tabellen erstellt. Ein Hinweis darauf, dass es sich damit um Zuordnung handelt wird allerdings nicht gegeben.
Am Ende des Schulbuches befindet sich ein ganzes Kapitel mit Aufgaben, die die Schüler auf die Abschlussprüfung der Hauptschule vorbereiten sollen. Darin sind auch zwei Seiten mit Aufgaben zu Zuordnungen, die hauptsächlich Inhalte zu proportionalen und umgekehrt proportionalen Zuordnungen in Realsituationen aufgreifen. (Rinkens & Wynands, 2001c)

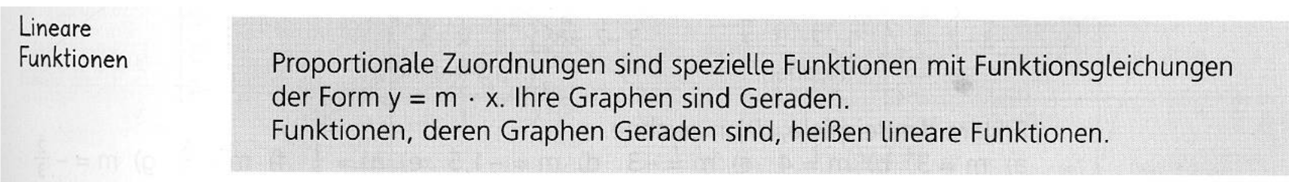
Mit der 9. Klasse endet für die meisten Schüler der Hauptschule ihre Schulzeit. In ihrer letzten Klassenstufe erfahren sie nur wenig Neues zu Zuordnungen. Sie haben keine Funktionsdefinition gesehen, nur in wenigen Aufgaben das algebraische Register in seiner Abstraktheit genutzt und kaum mit Variation gearbeitet. Eine Verallgemeinerung der Untersuchung von Zuordnungen, wie sie die systematische Untersuchung der algebraischen Darstellung erlaubt hätte, hat nicht statt gefunden. Es ist ein sicheres Umgehen mit Realsituationen zu erwarten, wenn einzelne Werte linearer oder umgekehrt proportionaler Zuordnungen gesucht werden. Auch die Arbeit mit den Tabellen und Graphen dieser Zuordnungen wurde in vielen Aufgaben geübt. Übersetzungen von und zum algebraischen Register finden kaum statt. Mit diesen Vorraussetzungen ist das volle Ausbilden einer funktionalen Denkweise nur schwer vorstellbar.

Aufbau des Hauptschulbuches für die 10. Klasse

Für die 10. Klasse wird das Schulbuch *Formel 10* untersucht, da es keinen Band für die 10. Klasse aus der *mathe aktiv* Reihe gibt. Das Buch unterscheidet sich im Format, Umfang und Aufbau nicht wesentlich von *mathe aktiv*. Allerdings orientieren sich die Titel der Kapitel und deren Reihenfolgen nicht mehr am Lehrplan, sondern sind umsortiert und anders zusammengefasst worden.

Inhalte des Hauptschulbuches der 10. Klasse

In den bisher analysierten Hauptschulbüchern ist das Kapitel zu Zuordnungen stets das letzte Kapitel gewesen. In diesem Band beschäftigt sich gleich das erste Kapitel mit Funktionen. Erstmals ist dort von *Funktionen* und nicht mehr von *Zuordnungen* die Rede. Die bisher bekannten linearen und umgekehrt proportionalen Zuordnungen werden nun als spezielle Funktionen bezeichnet und ihre allgemeine Darstellung im algebraischen Register eingeführt. Dabei wird allerdings nie definiert, was eine Funktion ist (Vogel, Vollath & Haubner, 2002, S. 7).


Lineare Funktionen

Proportionale Zuordnungen sind spezielle Funktionen mit Funktionsgleichungen der Form $y = m \cdot x$. Ihre Graphen sind Geraden.
Funktionen, deren Graphen Geraden sind, heißen lineare Funktionen.

Abbildung 17: Hauptschule 10, Lineare Funktionen

Schon bekannte Eigenschaften, wie die Quotientengleichheit proportionaler Funktionen und die Produktgleichheit werden zunächst wiederholt. Dann wird die Arbeit im graphischen Register fortgesetzt und mit dem jetzt zur Verfügung stehenden algebraischen Register

verbunden. So werden die Rollen der Parameter a und b in der Geradengleichung $y=ax+b$ untersucht und Geraden als charakteristische graphische Darstellung von linearen Funktionen kennen gelernt. Übersetzungen zischen dem algebraischen und dem graphischen Register finden unter Anwendung mehrerer Methoden in beide Richtungen statt.
In einer Aufgabe werden Beispiele für Konstante Funktionen $y=a$ und auch $x=a$ gezeigt, wobei explizit auch $x=a$ als *Funktionsgleichung* bezeichnet wird.
Neben Aufgaben zur Verbindung mit der graphischen Darstellung werden auch viele Aufgaben angeboten, in denen fehlende Werte von Wertepaaren errechnet werden, oder die Geradengleichung zu zwei Wertepaaren, bzw. zu einem Wertepaar und dem Steigungsfaktor angegeben werden sollen. Dabei wird aber nicht das tabellarische Register genutzt.
Am Schluss des Kapitels *lineare Funktionen* werden Schnittpunkte von Geraden bestimmt, ohne dies mit der Lösung linearer Gleichungssysteme zu verbinden. Außerdem werden Anwendungsaufgaben angeboten, was deswegen erwähnenswert ist, da die Verbindung zu Realsituationen im restlichen Kapitel kaum eine Rolle spielt.
Das zweite Kapitel trägt den Titel *Lineare Gleichungssysteme in zwei Variablen*. Hier werden lineare Gleichungssysteme durch systematisches Probieren in Tabellen, durch graphische Darstellungen und durch algebraische Überlegungen gelöst. Dies sind alles Inhalte, die schon im vorigen Kapitel gesehen wurden, hier aber nochmals, unter einem anderen Blickwinkel behandelt werden. Anwendungen aus Realität und Geometrie kommen wieder erst bei den Sachaufgaben ganz am Schluss des Kapitels vor.
Im Kapitel *Potenzen und Wurzeln* werden zu bestimmten Potenzen (quadratisch, kubisch) und zu Wurzeln Tabellen erstellt, die die jeweilige Zuordnung veranschaulichen sollen. Eine tatsächliche Untersuchung dieser Funktionen im Sinne von einer funktionalen Denkweise findet aber nicht statt.
Dies wird, zumindest für quadratische Funktionen, im darauf folgenden Kapitel durchgeführt. Dort wird zunächst mit quadratischen Gleichungen im algebraischen Register gearbeitet und dann die quadratische Funktion über deren algebraische Darstellung definiert.
Quadratische funktionale Zusammenhänge werden dann im algebraischen, graphischen und tabellarischen Register untersucht und alle Übersetzungen, bis auf die Übersetzungen von Graph oder Tabelle zu Formel, durchgeführt. Insbesondere werden die Auswirkungen der verschiedenen Parameterwerte von a in der Formel $y=ax^2+bx+c$ untersucht und die Scheitelform von Parabeln kennen gelernt.
Dieses Kapitel schließt mit der Untersuchung von quadratischen Gleichungssystemen, in denen auch Schnittpunkte von Parabeln ermittelt werden. Anwendungen aus der Realität sind kaum zu finden und Kovariations- oder Zuordnungs-Grundvorstellung spielen im Gegensatz zu den Übersetzungen nur eine untergeordnete Rolle.
Beim Studium von Wachstums- und Abnahmeprozessen werden Exponentialfunktionen mit unterschiedlicher Basis benutzt, und deren Wachstum mit dem Wachstum von linearen Funktionen verglichen. In vielen Anwendungsaufgaben sollen die Funktionsgleichungen erstellt, die Graphen gezeichnet oder mit Wertetabellen gearbeitet werden. Schon die Thematik des Wachsens und Abfallen zeigt, dass Variation und damit die Kovariations-Grundvorstellung bei allen Aufgaben im Mittelpunkt steht. Aber auch Zuordnungen von Werten zu bestimmten Zeitpunkten werden untersucht.
Die Logarithmusfunktionen können als Umkehrungen zu den Exponentialfunktionen

eingeführt werden, sind aber als Zusatz gekennzeichnet.
Die trigonometrischen Funktionen werden ausschließlich für einzelne Punktweise Zuordnungen in der Geometrie genutzt. In zwei Aufgaben sind die Winkelabhängigen Graphen der Sinus- und der Kosinusfunktion abgebildet. Zuvor werden Tabellen für einzelne Werte erstellt. Eine detaillierte Untersuchung findet aber nicht statt.
Wie im Schulbuch der 9. Klasse für die Abschlussprüfung der Hauptschule, werden hier im letzten Kapitel Aufgaben zur Vorbereitung der mittleren Reife angeboten. Diese wiederholen viele der oben genannten Inhalte.
Im letzten Abschnitt *Grundwissen* des Buches wird auch ein Teil der Grundkenntnisse genannt, die in Abschnitt 3.1.4.4.2 identifiziert wurden. Dazu gehören etwa die graphischen Auswirkungen der Parameter a und c in der Formel der quadratischen Gleichung $y=ax^2+c$. (Vogel, Vollath & Haubner, 2002)

Der Lehrplan für die 10. Jahrgangsstufe sieht einen großen Schritt auf dem Weg zum funktionalen Denken vor. Dieser wird auch im Schulbuch umgesetzt. Der Begriff Funktion wird verwendet, Darstellungen im algebraischen Register werden genutzt und es wird eine deutlich größere Bandbreite an Funktionstypen betrachtet. Allerdings werden der Funktionsbegriff und die algebraische Darstellung sehr eng miteinander verquickt, so dass die Gefahr besteht, dass beide miteinander identifiziert wird.
Die Wichtigkeit von realitätsnahen Aufgaben geht gegenüber den Vorjahren zurück, und auch Tabellen werden kaum mehr genutzt. Dafür wird sehr viel innerhalb des algebraischen Registers und mit Übersetzungen zwischen dem algebraischen und dem graphischen Register gearbeitet. Eine Übersetzung zur algebraischen Darstellung findet aber nur bei der Arbeit mit linearen Funktionen statt.
Die Zuordnungs- und die Kovariations-Grundvorstellung werden in den Kapiteln zu linearen und quadratischen Funktionen kaum angesprochen. Lediglich bei der Beschäftigung mit Wachstumsprozessen, die ausführlicher ausfällt, als des der Lehrplan erwarten lässt, kommen beide Grundvorstellungen zum tragen.

Übersicht über die Inhalte der Hauptschulbücher

Die hier analysierten Schulbücher für die bayerischen Hauptschulen zeigen deutlich, dass die Schüler, die die Schule nach der 9. Klasse verlassen, nur begrenzt die Möglichkeit haben eine funktionale Denkweise im Sinne dieser Arbeit auszubilden. Bis zu dieser Jahrgangsstufe werden ausschließlich lineare und umgekehrt proportionale Funktionen behandelt, wobei der Begriff *Funktion* nicht genutzt wird und die algebraische Darstellung nur in konkreten Fällen als Darstellung von funktionalen Abhängigkeiten gesehen wird.
Damit sind bis zu diesem Zeitpunkt sehr starke Einschränkungen im concept image zu erwarten, das Schüler von funktionalen Abhängigkeiten haben. Allerdings werden sie die linearen Zuordnungen, die sie sehr ausführlich studiert haben auch in Realsituationen anwenden können, da die Verbindung zu Realität ein zentraler Bestandteil der Lehrbücher ist.
Das potentielle concept image der Schüler, die die mittlere Reife an der Hauptschule vorbereiten, kann deutlich mehr Facetten aufweisen. Sie kennen quadratische und exponentielle Abhängigkeiten, haben die abstrakte algebraische Darstellung studiert und viel

mit Übersetzungen gearbeitet. Allerdings ist eine Vermischung von algebraischer Darstellung und Funktionsbegriff zu erwarten, da beide zeitgleich eingeführt werden, und Funktionen an sich nie definiert werden. Die Schüler werden versucht sein, den leeren Begriff zu füllen, und dazu bietet sich die algebraische Darstellung an. Dem Studium von Definitions- und Wertemenge wird keine Bedeutung beigemessen.
Im Laufe der Schuljahre haben die Schüler die Möglichkeit mit verschiedenen Aufgaben sowohl die Zuordnungs- als die Kovariations-Grundvorstellung auszubilden.
Erwartungsgemäß sind in den Schulbüchern der Hauptschule keine Hinweise auf die Nutzun der Objekt-Grundvorstellung zu finden.
In den analysierten Schulbüchern sind sehr Lehrplantreu und weichen nur in wenigen Punkten von ihm ab. Dies war wegen des Genehmigungsverfahrens der deutschen Schulbücher zu erwarten.

In der Lehrplananalyse wurde gezeigt, dass der Realschullehrplan der einzige in dieser Arbeit analysierte Lehrplan ist, in dem sich Elemente aus der Mengentheorie beim Studium von Funktionen gehalten haben. Der folgende Abschnitt wird zeigen, inwieweit diese Inhalte im potentiellen Curriculum umgesetzt werden.

7.1.2 Realschule

Aufbau des Realschulbuches

Für die Realschule wird das Schulbuch *Mathematik für Realschulen* untersucht. Die äußere Form des Buches wirkt etwas älter, als die der oben analysierten Hauptschulbücher. Die Aufgabenaufzählungen werden seltener durch Illustrationen unterbrochen. Allerdings stechen auf vielen Seiten Erläuterungen der Inhalte und vorgeführte Aufgabenbeispiele hervor, die durch blaue Kästen bzw. grün hinterlegte Überschriften betont werden.
Mit einem Umfang von etwa 200 Seiten sind die Bücher der Realschule etwas umfangreicher als die der Hauptschulen.
Der Aufbau der Bücher orientiert sich wieder stark am Lehrplan, wobei diesmal aber mehr Abweichungen von dessen Struktur gemacht werden. In einigen Jahrgängen wird die Reihenfolge der Kapitel umgestellt oder ein Unterpunkt des Lehrplans in mehrere Kapitel unterteilt. Oftmals wird aber die Titel wörtlich übernommen, so dass das Inhaltsverzeichnis des Buches stark an den Lehrplan erinnert. Es ist zu beachten, dass sich die hier analysierten Bücher zum Teil noch auf den alten Lehrplan von 1993 beziehen. Dies erklärt einige Abweichungen der Inhalte und ihrer Reihenfolge im Schulbuch.
Ab der 7. Klasse gibt es ein separates Buch für die Schüler der Wahlpflichtfächergruppen II und III.
Die Bücher aller Jahrgangstufen enthalten am Anfang eine Übersicht der genutzten mathematischen Zeichen und Abkürzungen. Anschließend folgt in den unteren Jahrgangsstufen eine Übersicht über die Sätze und Regeln, die in der jeweiligen Jahrgangstufe gelernt werden (später befindet sich diese Übersicht am Ende des Buches). Nach den Kapiteln, in denen der Lehrstoff präsentiert wird, folgt in fast allen Jahrgangstufen ein Kapitel mit Aufgaben zur Wiederholung ausgewählter Inhalte aus allen Gebieten, die manchmal als

Grundwissen bezeichnet werden. In der 10. Klasse werden stattdessen Aufgaben zur Vorbereitung der mittleren Reife angeboten. Abschließend folgt nur ein Sachwortverzeichnis. Eine Formelsammlung wie im Hauptschulbuch gibt es nicht.
Die Lehrpläne werden nicht abgedruckt und es gibt auch keine Erläuterung zum Aufbau und zum Nutzung des Buches. Lehrer und Schüler müssen sich die Nutzungsweise also selber erschließen.
Die Kapitel der Bücher und der Unterpunkte werden durch teilweise ausführliche Erklärungen der Inhalte mit Beispielen eingeleitet, die meist mit einer Merkregeln abgeschlossen werden. Anschließend folgen Aufgaben. Weitere Beispiele und Merkregeln unterbrechen die Aufzählung der Inhalte. Illustrationen und zusätzliche Anweisungen zu bestimmten Aufgaben befinden sich in einer schmalen Spalte neben den Aufgaben.
Im Gegensatz zu den Hauptschulbüchern werden hier keine Aufgaben mit Lösungen oder Wissenstests angeboten. Auf blau abgesetzten Seiten werden spezielle Aufgaben zu historischen oder speziellen realitätsnahen Kontexten gegeben, oder der historische Kontext eines Kapitels erläutert.
Durch die Erklärungen zu allen Teilbereichen wird es den Realschülern möglich gemacht selbstständig mit dem Realschulbuch zu arbeiten.

Inhalte des Realschulbuches der 5. Klasse

Im *Mathematik für Realschulen* Band für die 5. Klasse sind nur wenige Inhalte zur funktionalen Denkweise zu finden. Allerdings werden in einigen Kapiteln erste Schritte bei der Arbeit mit den Darstellungsregistern von funktionalen Anhängigkeiten gemacht. So werden im Rahmen der Geometrie Koordinatensysteme genutzt, aus denen Koordinaten von Punkte abgelesen und andererseits Punkte eingetragen werden sollen. In fast allen Bereichen, insbesondere bei Aufgaben mit Anbindung an die Realität, sind Informationen in Tabellenform gegeben. Die Schüler sollen aus Informationen aus ihnen entnehmen oder fehlende Werte ergänzen.
Im Kapitel *Gleichungen und Ungleichungen* werden Gleichungen der Formen $ax+b=c$ und $a:x=c$ (mit ganzen Zahlen a, b und c) gelöst. Bei dieser Vorbereitung der Arbeit im algebraischen Register fällt auf, dass schon hier mit dem mengentheoretischen Vokabular und dessen Schreibweise gearbeitet wird. *Lösungsmengen* der Gleichungen sollen bei gegebenen *Grundmengen* bestimmt werden, und anders herum. Selbst erste Venn-Diagramme tauchen auf.
Viele der Aufgaben sind rein innermathematisch. Im Kapitel *Rechnen mit Größen aus dem Alltag* werden dann Aufgaben angeboten, bei denen zwischen einer Fülle von Realsituationen und dem algebraischen Register übersetzt werden soll. Dabei werden auch einfache Aufgaben zu proportionalen Situationen mit Dreisatz bearbeitet. (Habler, Kappl, Kiermair, Lippert, Püls, Sobotta, Steger & Sulzenbacher, 2001a)

Das Schulbuch dieser Klassenstufe führt die Schüler an das Arbeiten mit den verschiedenen Darstellungsregistern funktionaler Abhängigkeiten heran und stellt erste Verknüpfungen zwischen ihnen her. Funktionale Abhängigkeiten an sich werden nicht betrachtet.
Schon in dieser Jahrgansstufe wird mit der Mengentheorie gearbeitet und deren Vokabular

und Notationen genutzt, obwohl diese im Lehrplan erst in der 6. Klasse vorgesehen sind. Dies stammt aus der Zeit der *neuen Mathematik* und bereitet unter anderem die Einführung von Relationen vor.

Inhalte des Realschulbuches der 6. Klasse

Im Schulbuch der 6. Klasse findet sich ein Kapitel mit der Überschrift *direkte Proportionalität*. Dieses beginnt mit einem Beispiel und der Definition von direkter Proportionalität (Habler, Kappl, Kiermair, Lippert, Püls, Sobotta, Steger & Sulzenbacher, 2001b, S. 152).

> Sind alle Zahlenpaare einer Menge $\{(a|b), (c|d), \ldots, (x|y)\}$ **quotientengleich**, d. h. $\frac{b}{a} = \frac{d}{c} = \ldots = \frac{y}{x} = \ldots = \boldsymbol{k}$, so bezeichnen wir diese als **direkte Proportionalität**.
> Der Quotientenwert $\boldsymbol{k}$ heißt **Proportionalitätsfaktor**.

Abbildung 18: Realschule 6, Definition von direkter Proportionalität

Es zeigt sich, dass die Mengentheorie auch in dieser Definition eine große Rolle spielt. Auch die Quotientengleichheit wird von Anfang an betont. Die Beispiele, die zur Illustration der Definition gegeben werden nutzen auch das tabellarische und das graphische Register. Darin wird eine Halbgerade als charakterisierendes Erscheinungsbild proportionaler Zuordnungen erkannt, und mit Hilfe der Tabellen auch Variationsüberlegungen vorgenommen. Beides spielt in den folgenden Aufgaben keine weitere Rolle. Dort werden fehlende Werte aus Tabellen ermittelt, die sich in vielen Fällen auf Realsituationen beziehen. Es steht somit die Zuordnungs-Grundvorstellung im Mittelpunkt. Die algebraische Darstellung wird nicht genutzt.

Im zweiten Teil des Kapitels zur direkten Proportionalität wird die Prozentrechnung eingeführt. Einige Beispiele beziehen sich auf funktionale Situationen, die auch in Tabellen untersucht werden. Somit wird hier, im Gegensatz zur Hauptschule eine direkte Verbindung zwischen der Proportionalität und der Prozentrechnung hergestellt.

Im Kapitel *Gleichungen und Ungleichungen* werden Terme der Form $ax+b$ und $a{:}x+b$ betrachtet. Auch hier spielt die Mengentheorie eine große Rolle. Zu sämtlichen Aufgaben mit Termen wird die Grundmenge angegeben, wenn diese nicht gesucht ist. Oftmals soll die Lösungsmenge der Terme bestimmt werden, seltener die Definitionsmenge. Die in der Einleitung eingeführte *graphische Wertetabelle*, einer Art Säulendiagramm, wird in den Aufgaben nicht weiter genutzt.

Die Schüler lernen, dass ein Term mit einer Unbekannten jeder Zahl aus der Grundmenge eine andere Zahl zuweist. Dieser starke Zuordnungsgedanke wird auch in *numerischen Wertetabellen* (übliche Tabellen) veranschaulicht. In einer Reihe von Aufgaben wird deutlich gemacht, dass es mehrere äquivalente Terme geben kann, also die algebraische Darstellung nicht eindeutig ist. Das Kapitel schließt mit Anwendungsaufgaben, bei denen zwischen der Realität und dem algebraischen Register übersetzt werden soll.

In den anderen Kapiteln des Buches treten das tabellarische und das graphische Register in vielen Situationen auf. So sollen Information aus Tabellen entnommen und in ihnen ergänzt werden und das Koordinatensystem in der Geometrie genutzt werden. (Habler, Kappl, Kiermair, Lippert, Püls, Sobotta, Steger & Sulzenbacher, 2001b)

In dieser Jahrgangsstufe arbeiten die Schüler erstmals explizit mit funktionalen Situationen, nämlich mit der direkten Proportionalität. Mengentheoretische Definitionen und Schreibweisen spielen dabei eine große Rolle. Obwohl in den einführenden Erklärungen auch mit dem graphischen Register gearbeitet wird und die Kovariations-Grundvorstellung angesprochen wird, dominiert in den Aufgaben die Zuordnungs-Grundvorstellung. Das graphische Register taucht dort fast überhaupt nicht mehr auf. Die Aufgaben nutzen hauptsächlich Darstellungen aus dem algebraischen und dem tabellarischen Register, aber auch Arbeiten zu Realsituationen sind zu finden. Übersetzungen finden zwischen all diesen Darstellungen statt.
Es fällt auf, dass die übliche algebraische Darstellung von direkter Proportionalität nur bei der Arbeit mit Termen verwendet wird, wo aber nie von Proportionalität die Rede ist.
Ein Vergleich mit der Analyse des Lehrplans zeigt, dass einerseits mit $a{:}x+b$ eine Termform behandelt wird, die nicht im Lehrplan vorgesehen ist, aber andererseits das graphische Register viel weniger genutzt wird, als es die Lehrpläne erwarten lassen.

Inhalte des Realschulbuches der 7. Klasse

In der 7. Jahrgangsstufe gibt es verschiedene Mathematikbücher für den mathematisch-technischen Zweig und für die beiden anderen Zweige.
Der Teil des Kapitels *Direkte und indirekte Proportionalität* des Buches für den mathematisch-technischen Zweig, der sich mit der direkten Proportionalität beschäftigt ist eine leichte Umarbeitung des analogen Kapitels aus der 6. Klasse. Die Einleitung und viele der Aufgaben wurden wörtlich übernommen. Wie schon in der 6. Klasse enthält dieses Kapitel auch die Prozentrechnung, die auch aus der vorherigen Klassenstufe übernommen wurde. Lediglich die Promillerechnung und die Zinsrechnung wurden ergänzt. Diese behandeln aber meist nur punktuelle Situationen und werden deswegen nicht zu den Inhalten gezählt, die für die Ausbildung von funktionalem Denken ausschlaggebend sind. Nur ein Beispiel bezieht sich auf die Verzinsung von Kapital über mehrere Jahre und damit auf eine exponentielle Zuordnung, die tabellarisch und graphisch dargestellt wird.
Neu ist der Abschnitt zu indirekter Proportionalität. Diese wird in analoger Weise wie die direkte Proportionalität eingeführt. Es werden produktgleiche Zahlenpaare einer Menge betrachtet, die in Tabellen und Graphen dargestellt werden. Dabei wird wieder die Variation innerhalb einer Tabelle analysiert. In den dazu gehörigen Aufgaben, die außerdem mit einer Seite sehr knapp ausfallen, wird die tabellarische Darstellung aber nur in einer Aufgabe verlangt. Alle anderen Aufgaben beschäftigen sich mit Punktweisen Berechnungen, die keine funktionale Denkweise voraussetzen.
Das Kapitel schließt mit der Gegenüberstellung von Kreisumfang und Kreisfläche in Abhängigkeit vom Radius. Tatsächlich wird die Variation nur in zwei Aufgaben betrachtet und das unterschiedliche Wachstum von linearen und quadratischen Funktionen thematisiert. Ansonsten werden nur Umfang und Fläche für konkrete Kreise berechnet.
In den Abschnitten zu Termen und Gleichungen werden im Wesentlichen die Inhalte des

Vorjahres wiederholt. Es wird weiterhin viel Wert auf mengentheoretische Ausdrucksweisen gelegt und die Nichteindeutigkeit der algebraischen Schreibweise nochmals gezeigt. Allerdings werden kaum mehr Anwendungsaufgaben gestellt.
In den weiteren Kapiteln des Buches werden zusätzliche Inhalte behandelt, die für die Ausbildung der funktionalen Denkweise von Bedeutung sind. So werden die Koordinatensysteme auf die negativen Achsenabschnitte ausgeweitet, Tabellen für Terme in zwei Unbekannten erstellt und bei der Einführung von Potenzen exemplarisch die tabellarische und graphische Darstellung von $y=2^x$ für positive ganze x gezeigt. (Habler, Kappl, Lippert, Sobotta, 1994)

Das Mathematikbuch für Schüler, die nicht den mathematisch-technischen Zweig besuchen, ist weniger umfangreich als das andere Buch. Der Lehrplan lässt für diese Klassenstufe gleiche Schulbuchinhalte im Bezug zu funktionalem Denken erwarten. Dem ist aber nicht so. Im Kapitel *Proportionalität* ist der Abschnitt *Direkte Proportionalität* deutlich kürzer und die Variationsbetrachtungen der Einführung sind nicht mehr vorhanden. Dafür werden die indirekte Proportionalität und die Betrachtung von Umfang und Fläche von Kreisen wesentlich ausführlicher betrachtet und mehr Aufgaben angeboten.
Auch in den anderen Kapiteln gibt es ein paar Unterschiede. Im Rahmen des Studiums von Potenzen wird keine Exponentialfunktion gezeigt und bei der Betrachtung von Termen und Gleichungen finden sich viele Aufgaben mit Übersetzungen von Realität zu algebraischen Darstellung. (Habler, Kappl, Kiermair, Lippert, Püls, Sobotta, Steger, & Sulzenbacher, 2002)

In dieser Jahrgangsstufe werden nur wenige neue Inhalte zu funktionalem Denken gesehen. Die indirekte Proportionalität wird, zumindest im mathematisch technischen Zweig, nur sehr wenig betrachtet. Das algebraische Register wird weiterhin nicht mit der Proportionalität verbunden und auch die graphische Darstellung wird kaum genutzt. Im Wesentlichen handelt es sich um eine Vertiefung der Inhalte des Vorjahres mit Ausblicken auf die weitere Entwicklung.
Die Analyse des Lehrplans lässt einen gleichen Aufbau der Inhalte zu funktionalem Denken in den Büchern für alle Zweige erwarten. Es zeigt sich aber, dass es doch einige Unterschiede in der Ausgestaltung des potentiellen Curriculum gibt, so dass dadurch Unterschiede in speziellen Leistungen der Schüler auftreten können.

Inhalte des Realschulbuches der 8. Klasse

In der 8. Klasse nehmen die Inhalte, die sich mit funktionalem Denken beschäftigen, stark zu. Über die Hälfte des Schulbuches der 8. Klasse beschäftigt sich mit ihnen.
In den Kapiteln, die sich mit Termen beschäftigen, wird unter anderem die Darstellung funktionaler Abhängigkeiten im algebraischen Register vorbereitet. Es wird weiterhin mit Grundmengen und Lösungsmengen, sowie mit graphischen bzw. numerischen Wertetabellen und der Äquivalenz von Termen und Gleichungen gearbeitet. Dazu kommt das Rechnen mit Termen, bei denen Terme als Objekte aufgefasst werden und mit ihnen Operationen durchgeführt werden. Hieraus kann sich die Objekt-Grundvorstellung entwickeln, wenngleich sich diese hier nur auf eine Darstellung bezieht. Außerdem werden auch Parameter eingeführt.

Es werden nicht viele Aufgaben mit Realitätsbezug angeboten und es wird stets zuerst innerhalb der Mathematik gearbeitet. Im Kapitel *Gleichungen* werden am Schluss allerdings viele Aufgaben zu Realsituationen angeboten, im Rahmen derer von der Realität ins algebraische Register übersetzt werden soll.
Kurz vor der Einführung von Funktionen werden im Kapitel *Extremwerte quadratischer Terme* Extremwerte kennen gelernt. Die Schüler sollen die Extremwerte in den Aufgaben aus graphischen und numerischen Wertetabellen entnehmen. Dabei analysieren sie die Variation der Terme. Außerdem sollen sie die Extremwerte aus der gegebenen Scheitelpunktform einer quadratischen Gleichung ablesen und andersherum zu einem Extremwert die Scheitelpunktform eines quadratischen Terms angeben. Sie übersetzen also zwischen Darstellungen im algebraischen und tabellarischen Register. Innerhalb des algebraischen Registers lernen sie die Scheitelpunktform eines allgemeinen quadratischen Terms anzugeben.
Das Kapitel, in dem Funktionen erstmals definiert werden trägt den Titel *Relationen und Funktionen*. Anfangs wird mit Produktmengen und Relationen gearbeitet und das benötigte Vokabular eingeführt. Hierbei werden Venn-Diagramme benutzt (Habler, Kappl, Kiermair, Lippert, Püls & Sobotta, 1995a, S. 115).

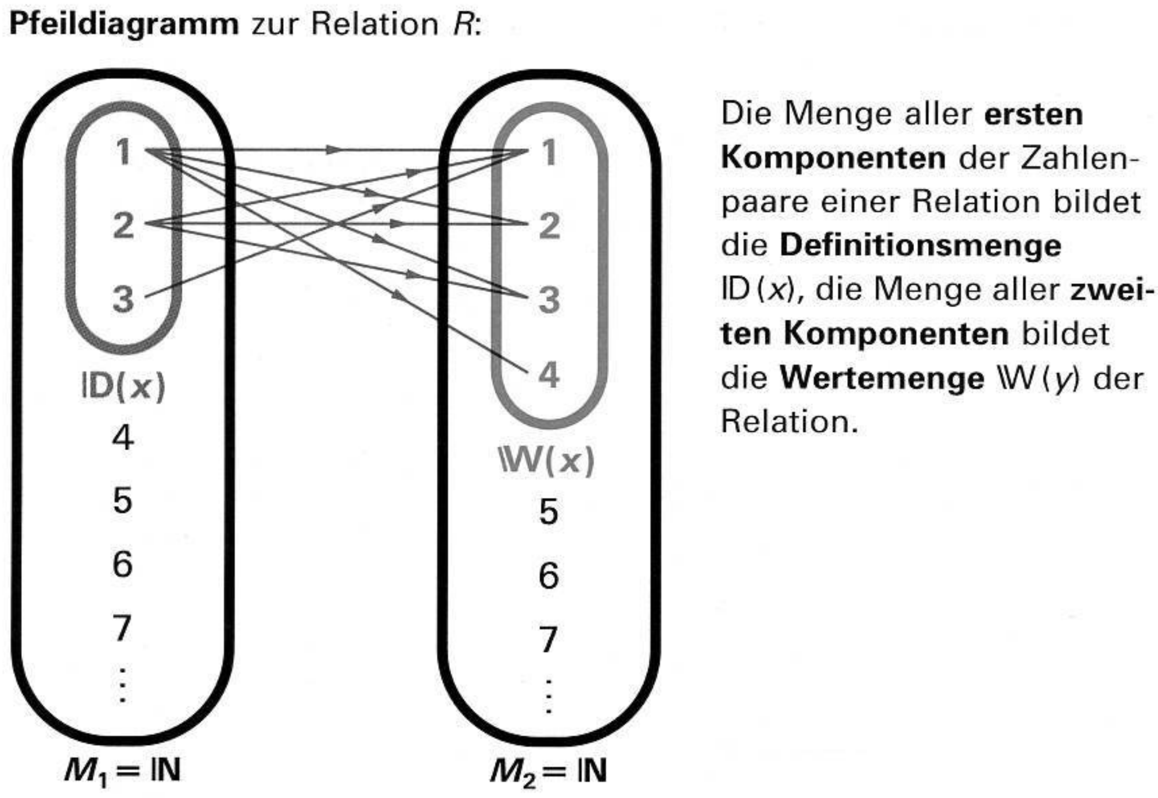


Abbildung 19: Realschule 8, Relationen

Anschließend werden Funktionen als spezielle Relationen definiert (Habler, Kappl, Kiermair, Lippert, Püls & Sobotta, 1995a, S. 116).

> Eine Relation heißt Funktion, wenn jedem Element aus $\mathbb{D}(x)$ jeweils nur ein Element aus $\mathbb{W}(y)$ zugeordnet ist.

Abbildung 20: Realschule 8, Definition von Funktionen

Die ersten Aufgaben beschäftigen sich mit den graphischen Darstellungen von Funktionen und ihrer Unterscheidung von anderen Relationen, was im Anschluss daran auch in der algebraischen Darstellung, mit Hilfe von Tabellen und bei Venn-Diagrammen gesehen wird. Bei allen Angaben von Funktionsgleichungen wird stets die zugrunde liegende Produktmenge angegeben. In drei Aufgaben werden willkürliche Zuordnungen gezeigt, die nicht durch eine Formel darstellbar sind.

Im letzten Teil dieses Kapitels werden Umkehrrelationen und damit Umkehrfunktionen eingeführt. Die Schüler sollen in innermathematischen Beispielen erkennen, wann eine Funktion umkehrbar ist und diese Umkehrung auch angeben. Hierzu werden keine Anwendungsaufgaben angeboten.

Das folgende Kapitel trägt den Titel *Lineare Funktionen*. Zuerst werden dort lineare Funktionen definiert, wobei die Funktionsgleichung im Vordergrund steht. Es wird auf die in den Vorjahren behandelte direkte Proportionalität Bezug genommen und die graphischen und tabellarischen Darstellungen, sowie die Darstellung als Venn-Diagramm betrachtet. Der Proportionalitätskoeffizient als Steigung der Ursprungsgeraden wird in mehreren Aufgaben, auch mit Geradenbüscheln, untersucht. Dabei wird auch von der graphischen zu algebraischen Darstellung übersetzt. Es finden sich auch einige Aufgaben zu der Umkehrung von proportionalen Funktionen.

Der zweite Abschnitt des Kapitels beschäftigt sich mit linearen Funktionen. Sie werden über die graphische Darstellung als verschobene proportionale Funktion eingeführt. Die Schüler sollen in den Aufgaben die Graphen zeichnen (mit zwei Punkten bzw. einem Punkt und der Steigung) und erkennen in Aufgaben mit Parallelenscharen die Auswirkungen von Änderungen einzelner Parameter der allgemeinen Geradengleichung $y=mx+t$. Dies wenden sie in Übersetzungen von der graphischen zur algebraischen Darstellung an. Bei Umformungen innerhalb des algebraischen Registers wird die Punktsteigungsform von Geraden angegeben.

Es werden auch einige Sonderfälle betrachtet. So wird mit der Gleichung $ax+by+c=0$ gearbeitet und auch Geraden der Form $y=a$ und $x=a$ gesehen. Dabei wird allerdings nicht explizit darauf bestanden, dass $x=a$ nicht der Graph einer üblichen funktionalen Zuordnung ist. Anwendungsaufgaben finden sich in diesem Kapitel nicht.

Zum Schluss des Buches wird erst in einem Kapitel *Bruchterme* mit Termen gearbeitet, die Unbekannte im Nenner haben und deren Definitionsbereich bestimmt werden muss. Es dient auch zur Hinführung zum Kapitel *Die indirekte Proportionalität als Funktion,* in dem die Funktionen der indirekten Proportionalität analog zu den anderen Funktionen eingeführt werden. Sie werden in allen Darstellungsregistern gezeigt, wobei die Mengentheorie bei allen Darstellungen einen großen Einfluss hat. Die algebraische Darstellung steht auch hier wieder im Vordergrund.

In den Aufgaben finden sich Übersetzungen zwischen der algebraischen und der Graphischen Darstellung, aber es soll auch die Gleichung einer indirekt proportionalen Funktion

angegeben werden, die durch einen bestimmten Punkt geht. In diesem Kapitel werden zum Schluss einige Anwendungsaufgaben angeboten.
Es ist noch anzumerken, dass innerhalb der Geometrie mit geometrischen Ortslinien gearbeitet wird. Dieser Inhalt, der sich auch zum Studium der Funktionsgraphen eignet, wird aber nicht mit den Inhalten zur Ausbildung der funktionalen Denkweise verknüpft. (Habler, Kappl, Kiermair, Lippert, Püls & Sobotta, 1995a)

Das Buch für die Schüler der beiden anderen Zweige ist eine eingeschränkte Kopie des Buches für den ersten Zweig. Sämtliche Kapitel, die sich tatsächlich mit Funktionen beschäftigen (*Relationen und Funktionen, lineare Funktionen, Die indirekte Proportionalität als Funktion*) fehlen. Der anderen Kapitel wurden bis auf wenige Ausnahmen wörtlich übernommen. (Habler, Kappl, Kiermair, Lippert, Püls & Sobotta, 1995b)

Wie nach der Analyse der Lehrpläne erwartet, zeigt sich, dass die Schüler des mathematisch technischen Zweiges in dieser Jahrgangsstufe viel mit Funktionen arbeiten, während die Schüler der beiden anderen Zweige nur ihre Kenntnisse bei der Arbeit mit Termen vertiefen. Die Inhalte zu Funktionen erfüllen in weiten Teilen das, was in den Lehrplänen gefordert wird. Funktionen werden als Relationen eingeführt und das mengentheoretische Vokabular bleibt innerhalb des ganzen Buches präsent. Lineare Funktionen und Funktionen der indirekten Proportionalität werden betrachtet. Dabei werden alle Darstellungen genutzt und Übersetzungen zwischen ihnen durchgeführt. Lediglich der Darstellung funktionaler Abhängigkeiten in Realsituationen scheint wenig Bedeutung beigemessen zu werden. Im Vordergrund steht meist die algebraische Darstellung.
Bei der Arbeit mit Funktionen dominiert, bedingt durch die mengetheoretische Betrachtungsweise, die Zuordnungs-Grundvorstellung. Im Kapitel, das sich mit der Analyse von Extremwerten quadratischer Gleichungen beschäftigt wird aber die Kovariations-Grundvorstellung angesprochen und bei der Arbeit mit Termen können erste Hilfestellungen zum Erlangen der Objekt-Grundvorstellung ausgemacht werden.

Inhalte des Realschulbuches der 9. Klasse

In der 9. Klasse wird mit den quadratischen Funktionen im mathematisch-technischen Zweig ein weiterer Funktionstyp kennen gelernt, während in den beiden anderen Zweigen Funktionen genau so definiert werden, wie dies ein Jahr zuvor im ersten Zweig getan wurde. Im Gegensatz zum Buch der 8. Klasse wird der Platz im Buch für den ersten Zweig deutlich eingeschränkt, den Inhalte zu funktionalem Denken einnehmen.
Anfangs werden sowohl mit graphischen, als auch mit algebraischen Methoden Lösungen von linearen Gleichungssystemen gesucht. Das mengentheoretische Vokabular bleibt dabei stets präsent. Am Schluss des Kapitels, nachdem alle Methoden rein innermathematisch erlernt wurden, werden Anwendungsaufgaben aus der Realität, aus dem Bereich der Zinsrechnung und aus der Geometrie angeboten.
Das Kapitel *Quadratische Funktionen* beginnt mit dem Studium von Funktionen mit der Gleichung $y=x^2$. Diese werden in ihrer algebraischen und ihrer graphischen Darstellung untersucht. Anschließend wird der Scheitel der Normalparabel verschoben, wobei auf dem

Kapitel zu Extremwerten von quadratischen Gleichungen aus dem Vorjahr aufgebaut wird. In rein innermathematischen Aufgaben wird die Verbindung zwischen der Formeldarstellung und den Graphen untersucht. Später kommt als letzter Parameter a in der Funktionsgleichung $y=ax^2+bx+c$ hinzu.
Paarmengen und Relationen spielen in dieser Jahrgangsstufe keine Rolle mehr, auch wenn Grundmenge, Definitionsmenge und Wertemenge noch viel genutzt werden. Lediglich bei der Betrachtung der Umkehrung quadratischer Funktionen werden Relationen genutzt. Die Wurzelfunktion wird als Umkehrung eines Parabelastes eingeführt. Auch hier wird mit dem Wechselspiel zwischen algebraischer und graphischer Darstellung gearbeitet.

In zwei weiteren Kapiteln werden quadratischen Gleichungen, Wurzelgleichungen und Systeme quadratischer Gleichungen untersucht. Alle werden rein innermathematisch ohne Anwendungsbezug betrachtet. Die Gleichungen werden auf Funktionen zurückgeführt und die Lösungen dann mit Hilfe des algebraischen und des graphischen Registers bestimmt. Auch Scharen von Gleichungen werden studiert, bei denen die Lösungen in Abhängigkeit von den Parametern angegeben werden sollen. (Habler, Kappl, Kiermair, Lippert, Püls, Sobotta & Steger, 1996a,b)

Das Schulbuch der beiden anderen Zweige enthält die Aufgaben, die bereits im Schulbuch des mathematisch-technischen Zweiges der vorangegangenen Klassenstufe analysiert wurden. Die Kapitel *Relationen und Funktionen, Lineare Funktionen* und *Die indirekte Proportionalität als Funktion* sind Kopien aus dem Buch der 8. Klasse. Das Kapitel *Systeme quadratischer Gleichungen mit zwei Variablen* entspricht dem gleichnamigen Kapitel des mathematisch-technischen Zweiges aus der 9. Jahrgangsstufe, so hier keine gesonderten Analysen durchgeführt werden. (Habler, Kappl, Kiermair, Lippert, Püls, Sobotta & Steger, 1996 a)

Im mathematisch-technischen Zweig werden, ausgehend vom allmählichen Aufbau der abstrakten Formeldarstellung, quadratische Funktionen eingeführt. Diese Orientierung an der Formeldarstellung kann zur Identifizierung von Funktionen mit ihrer Darstellung im algebraischen Register führen, wenngleich stets darauf geachtet wird, dies zumindest sprachlich zu vermeiden.
Die Verbindung zwischen algebraischer und graphischer Darstellung ist ein zentraler Bestandteil dieser Klassenstufe, wohingegen die tabellarische Darstellung und Anwendungen in Realsituationen nur wenig ins Gewicht fallen.
Die Zuordnungs-Grundvorstellung bleibt auch in dieser Jahrgangsstufe dominierend. So werden beispielsweise in vielen Aufgaben Werte für bestimmte Punkte berechnet. Variationsüberlegungen werden dagegen kaum angestellt, sodass die Kovariations-Grundvorstellung keine Rolle spielt. Für das volle Erfassen der Vorgänge die während des Wechselspiels zwischen Formel und Graph oder bei der Verschiebung der Parabeln ablaufen, ist eine Objekt-Grundvorstellung von Funktionen nötig, die nun weiter ausgebildet werden muss. Ob dies tatsächlich geschieht, oder nur die Darstellung im graphischen Register mit technischen Methoden verschoben wird ist fraglich.
Wie oben schon erwähnt, sind die Kapitel in dem Buch für die beiden anderen Zweige Kopien

der Kapitel aus dem Buch für den mathematisch-technischen Zweig, so dass für eine Analyse darauf verwiesen werden kann. Die Eigenheiten der verschiedenen Zweige werden also nicht berücksichtigt und die Inhalte lediglich verschoben. Selbst Inhalte wie die Umkehrfunktionen und die Funktionen der indirekten Proportionalität, die nicht im Lehrplan stehen, werden behandelt.
Die Inhalte der Kapitel zu Funktionen sind zwar weitestgehend gleich, für deren Bearbeitung ist aber weniger Zeit als im mathematisch-technischen Zweig vorgesehen. Es kann also davon ausgegangen werden, dass eine starke Auswahl der Inhalte getroffen werden muss.

Inhalte des Realschulbuches der 10. Klasse

Mit der 10. Klasse wird die Realschule abgeschlossen, so dass dies die letzte Möglichkeit ist innerhalb der Schule Einfluss auf die Ausbildung der funktionalen Denkweise zu nehmen und das concept image der Schüler zu prägen.
Im mathematisch-technischen Zweig werden in dieser Jahrgangsstufe mehrere neue Funktionstypen eingeführt. Im Kapitel *Potenzen und Potenzfunktionen* werden zuerst Potenzfunktionen der Form $y=x^n$ mit natürlichen n eingeführt. Wie schon in den vorangegangenen Klassenstufen stehen hier die algebraische und die graphische Darstellung im Mittelpunkt. Auch die Definitions- und Wertemengen werden weiterhin betrachtet. Bei der Untersuchung der Verbindung zwischen Formel und Graph werden die Funktionen in zwei Klassen aufgeteilt, die sich im generellen Aspekt der Graphen unterscheiden (also mit geraden und ungeraden n).
Aufbauend darauf wird die algebraische Darstellung allmählich mit mehr Parametern versehen und es werden mehr Exponenten erlaubt (bis hin zu reellen Exponenten), wobei auch Verschiebungen der Graphen im graphischen Register als Orientierung dienen. Der Aufbau des Kapitels orientiert sich also an der algebraischen Darstellung. Bei jedem Schritt werden die Darstellungen im algebraischen und im graphischen Register mit ihrer Verbindung untersucht und die Graphen klassifiziert. Außerdem werden die jeweiligen Umkehrfunktionen betrachtet und die Symmetrieeigenschaften untersucht. Aufgaben zur Anwendungen dieser Funktionstypen in Realsituationen lassen sich nicht finden.
Im Kapitel *Exponential- und Logarithmusfunktionen* wird zuerst die Exponentialfunktion zur Beschreibung von Wachstums- und Abklingprozessen eingeführt. Auch hier steht die Verbindung zwischen Formel und Graph im Zentrum der Aufgaben und die Formel wird im Laufe des Kapitels mit mehr Parametern versehen. Nach einer Reihe innermathematischer Aufgaben folgt eine Seite mit Aufgaben zu exponentiellen Realsituationen.
Die Logarithmusfunktionen werden nur sehr kurz untersucht. Auf wenigen Seiten werden sie eingeführt und die graphische und algebraische Darstellung gesehen. Dabei werden sie auch als Umkehrfunktion der Exponentialfunktionen betrachtet. Die angebotenen Aufgaben beschränken sich auf innermathematische Untersuchungen. Als einzige Anwendung wir die logarithmische Skalierung gezeigt, mit der die Graphen der Exponentialfunktionen gezeichnet werden können.
Die letzten Funktionstypen, die die Realschüler in vor ihrem Abschluss kennen lernen, sind die trigonometrischen Funktionen. In einem sehr ausführlichen Kapitel, das der Geometrie zuzuordnen ist, werden diese erst als Winkelfunktionen im Einheitskreis definiert. Davon ausgehend werden später reelle Argumente zugelassen. Die meisten Aufgaben beziehen sich

auf Punktweise Untersuchungen, bei denen aber auch die Symmetrie und Periodizität erkannt werden sollen.
Zum Schluss des Kapitels werden Extremwerte von zusammengesetzten trigonometrischen Funktionen ermittelt und ein Abschnitt mit dem Titel *Funktionale Abhängigkeiten* angeboten. Darin sollen Variationsüberlegungen zu innermathematischen, geometrischen Aufgaben angestellt werden. Tatsächlich sind dort, wie auch im restlichen Kapitel zu trigonometrischen Funktionen, keine Anwendungen aus Realsituationen zu finden.
Am Schluss des Buches befindet sich ein langes Kapitel, in dem Aufgaben zur Vorbereitung der Abschlussprüfung von der Realschule angeboten werden. Diese Auswahl ist sehr auf geometrische Inhalte ausgerichtet. Es finden nur wenige Aufgaben zu Potenzfunktionen und linearen Funktionen, während es viele zu trigonometrischen Funktionen gibt. Die meisten Funktionssaufgaben sind mit geometrischen Inhalten verknüpft. (Habler, Kappl, Kiermair, Lippert, Püls, Sobotta, & Steger, 1997a)

Das Buch der beiden anderen Zweige ist auch in diesem Jahr zu großen Teilen eine Kopie des Buches für den mathematisch technischen Zweig. Das Kapitel *Quadratische Funktionen* wurde um die Aufgaben zu Funktionenscharen gekürzt. Das Kapitel *Quadratische Gleichungen und Ungleichungen* besteht aus wesentlichen Teilen des gleichnamigen Kapitels aus der 9. Klasse und dem Kapitel zu Systemen quadratischer Gleichungen. Es wurden lediglich einige Aufgaben mit Realitätsbezug ergänzt. Somit werden in dieser Jahrgangsstufe auf Wurzelfunktionen gesehen.
Große Unterschiede sind im Kapitel *Potenzfunktionen – Exponential- und Logarithmusfunktionen* auszumachen. Dort werden Inhalte auf fünf Seiten zusammengefasst, die im Buch des anderen Zweiges 43 Seiten einnehmen. Im Wesentlichen werden nur die Definitionen der verschiedenen Funktionstypen gegeben und anschließend ein paar einfache Aufgaben gestellt.
Auch der Teil zu trigonometrischen Funktionen unterscheidet sich von dem des mathematisch-technischen Zweiges, da diese Funktionstypen nur als Winkelfunktionen untersucht werden. Reelle Argumente werden nicht zugelassen.
Im abschließenden Kapitel zur Prüfungsvorbereitung werden etwas mehr Aufgaben zu Funktionen angeboten, wenngleich auch hier die Aufgabenauswahl sehr auf die geometrischen Inhalte zentriert ist. (Habler, Kappl, Kiermair, Lippert, Püls, Sobotta, & Steger, 1997b)

Relationen und Paarmengen spielen auch in dieser Klassenstufe keine Rolle mehr. Der Einfluss der Mengentheorie ist insofern noch erkennbar, dass zu allen Aufgaben die Grundmenge angegeben wird und sehr konsequent nach Definitions- und Wertemenge gefragt wird. Die tabellarische Darstellung tritt nicht mehr als eigenständige Darstellung auf. Sie wird aber innerhalb der Aufgaben für den Übergang vom algebraischen zum graphischen Register genutzt.
Zentrum der Aufmerksamkeit sind die Übersetzungsprozesse zwischen der algebraischen und der graphischen Darstellung. Außerdem wird die Zuordnungs-Grundvorstellung gebraucht. Variationsüberlegungen treten bei den Betrachtungen der Potenzfunktionen nicht auf. Bei den

Exponential- und Logarithmusfunktionen wird aber auch die Variation betrachtet und somit die Kovariations-Grundvorstellung aktiviert.
Außerdem wird die Objekt-Grundvorstellung durch einige Aufgaben angesprochen. Wenn etwa ganze Graphen verschoben und die Formel der verschobenen Graphen ermittelt wird, so ist das durch eine Verschiebung des Objektes Funktion zu erklären. Es finden sich aber keine Aufgaben zur Hintereinanderschaltung von Funktionen, so dass die Objekt-Grundvorstellung von Funktionen möglicherweise eine Objekt-Grundvorstellung einer Darstellung von Funktionen bleibt.
Im mathematisch-technischen Zweig sind wenige Abweichungen vom Lehrplan festzustellen. Potenzfunktionen werden etwas ausführlicher studiert, als es dort vorgesehen ist und die Logarithmusfunktionen sind nicht an Realsituationen angebunden.
In den beiden anderen Zweigen werden Wurzelfunktionen behandelt, obwohl sie nicht im Lehrplan vorkommen. Die Funktionen der indirekten Proportionalität tauchen nicht mehr auf, da sie bereits im Lehrbuch der 9. Klasse gesehen worden sind. Die Knappheit des Kapitels zu Potenz-, Exponential- und Logarithmusfunktionen fällt noch stärker aus, als es der Lehrplan sowieso schon erwarten ließ.

Übersicht über die Inhalte der Realschulbücher

Die hier betrachteten Schulbücher für die bayerischen Realschulen zeigen, dass sich die potentiellen concept images zu Funktionen der Schüler des mathematischen Zweiges zwar in der Breite von denen der Schüler der beiden anderen Zweige unterscheiden, deren Aufbau aber wohl große Ähnlichkeiten aufweisen werden. Alle Schüler lernen Funktionen als spezielle Relationen kennen. Paarmengen und Relationen tauchen außerhalb der Einführung des Funktionsbegriffs nur noch im Zusammenhang mit Umkehrfunktionen auf, so dass die Schüler das Wissen aus der Einführung nicht weiter nutzen können. Allerdings ist zu vermuten, dass sie gut mit Definitions- und Wertemengen umgehen können, da diese beim Studium der verschiedenen Funktionstypen stets bestimmt werden sollen.
Ein Schüler, der nicht auf den mathematisch-technischen Zweig geht, studiert mit den linearen Funktionen, den Funktionen der indirekten Proportionalität, den quadratischen Funktionen und den Wurzelfunktionen eine relativ geringe Auswahl an Funktionstypen ausgiebig. Im mathematisch-technischen Zweig kommen noch Potenz-, Exponential- und Logarithmusfunktionen dazu, und außerdem, mit Einschränkungen, die trigonometrischen Funktionen. Daraus können breite concept images geformt werden.
Die Reihenfolge der Einführung der Funktionstypen und der Aufbau innerhalb des Studiums eines Funktionstyps orientiert sich an der algebraischen Darstellung. Daraus können Identifizierungen von Funktionen mit der Formeldarstellung entstehen, insbesondere auch deswegen, weil die Definition über Relationen sehr schnell wieder verschwindet.
Zusammen mit der algebraischen Darstellung steht die graphische Darstellung im Zentrum der Untersuchungen. Übersetzungsvorgänge finden zwischen diesen beiden Darstellungen statt, wobei die tabellarische Darstellung beim Übergang helfen kann.
Für die Ausbildung einer funktionalen Denkweise im Alltag sind Aufgaben aus Realsituationen wichtig. Diese sind in den höheren Jahrgangsstufen aber sehr wenig zu finden. Die Einführung und Einübung neuer Inhalte geschieht rein innermathematisch. Lediglich am Ende der jeweiligen Kapitel sind manchmal Anwendungsaufgaben zu finden.

Die Verzahnung mit der Geometrie ist dagegen etwas besser ausgeprägt.
Es ist zu erwarten, dass die Schüler eine unterdurchschnittlich ausgeprägte Kovariations-Grundvorstellung haben. Variationen werden, mit Ausnahme der Exponentialfunktion, so gut wie gar nicht untersucht. Die Zuordnungs-Grundvorstellung kann dagegen mit Hilfe vieler Aufgaben ausgebildet werden und selbst die Objekt-Grundvorstellung kann zumindest in Ansätzen erwartet werden. Allerdings kann diese mit einer bestimmten Darstellung verbunden sein.
Im Vergleich mit der Lehrplananalyse ergeben sich einige Verschiebungen der Inhalte und es werden in den nicht-mathematischen Zweigen Inhalte hinzugefügt. Abgesehen davon ist die Übereinstimmung aber sehr hoch.

Nach der Analyse der Realschullehrpläne stellt sich die Frage, inwiefern megentheoretische Inhalte noch in den Lehrbüchern der bayerischen Gymnasien zu finden sind. Diese Frage wird unter anderem im folgenden Abschnitt zum potentiellen Curriculum der Gymnasien geklärt.

7.1.3 Gymnasium

Aufbau des Gymnasialbuches

Zur Analyse des potentiellen Curriculums der bayerischen Gymnasien wird die *Mathematik* Reihe des Bayerischen Schulbuch Verlages betrachtet. Nur wenige Illustrationen und Photos unterbrechen den Aufbau des Buchen, der dadurch relativ nüchtern wirkt. Die Inhalte und Aufgaben werden einspaltig, ohne Randbemerkungen auf etwa 240 Seite pro Klassenstufe präsentiert (In der 6. Klasse sind es nur 190 Seiten). Ab der 7. Klasse werden die Inhalte in zwei Bände aufgeteilt: Einem mit dem Titel *Algebra* und einem mit dem Titel *Geometrie*. Diese Aufteilung ist ab der 7. Klasse auch im Lehrplan zu finden. Dies illustriert, dass die Anbindung an den Lehrplan auch in diesen Gymnasialbüchern sehr stark ist. Die Einteilungen des Lehrplans werden teilweise wörtlich übernommen und lediglich in Einzelfällen werden die Reihenfolge leicht variiert oder Unterpunkte zusammengefasst.
Nach dem Inhaltsverzeichnis werden die Inhalte präsentiert. Jeder Teil, der einem Unterpunkt des Lehrplans entspricht, ist in mehrere Kapitel unterteilt, die ihrerseits noch weiter untergliedert sind. Jedes Kapitel beginnt mit einer kurzen, illustrierten Aufgabe. Anschließend werden die Inhalte, im Gegensatz zu den Haupt- und Realschulbüchern recht ausführlich, auf mehren Seite mit Beispielen, Erklärungen, Definitionen und Sätzen eingeführt, wobei Wichtiges in farbigen Kästen vom restlichen Text abgesetzt wird. Trotz der Unterteilung der Kapitel in mehrere Unterpunkte, werden alle Inhalte gleich zu Anfang ausführlich erläutert und im Anschluss Aufgaben gestellt, die auch wieder unterteilt sind. Die Erläuterung der Inhalte umfasst mehrere Seiten und nimmt insbesondere in der oberen Klassenstufen der Sekundarstufe I oftmals mehr Platz ein als die eigentlichen Aufgaben. Die Geometrie Bände ab der 7. Klasse haben einen leicht differierenden Aufbau, der hier aber nicht weiter erläutert werden soll.
Die Aufgaben sind nur sehr selten illustriert und haben ein sehr formales Erscheinungsbild. Am Schluss der einzelnen Aufgabenaufzählungen finden sich hin und wieder *Tüftelaufgaben*, Unterhaltsames, oder *Aufgaben aus alter* Zeit. Aufgaben mit Lösungen werden ebenso wenig

angeboten wie vom üblichen Buch abgesetzte Aufgabenseiten zu speziellen historischen oder aktuellen Inhalten.
Am Ende aller Bücher gibt es ein Stichwortverzeichnis und ab der 7. Jahrgangsstufe werden dort im Geometrieband eine Sammlung der wichtigsten Definitionen, Sätze und Aufgabentypen abgedruckt. Ähnliches gibt es im Algebra Band nicht.
Auch in den hier analysierten bayerischen Gymnasialbüchern wird der Lehrplan nicht abgedruckt und es werden keine Hinweise zur Nutzung des Buches gegeben. Eine Ausnahme bildet der Geometrieband der 7. Klasse. Dort werden die Ausrichtung, der Aufbau und die Nutzungsmöglichkeiten des Buches in einem Vorwort erklärt, das sich an Erwachsene Leser richtet. Im Algebraband der 7. Klasse findet sich lediglich eine Einleitung für Schüler ohne Nutzungshinweise.
Die ausführlichen Erläuterungen am Anfang der einzelnen Kapitel scheinen für Schüler ein selbstständiges Erarbeiten bzw. Nacharbeiten von Inhalten möglich zu machen.

Inhalte des Gymnasialbuches der 5. Klasse

Wie in den Schulbüchern der 5. Klasse der anderen beiden Schularten lassen sich auch in *Mathematik 5* nur wenige Inhalte finden, welche die Schüler auf die Ausbildung der funktionalen Denkweise vorbereiten. Es werden aber erste Arbeiten in den verschiedenen Darstellungsregistern von Funktionen durchgeführt und es lassen sich auch Übersetzungsvorgänge finden. Die Schüler arbeiten mit einfachen Gleichungen in einer Unbekannten im algebraischen Register. Dabei wird beispielsweise mit *Grundmenge* und *Lösungsmenge* auch mengentheoretisches Vokabular definiert und genutzt, das auch für die Definition von Funktionen von Bedeutung ist. Die Gleichungen sollen in einigen Aufgaben aus Realsituationen entnommen werden, um sie dann im algebraischen Register zu bearbeiten. Dieser Übersetzungsvorgang kommt noch in anderen Kapiteln vor, insbesondere dem Kapitel *Textaufgaben,* in dem explizit der x-Ansatz gesucht wird.
Im Kapitel *Punktmengen* lernen die Schüler mit dem Koordinatensystem umzugehen. Sie sollen Punke einzeichnen und mit ihnen dann arbeiten. In diesem Kapitel werden außerdem Punktmengen gesehen, die eine bestimmte Bedingung erfüllen. Diese können bei der Einführung von Graphen genutzt werden. (Rieck, 1994)

In Schulbuch dieser Jahrgangstufe sind Aufgaben zur Heranführung an die Arbeit mit dem algebraischen und mit dem graphischen Register zu finden. Letzteres war nach der Analyse der Lehrpläne nicht erwartet worden, da dort nicht vom graphischen Register die Rede ist. Auch der Umgang mit dem Register der Realität und Übersetzungen von ihm zu einer innermathematischen Darstellung werden geübt. Lediglich das tabellarische Register spielt kaum eine Rolle.
Funktionale Abhängigkeiten an sich werden in dieser Jahrgangsstufe noch nicht untersucht.

Inhalte des Gymnasialbuches der 6. Klasse

In *Mathematik 6* werden erstmals Aufgaben zu proportionalen Situationen angeboten. Im Kapitel *Direkte und indirekte Proportionalität* wird die direkte Proportionalität mit Hilfe eines Beispiels definiert, wobei die Kovariations-Grundvorstellung angesprochen wird. Anschließend wird folgende Definition gegeben (Kunesch & Rieck, 1995, S. 140).

> Zwei Größen heißen zueinander *proportional* (oder *direkt proportional*), wenn dem Doppelten, Dreifachen, ... der einen Größe das Doppelte, Dreifache, ... der anderen Größe entspricht.
> Zueinander proportionale Größen sind *quotientengleich*.
> Das Zeichen ~ wird „ist proportional zu" ausgesprochen.

Abbildung 21: Gymnasium 6, Definition von direkter Proportionalität

Dann werden die typischen Darstellungen von Proportionalitäten im tabellarischen und im graphischen Register gezeigt. Lediglich die Darstellung im algebraischen Register wird nicht genutzt und es werden nur punktuelle Berechnungen einzelner Werte durchgeführt.
Sofort im Anschluss folgt die analoge Einführung der indirekten Proportionalität, wobei hier die Produktgleichheit der Wertepaare betont wird.
In den Aufgaben zu diesem Kapitel sollen fehlende Werte in Tabellen durch Variationsüberlegungen, Dreisatz und, bei der direkten Proportionalität, mit Hilfe einer Ursprungsgeraden bestimmt werden, die davor gezeichnet werden soll. Außerdem sollen die direkte und die indirekte Proportionalität in Tabellen und Realsituationen erkannt werden. Dabei treten auch funktionale Situationen mit linearen Zusammenhängen auf.
Wie im Lehrplan ist das Kapitel *Direkte und indirekte Proportionalität* mit dem Kapitel *Prozentrechnung* zusammengefasst. Allerdings werden dort, abgesehen von einer Aufgaben zur Mehrwertssteuer, keine funktionalen Situationen betrachtet, sondern lediglich punktuelle Berechnungen einzelner Werte durchgeführt.
In den anderen Kapiteln des Buches wird die Arbeit im algebraischen Register vertieft, indem die verschiedenen Rechenoperationen in Gleichungen mit einer Unbekannten verknüpft werden. Die Gleichungen werden auch dadurch erstellt, dass Realsituationen in das algebraische Register übersetzt werden.
Im Rahmen des Studiums von Gleichungen wird weiterhin mit den Begriffen *Grundmenge* und *Lösungsmenge* gearbeitet. (Kunesch & Rieck, 1995)

In dieser Klassenstufe wird erstmals mit proportionalen Situationen gearbeitet. Die direkte und die indirekte Proportionalität werden eingeführt und mit ihnen, unter Beanspruchung der Zuordnungs- und der Kovariations-Grundvorstellung, gearbeitet.
Realsituationen spielen sowohl bei der Einführung, als auch bei den späteren Aufgaben eine wichtige Rolle. Übersetzungen finden zwischen allen genutzten Darstellungen statt. Die allgemeine algebraische Darstellung wird nicht genutzt und im algebraischen Register werden lediglich Punktweise Rechnungen durchgeführt. Dieses Fehlen der algebraischen Darstellung kann aus der Analyse der Lehrpläne so nicht entnommen werden.
Trotz der Aufeinanderfolge der Kapitel wurden die Inhalte Prozentrechnung und Proportionalität nicht miteinander verknüpft. Dies war auch nach der Lehrplananalyse erwartet worden.

Inhalte des Gymnasialbuches der 7. Klasse

In der 7. Klasse wird erstmals ein Algebra- und ein Geometrieband herausgegeben. Im Algebraband finden sich weniger Inhalte zu funktionalem Denken als im Buch des vorangegangenen Schuljahres. Als diesbezüglich wichtigster Inhalt ist die Arbeit mit Termen zu nennen. Terme in einer oder mehreren Unbekannten werden aus Realsituationen entnommen und anschließend für bestimmte Belegungen der Unbekannten mit Hilfe von Tabellen ausgewertet. Hier handelt es sich um die algebraische Darstellung funktionaler Zusammenhänge und um Übersetzungen zwischen der Realität, der algebraischen und der tabellarischen Darstellung.
Das graphische Darstellungsregister wird nicht verwendet, wie auch in den restlichen Kapiteln des Buches. Bei der Untersuchung der Terme werden lineare und nichtlineare funktionale Situationen betrachtet und sowohl die Zuordnungs- als auch die Kovariations-Grundvorstellung angesprochen. Es stehen aber immer die Terme im Mittelpunkt und es ist nie von Funktionen oder Zuordnungen die Rede.
Im Anschluss daran wird in einem Kapitel die Nichteindeutigkeit der algebraischen Darstellung mit Hilfe von äquivalenten Termen thematisiert.
In den weiteren Kapiteln des Algebra Bandes werden Fähigkeiten erlernt, die für den Umgang mit dem algebraischen Register wichtig sind. Beispiele dafür sind das Lösen von Gleichungen durch Äquivalenzumformungen und der Umgang mit binomischen Formeln. Im Rahmen dieser Kapitel wird auch oft zwischen der Realität und dem algebraischen Register übersetzt. (Feuerlein, Titze & Walter, 1992a)
Im Band *Mathematik 7 Geometrie* finden sich keine Inhalte zu funktionalen Situationen. Das Koordinatensystem und Punktmengen werden nochmals eingeführt, obwohl sie bereits aus der 6. Klasse bekannt sind. Hier deuten sich Schwierigkeiten bei der Verzahnung der verschiedenen Bände an, die bei Inhalten wie den trigonometrischen Funktionen mit ihrer geometrischen und algebraischen Seite genauer betrachtet werden sollen. (Kratz, 1993a)

Die Inhalte zur funktionalen Denkweise sind in dieser Jahrgangstufe nicht sehr zahlreich. Es werden keine Proportionalitäten mehr betrachtet und die graphische Darstellung wird nicht genutzt. Bei der Arbeit mit Termen lernen die Schüler das algebraische Register näher kennen. Sie setzen Werte für Variablen ein, notieren diese in Tabellen und sehen die Nichteindeutigkeit der algebraischen Darstellung. Anwendungen aus der Realität spielen stets eine große Rolle.
Somit werden hier, bis auf das graphische Register, alles Darstellungsregister genutzt und Übersetzungen zwischen ihnen durchgeführt. Auch die Zuordnungs- und die Kovariations-Grundvorstellung werden angesprochen. Allerdings werden die Inhalte nicht explizit mit Funktionen oder Zuordnungen verknüpft, obwohl funktionale Situationen untersucht werden. Ein Vergleich mit der Lehrplananalyse zeigt, dass die Inhalte erwartungsgemäß umgesetzt wurden.

Inhalte des Gymnasialbuches der 8. Klasse

Im Algebra-Band der 8. Klasse werden Funktionen erstmals definiert. Das Kapitel Der Funktionsbegriff wird mit dem Bild einer Funktionsmaschine begonnen. Funktionen werden als Maschinen beschrieben, die nach der Eingabe einer Zahl x mit der Anweisung f(x) die Zahl y erzeugen (Feuerlein, Titze & Walter, 1992b, S. 45).

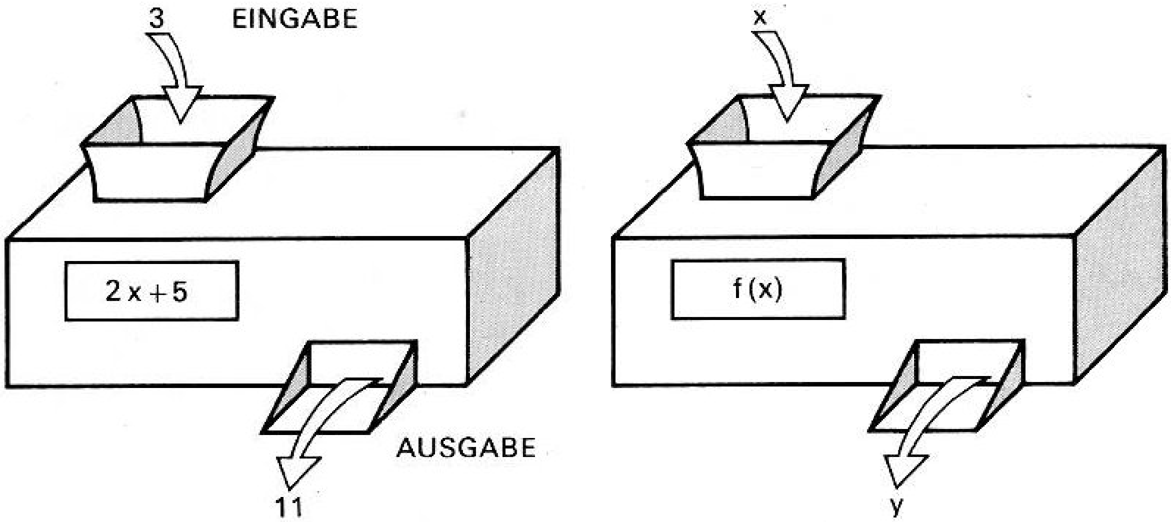


Abbildung 22: Gymnasium 8, Funktionsmaschine

Anschließend werden Funktionen nach der Betrachtung eines Beispiels aus der Biologie als eindeutige Zuordnungen definiert (Feuerlein, Titze & Walter, 1992b, S. 46).

Eine *eindeutige Zuordnung* zwischen Zahlen heißt *Funktion*[1].

[1] functio (lat.), Verrichtung

Abbildung 23: Gymnasium 8, Funktionsdefinition

Im einführenden Beispiel wird, wie in der Definition, die Zuordnungs-Grundvorstellung angesprochen, aber auch die Kovariations-Grundvorstellung spielt eine Rolle. Das Einführungsbeispiel wird sofort im Anschluss an diese Definition so abgeändert, dass es ein Beispiel für eine nichtfunktionale Zuordnung ist.

Alle in der Einführung gegebenen Beispiele sind keine linearen Zusammenhänge und sie enthalten keine algebraische Darstellung. Erst später wird eine dazu gehörige algebraische Darstellung angegeben.

Als *Funktion* im Gegensatz zu *Funktionsterm* wird die Notation $x \mapsto f(x)$ bezeichnet. Bezug nehmend auf geometrische Inhalte wird erklärt, dass sich Abbildungen im geometrischen Sinn von Funktionen dahingehend unterscheiden, dass bei Funktionen nur Zahlen abgebildet werden. Eine weitere Verbindung zu geometrischen Inhalten findet nicht statt.

Außerdem werden die Begriffe Definitions- und die Wertemenge von Funktionen erklärt.

In den wenigen, zu diesem Kapitel gehörigen Aufgaben werden viele verschiedene Funktionstypen betrachtet und zwischen dem tabellarischen und dem algebraischen Register übersetzt.

Darstellungen funktionaler Abhängigkeiten im graphischen Register werden erst im darauf folgenden Kapitel eingeführt. Als erstes Beispiel wird ein Temperaturgraph gezeigt, wobei explizit darauf hingewiesen wird, dass sich diese Funktion nicht durch einen Funktionsterm darstellen lässt. Mit diskreten und kontinuierlichen Betrachtungen von Graphen quadratischer Funktionen wird weiter darauf geachtet, nicht nur mit linearen Zusammenhängen zu arbeiten.

In den Aufgaben soll zwischen der algebraischen und der graphischen Darstellung übersetzt

werden, wobei das tabellarische Register beim Übergang hilft. Außerdem werden Aufgaben zu Realsituationen bearbeitet und es sollen funktionale Zusammenhänge anhand ihrer Graphen als solche identifiziert werden.
Nach dieser Einführung ohne Betrachtung eines bestimmten Funktionstyps werden in den drei folgenden Kapiteln direkt proportionale Funktionen, lineare Funktionen und indirekt proportionale Funktionen eingeführt.
Proportionale Funktionen werden mit ihren typischen algebraischen und graphischen Darstellungen definiert und auch ihre Variationseigenschaften betrachtet. Die Schüler sollen die Aufgabe des Parameters m in $x \mapsto mx$ erkennen.
Anschließend werden lineare Funktionen als verschobene direkt proportionale Funktionen eingeführt und dabei der Parameter t in $x \mapsto mx + t$ erklärt. Auch konstante Funktionen und Parallelen zur y-Achse werden betrachtet. In den Aufgaben soll zwischen der algebraischen und der graphischen Darstellung übersetzt werden und die Gerade zu zwei gegebenen Punkten angegeben werden.
Die Kapitel zu Funktionen werden mit der Untersuchung der indirekten Proportionalität abgeschlossen, die in allen Darstellungsregistern betrachtet wird. Die tabellarische Darstellung wird allerdings auch hier hauptsächlich für den Übergang zwischen dem algebraischen und dem graphischen Register genutzt. Sowohl in der Definition, als auch in den Aufgaben wird die Kovariations-Grundvorstellung angesprochen. Dort soll außerdem zwischen direkter und indirekter Proportionalität unterschieden werden.
Neben den Kapiteln, die sich direkt mit Funktionen beschäftigen, gibt es auch andere Kapitel, deren Inhalte die Fähigkeiten der Schüler beim Umgang mit den Darstellungsregistern funktionaler Abhängigkeiten fördern. So wird mit Bruchtermen und Bruchgleichungen gearbeitet, wobei mit Definitions- und Lösungsmengen umgegangen wird und Übersetzungen von Realsituationen in das algebraische Register eine große Rolle spielen. Außerdem lernen die Schüler den Umgang mit Beträgen und mit Gleichungen in mehreren Variablen.
Im Anschluss an die Einführung von Funktionen und an das Kapitel zu linearen Funktionen werden lineare Gleichungssysteme behandelt. Diese werden auf lineare Funktionen zurückgeführt und in Aufgaben erst graphisch und dann algebraisch gelöst. Anfangs sind die Aufgaben rein innermathematisch. Im Kapitel *Textaufgaben* werden dann aber Aufgaben mit Realkontexten angeboten, bei denen das Gleichungssystem erst aus dem Kontext entnommen werden muss, bevor es gelöst werden kann. (Feuerlein, Titze & Walter, 1992b)
In *Mathematik 8 Geometrie* werden keine Inhalte angeboten, bei denen die funktionale Denkweise ein zentraler Bestandteil ist. (Kratz, 1993b)

Das Buch *Mathematik 8 Algebra* zeichnet sich durch eine intensive Arbeit mit Inhalten zu funktionalem Denken aus. Funktionen werden allgemein definiert und erste Funktionstypen eingeführt. Es scheint, dass die Autoren möglichst viele epistemologische Hürden vermeiden wollen. Funktionen werden nicht anhand von proportionalen Funktionen definiert, sondern mit Hilfe von vielen nichtlinearen Zusammenhängen. Die Darstellung im algebraischen Register taucht nicht von Anfang an auf, sondern zuerst die Funktionsmaschine, die dem Prozesskonzept zuzuordnen ist. Es werden diskrete Funktionen, Funktionen mit Sprüngen, Graphen von Funktionen ohne algebraischer Darstellung und Beispiele nichtfunktionaler

Zusammenhänge gezeigt, bevor mit der Untersuchung eines bestimmten Funktionstyps begonnen wird. Allerdings wird mehrmals explizit darauf bestanden, dass Funktionen nur mit Zahlen operieren.
Nach der Theorie der epistemologischen Hürden kann der Versuch einer so einfachen Überwindung der Hürden nicht zum Erfolg führen (siehe Abschnitt 3.1.7.). Es ist also fraglich, ob die Schüler den Funktionsbegriff mit dieser Definition in voller Breite begreifen, bevor sie ihn sich selber langsam mit Beispielen konstruieren können.
In der Definition und den Aufgaben wird darauf geachtet, dass alle Darstellungsregister genutzt werden und sowohl die Zuordnungs- als auch die Kovariations-Grundvorstellung angesprochen werden. Insbesondere die Arbeit mit Realsituationen wird weiter fortgesetzt. Lediglich die Tabellen scheinen zu einen Hilfsregister zu werden.
Definitions- und Wertemenge werden zwar definiert, spielen aber bei weitem keine so tragende Rolle wie in den Aufgaben der Realschulbücher.
Nach der Analyse des Lehrplans war erwartet worden, dass proportionale Funktionen als Sonderfall der linearen Funktionen behandelt werden. Tatsächlich werden diese aber vorgezogen, und die linearen Funktionen als verschobene proportionale Funktionen eingeführt. Außerdem werden Funktionen der indirekten Proportionalität gesehen, die nicht im Lehrplan auftauchen. Abgesehen davon stimmt das Buch in weiten Teilen mit den Erwartungen der Lehrplananalyse überein.

Inhalte des Gymnasialbuches der 9. Klasse

Das Schulbuch *Mathematik 9 Algebra* sieht für den Bereich der funktionalen Denkweise hauptsächlich die Arbeit mit quadratischen Funktionen vor. Leitfaden dabei ist die algebraische Darstellung, die sukzessive erweitert wird.
Einfache quadratische Funktionen werden mit einem Variationsbeispiel eingeführt und dann als Zuordnung definiert. Ihre algebraischen und graphischen Darstellungen werden mitsamt Definitions- und Wertebereich angegeben. Das tabellarische Register wird auch zur Veranschaulichung genutzt, dient aber hauptsächlich als Hilfsregister bei Übersetzungen zwischen Formel und Graph.
Beobachtungen der Verschiebung des Scheitels der Normalparabel werden für Erklärungen der Auswirkungen von Änderungen der Parameter genutzt, die nach und nach zur algebraischen Darstellung der Normalparabel hinzugefügt werden. Aus diesem Grund sollen die Schüler schnell den Übergang von der Normalform zur Scheitelform lernen.
Die angebotenen Aufgaben beziehen sich hauptsächlich auf den Übergang von der algebraischen zur graphischen Darstellung. In einigen wenigen Aufgaben zu Sachkontexten sollen die Parameter von quadratischen Funktionen bestimmt werden.
Im Kapitel *Extremwertaufgaben* werden die erworbenen Kenntnisse zu quadratischen funktionalen Zusammenhängen genutzt, um in Aufgaben zu geometrischen Realkontexten Maxima von Flächen zu berechnen.
Mit dem Kapitel *Die Wurzelfunktion* wird noch ein weiterer Funktionstyp in dieser Jahrgangstufe eingeführt. Die Funktionsmaschine, die die Funktionsdefinition in der 8. Klasse eingeleitet hat, wird zur allgemeinen Erklärung der Umkehrbarkeit von Funktionen genutzt. Dabei spielen Betrachtungen der Definitions- und Wertemengen naturgemäß eine wichtige Rolle. Die Wurzelfunktion wird mit ihrer algebraischen und graphischen Darstellung definiert

und das tabellarische Register zu Illustrationszwecken genutzt.
Im letzten Teil des Kapitels werden die quadratische Funktion und die Wurzelfunktion miteinander verknüpft, so dass sich eine andere algebraische Schreibweise für die Wurzelfunktion ergibt.
Die dazu gehörigen Aufgaben beziehen sich auf die allgemeine Umkehrbarkeit von Funktionen, auf die Übersetzung zwischen der algebraischen und der graphischen Darstellung und auf Realitätskontexte, bei denen die graphische Darstellung einer funktionalen Situation ermittelt werden soll.
Abgesehen von den soeben besprochenen Kapiteln, die sich direkt mit Funktionen beschäftigen gibt es auch weitere Kapitel, deren Aufgaben die Fertigkeiten der Schüler beim Umgang mit dem algebraischen Register festigen. So werden Aufgaben zu quadratischen Gleichungen und Wurzelgleichungen angeboten.
In manchen Fällen wird auch das graphische Register zum Finden der Lösung einer Gleichung genutzt und seltener eine Verbindung zu Realkontexten hergestellt.
Am Schluss des Bandes findet sich ein Kapitel *Nichtlineare Gleichungssysteme,* in dem das Wissen, was zu Funktionen bis dahin erworben worden ist, für das Lösen von Gleichungssystemen eingesetzt wird. Wenn möglich werden die Gleichungen auf Funktionen zurückgeführt und Lösungen im algebraischen und graphischen Register gesucht. (Feuerlein, Titze & Walter, 1992c)
Im Band *Mathematik 9 Geometrie* werden viele Arten von geometrischen Abbildungen behandelt und miteinander verknüpft. Eine Verbindung zu Funktionen oder funktionalem Denken wird dabei nicht hergestellt. (Kratz, 1993c)

Nach einer Vielzahl von neuen Inhalten im Schulbuch der 8. Klasse verringert sich der Anteil der Aufgaben zu funktionalem Denken in der 9. Jahrgangsstufe etwas. Quadratische Funktionen werden eingeführt, wobei die Entwicklung der algebraischen Darstellung im Wechselspiel mit der graphischen Darstellung eine zentrale Rolle spielt. Das tabellarische Register wird nur noch zu Hilfszwecken genutzt und die Menge realitätsnaher Aufgaben geht zurück.
Außerdem wird die allgemeine Umkehrbarkeit von Funktionen untersucht, die zur Einführung der Wurzelfunktion gebraucht wird. Definitions- und Wertemenge werden definiert, spielen aber in den Aufgaben nicht so systematisch verlangt, wie dies im Realschulbuch der Fall ist. Zuordnungs- und Kovariations-Grundvorstellung werden bei der Definition der Funktionstypen zwar angesprochen, für die Bearbeitung der Aufgaben aber weniger gebraucht. Die Aufgaben konzentrieren sich auf das Erlernen von Übersetzungsfähigkeiten, die oftmals nach festen Schemata ablaufen. Selbst bei der Suche von Extremwerten scheint die technische Suche des Scheitelpunkts vor dem Variationsgedanken zu stehen.
Der Vergleich mit der Lehrplananalyse zeigt, dass die Erwartungen weitestgehend erfüllt wurden. Lediglich die allgemeine Umkehrbarkeit von Funktionen steht nicht im Lehrplan und stellt somit eine leichte Abweichung von diesem dar.

Inhalte des Gymnasialbuches der 10. Klasse

In der 10 Klasse finden sich sowohl im Algebra-Band, als auch im Geometrie-Band Inhalte zu funktionalem Denken.

Der Algebra-Band dieser Jahrgangsstufe ist um das zentrale Thema der Arbeit mit Potenzen aufgebaut. In diesem Zusammenhang werden Potenzfunktionen, Exponentialfunktionen und Logarithmusfunktionen eingeführt.

Schon bei der Einführung von Potenzen werden Darstellungen in Tabellen und Graphen gezeigt, um das sehr starke Wachstum beim Potenzieren zu illustrieren und zu untersuchen. Nach einer intensiven Beschäftigung mit Potenzen im algebraischen Register werden Potenzfunktionen in einem Anwendungsbeispiel mit Variationsbetrachtung eingeführt. Ausgehend von Potenzfunktionen mit positiven Exponenten werden in Abhängigkeit vom globalen Aspekt der Graphen verschiedene Klassen gebildet. Anschließend werden die Potenzen auf negative Exponenten erweitert. Eine Zusammensetzung von Funktionsgliedern verschiedenen Grades oder eine Verschiebung der Scheitel oder Wendepunkte wird nicht vorgenommen. Es wird lediglich ein multiplikativer Faktor an die Funktionsterme hinzugefügt.

In den Aufgaben wird zwischen der algebraischen und der graphischen Darstellung übersetzt und zu einigen Anwendungsaufgaben der Graph erstellt oder Punktweise Berechnungen durchgeführt.

Darauf folgt mit den Wurzelfunktionen die nächste Erweiterung der bekannten Potenzfunktionen. Sie werden als Umkehrfunktionen der bisher bekannten Potenzfunktionen definiert, wobei die Definitionsmenge entsprechend eingeschränkt wird. Zwar wird bei der Definition die graphische Darstellung betrachtet, in den Aufgaben finden aber hauptsächlich Punktweise Überlegungen innerhalb des algebraischen Registers statt.

Anschließend wird die Arbeit mit Potenzen noch weiter ausgeweitet und der Umgang mit allgemeinen rationalen und dann reellen Exponenten erlernt. Die Betrachtung der Potenzfunktionen wird aber nicht weiter ausgeweitet. Das neu erlernte Wissen wird allerdings für die Definition von Exponentialfunktionen genutzt. Nach dem Beispiel einer Realsituation, in der eine Variable in Abhängigkeit einer anderen exponentiell variiert, werden Exponentialfunktionen mit der Notation $x \mapsto a^x$ definiert. Die algebraische Darstellung durch eine Gleichung wird nicht, wie sonst üblich, angegeben.

Nach der Erklärung von Eigenschaften der graphischen Darstellung und der Variations- und Symmetrieeigenschaften werden in den Aufgaben Wachstumsprozesse und Zerfallsvorgänge in Realsituationen untersucht. Dazu werden Graphen erstellt, Punktweise Berechnungen durchgeführt aber auch die Formel gesucht, mit der eine gegebene Situation modelliert werden kann. Begleitend werden Übersetzungsaufgaben zwischen der algebraischen und der graphischen Darstellung angeboten, bei denen auch das jeweilige Wachstum beschrieben werden soll.

Als letzter Funktionstyp im Algebraband werden Logarithmusfunktionen als Umkehrfunktionen der Exponentialfunktionen definiert. Auch hier liegt der Fokus auf Arbeiten bei denen die graphische Darstellung aus der algebraischen erstellt werden soll. Außerdem wird das Wachstum untersucht und in Anwendungsaufgaben genutzt. (Feuerlein, Titze & Walter, 1992d)

Im Geometrie-Band dieser Klassenstufe werden die trigonometrischen Funktionen eingeführt.

Anfangs werden sie als Zuordnungen zu Winkeln und Polarkoordinaten im Einheitskreis und in Dreiecken gesehen. Erst beim Übergang von der Funktion eines Winkels zur Funktion einer reellen Zahl werden Sinus- und Kosinusfunktion definiert und ihre algebraische und graphische Darstellung angegeben. Dabei ist stets der geometrische Hintergrund beider Funktionstypen präsent. In einer Zusammenfassung der Eigenschaften dieser Funktionstypen werden Definitions- und Wertemenge, Variationseigenschaften und Symmetrien angegeben. Wie bei den Funktionen im Algebra-Band wird auch hier die algebraische Darstellung erst in den Erklärungen angegeben und in der Definition die Notation $f : x \mapsto \sin x$ genutzt.
In folgenden Aufgaben, wird hauptsächlich von der algebraischen Darstellung in die graphische Darstellung übersetzt, wobei nur kleine Variationen an der algebraischen Darstellung vorgenommen werden.
Die Einführung der Tangensfunktion erfolgt analog zur Einführung der beiden anderen trigonometrischen Funktionen.
Ein separat gekennzeichneter Zusatzteil, der nicht auf Inhalten des Lehrplans fußt, beschäftigt sich mit Relationen in Zusammenhang mit trigonometrischen Funktionen, ohne dass definiert wird, was eine Relation ist. Hier verlassen sich die Autoren auf Vorarbeiten aus dem Algebra-Band, die allerdings nicht geleistet wurden.
Im letzten Kapitel des Geometrie-Bandes wird die Sinusfunktion nochmals aufgegriffen und mit Hinblick auf den Einsatz bei der Beschreibung von Schwingungsvorgängen in der Physik untersucht. Der Funktionsterm wird durch Parameter systematisch erweitert und die Auswirkung einer Veränderung der Parameter auf die graphische Darstellung betrachtet. In den Aufgaben wird sowohl von der algebraischen in die graphische Darstellung, als auch anders herum übersetzt. (Kratz, Schweiger & Wörle, 1994)

Die Inhalte zu funktionalem Denken sind im Schulbuch der 10. Klasse in zwei Bereiche eingeteilt. Einerseits werden die Potenz- und Exponentialfunktionen im Algebra-Band in enger Verschränkung mit der Einführung der Arbeit mit Potenzen betrachtet. Andererseits werden die trigonometrischen Funktionen im Geometrieband eingeführt. Die Menge der bekannten Funktionstypen wird also deutlich erweitert. Allerdings sind die trigonometrischen Funktionen durch die Trennung in zwei Bände nicht mit den restlichen Funktionsbetrachtungen verbunden und es werden kaum Anwendungsaufgaben betrachtet. Die Kovariations-Grundvorstellung steht dann auch im Hintergrund, da die trigonometrischen Funktionen klar der Geometrie und den dortigen Punktweisen Untersuchungen zugeordnet sind und nicht der Algebra.
In beiden Bänden wird in den Aufgaben viel mit den algebraischen und den graphischen Darstellungen gearbeitet. Übersetzungen von der Formel zum Graph stehen im Mittelpunkt. Darstellungen im tabellarischen Register werden meist nur als Übergangsdarstellung genutzt. Zur algebraischen Darstellung in anzumerken, dass die Potenzfunktionen anfangs noch mit der Pfeildarstellung definiert werden und die Darstellung im algebraischen Register klar als *Darstellung* definiert ist. Diese Trennung findet später nicht mehr statt. Dort wird die algebraische Darstellung nicht mehr angegeben, so dass faktisch eine Vermischung stattfinden kann. Zu den meisten Funktionstypen finden sich realitätsnahe Aufgaben, außer bei den trigonometrischen Funktionen und den Wurzelfunktionen.

Sowohl die Zuordnungs-Grundvorstellung, als auch die Zuordnungs-Grundvorstellung werden angesprochen. Der Intensität des Einsatzes der jeweiligen Vorstellung hängt auch von der Art des funktionalen Zusammenhangs ab. So wird bei Potenzfunktionen und besonders bei Exponentialfunktionen die Kovariations-Grundvorstellung deutlich stärker angesprochen, als bei der Arbeit mit den trigonometrischen Funktionen. Die Notwendigkeit der Ausbildung der Objekt-Grundvorstellung ist in dieser Jahrgangsstufe nicht auszumachen.
Definitions- und Wertemengen werden bei den Definitionen der verschiedenen Funktionstypen beachtet. In den Aufgaben werden sie allerdings nur selten angegeben oder erfragt.
Der Vergleich mit der Analyse der Lehrpläne zeigt, dass die Inhalte wie erwartet umgesetzt werden. Lediglich die Nutzung der trigonometrischen Funktionen zur Beschreibung periodischer Zusammenhänge fällt kürzer aus als vermutet.

Übersicht über die Inhalte der Gymnasialbücher

Die untersuchten Bücher der bayerischen Gymnasien zeigen, dass den Schülern ermöglicht werden soll ein breites concept image zur Funktionen aufzubauen. Es wird eine Vielzahl von Funktionstypen gesehen (linear, quadratisch, einfache Potenzen, Wurzeln, exponentiell, logarithmisch, trigonometrisch) und bei der Einführung der Funktionsdefinition der Entwicklung von Fehlvorstellungen vorgebeugt. Dieses Vorbeugen muss allerdings kritisch hinterfragt werden, denn es erfolgt nicht während der Einarbeitungsphase vor der eigentlichen Funktionsdefinition. Sämtliche Beispiele werden unmittelbar nach der Funktionsdefinition gegeben, sodass der tatsächliche Effekt auf die Ausbildung der concept images kritisch hinterfragt werden muss (siehe Abschnitt 3.1.6.). In den Jahren nach der Funktionsdefinition werden auch keine nichtlinearen funktionalen Zusammenhänge untersucht, so dass das concept image auch im Nachhinein noch eingeschränkt werden kann.
Alle Darstellungen werden genutzt und Übersetzungen zwischen ihnen durchgeführt. Insbesondere die Arbeit im Register der Realität bleibt in der gesamten Sekundarstufe I wichtig.
Bei der Definition der verschiedenen Funktionstypen und der Erweiterung der bekannten Funktionen steht oftmals die algebraische Schreibweise im Vordergrund, sodass eine Identifikation von Funktionen mit ihrer Darstellung im algebraischen Register möglich ist. Das tabellarische Register wird in den höheren Klassenstufen fast ausschließlich für den Übergang zwischen dem algebraischen und dem graphischen Register gebraucht. Die Übersetzung zwischen der algebraischen und der graphischen Darstellung ist auch die häufigste und wird zur Erkundung neuer Funktionstypen genutzt.
Den Schülern wird in den Definitionen und Aufgaben die Möglichkeit gegeben, die Zuordnungs- und Kovariations-Grundvorstellung auszubilden und zu nutzen. Abhängig vom untersuchten Funktionstyp steht die eine oder die andere Grundvorstellung im Vordergrund. Eine deutliche Präferenz für eine der beiden Grundvorstellungen kann in den Gymnasialbüchern nicht festgestellt werden. In der Funktionsdefinition ist aber nur von Zuordnung die Rede.
Die Objekt-Grundvorstellung wird kaum genutzt. Verschiebungen der Graphen von proportionalen Funktionen oder der Scheitelpunkte von quadratischen Funktionen zur Analyse der Auswirkung von Parametern sind zwar im Grunde Verschiebungen des

Funktionsobjektes, es ist aber davon auszugehen, dass tatsächlich das Graph-Objekt verschoben wird. Es handelt sich also um die Verschiebung einer Darstellung und nicht um ein Operieren mit dem mathematischen Objekt Funktion, was einen fundamentalen Unterschied ausmacht (siehe Abschnitt 3.1.1.).
Die Definitions- und Wertemengen von Funktionen werden bei den jeweiligen Definitionen und in einigen Aufgaben angegeben, sind aber bei weitem nicht so im Mittelpunkt wie in den Realschulbüchern.
Es lassen sich auf Grund der in Deutschland üblichen Genehmigungsverfahren nur wenige Abweichungen von den Lehrplaninhalten finden.

Im nächsten Abschnitt wird ein Überblick über die Analysen des bayerischen potentiellen Curricula gegeben.

7.1.4 Zusammenfassung des bayerischen potentiellen Curriculums

Betrachtet man alle hier analysierten Schulbücher so sind im Aufbau trotz des unterschiedlichen Erscheinungsbildes einige Gemeinsamkeiten auszumachen. Alle halten sich eng an die Vorgaben des intendierten Curriculums und spiegeln dies in der Abfolge der Inhalte wieder, die sich an den Aufbau des Lehrplans hält. In allen Büchern werden Aufgaben zu den verschiedenen Inhalten nach Kapiteln zusammengefasst und untereinander aufgelistet. Eine Unterteilung in Schulstunden oder eine Durchmischung zur Erstellung eines spiralförmigen Stoffaufbaus gibt es nicht.
Je höher die Schulform, desto mehr Erklärungen und Beispiele gibt es, so dass es für Gymnasialschüler möglich ist den Schulstoff mit Hilfe des Schulbuches zu verstehen und selbstständig zu erlernen, während Hauptschüler dazu keine Möglichkeit haben.
Erläuterungen zur Nutzungsweise des Buches für Schüler oder zum Aufbau und zur Auswahl der Inhalte für Lehrer gibt es nicht.

Die Reihenfolge der eingeführten Funktionstypen ist in allen Schularten gleich. In der Hauptschule werden proportionale, umgekehrt proportionale und lineare Funktionen eingeführt. Die Schüler, die die mittlere Reife anstreben lernen zusätzlich noch die quadratischen und die exponentiellen Funktionen kennen. In den nichtmathematischen Zweigen der Realschule werden außerdem noch die Wurzelfunktionen gesehen. Im mathematisch-technischen Zweig der Realschule und am Gymnasium werden die Potenzfunktionen und schließlich die Exponential und Logarithmusfunktionen behandelt. Die trigonometrischen Funktionen werden in aller Ausführlichkeit nur am Gymnasium studiert. Somit handelt es sich stets um denselben Aufbau, der mit ansteigender Schulart aufgestockt wird. Allerdings werden am Gymnasium nur eingliedrige Potenzfunktionen untersucht, während im mathematisch-technischen Zweig der Realschule auch mehrgliedrige Potenzfunktionen vorkommen.

In der Hauptschule werden Funktionen nur in der 10. Klasse definiert, wenn die meisten Schüler die Schule bereits verlassen haben. Dann ist allerdings auch noch eine Verwechslung mit der Darstellung im algebraischen Register zu erwarten. Diese wird gleichzeitig mit der

Einführung der Wortes *Funktion* erstmals gesehen und nicht klar als Darstellung abgegrenzt. Dazu kommt, dass Funktionen an sich nie definiert werden.
In der Realschule werden Funktionen als spezielle Relationen definiert. Auch hier sind Schwierigkeiten zu erwarten, da diese Definition, abgesehen von der Einführung von Umkehrfunktionen, nicht mehr gebraucht wird. Allerdings wird das mengentheoretische Vokabular oft benutzt und in den Aufgaben stets die Definitionsmenge angegeben, wenn diese nicht gesucht ist. Später werden die verschiedenen Funktionstypen über ihre algebraische Darstellung definiert, was auch hier zu einer Identifizierung mit der algebraischen Darstellung führen kann.
Im Gymnasium dagegen wird die Definition allen Arbeiten mit konkreten Funktionen vorangestellt. Zuerst werden Funktionen als *black box* gezeigt und dann werden sie als eindeutige Zuordnungen definiert. Bei der Definition wird darauf geachtet möglichst viele verschiedene Funktionstypen zu erwähnen und alle Darstellungen zu zeigen, damit keine Fehlvorstellungen entstehen können. Allerdings werden Funktionen immer als Zuordnungen zwischen Zahlen bezeichnet und die Darstellung durch Pfeile ($x \mapsto f(x)$) erinnert sehr stark an die algebraische Darstellung. Dies kann auch hier zu einer Identifikation mit der algebraischen Darstellung führen.
Die Hauptschüler, die noch die 10. Klasse besuchen, können Funktionen als zusammenfassenden Begriff für alle Zuordnungen kennen lernen, auch wenn Funktionen nie definiert werden. Trotzdem fällt auf, dass die Funktionsdefinition in den bayerischen Schulen, und dort insbesondere im Gymnasium, nicht als zusammenfassender Oberbegriff von den Schülern selbst erstellt werden kann, sondern vorab definiert wird und anschließend mit den konkreten Funktionstypen gefüllt werden muss. Dies ist für die weitere Arbeit mit Funktionen nicht unbedingt förderlich (siehe Abschnitt 3.3.3).
Eine Gemeinsamkeit des potentiellen Curriculums aller Schularten ist es, dass, auch wenn anfangs funktionale Zusammenhänge unüblicher Form betrachtet werden, die weiteren Untersuchungen normalerweise mit stetigen Funktionen durchgeführt werden, die auf dem gesamten Definitionsbereich durch eine Formel gegeben sind.

In allen drei Schularten werden Darstellungen aus allen Darstellungsregistern genutzt. In der Hauptschule finden sich erst in der 7. Klasse mehr Arbeiten im graphischen Register und bis zur 10. Klasse wird dort das algebraische Register nicht für die allgemeine Darstellung von funktionalen Abhängigkeiten genutzt.
An der Realschule und am Gymnasium stehen Darstellungen im algebraischen und im graphischen Register sowie Übersetzungen zwischen ihnen im Mittelpunkt. Die tabellarische Darstellung wird meist nur als Hilfsdarstellung gesehen. Das Register der Realität ist nur in der Hauptschule und dem Gymnasium stark ausgeprägt. An der Realschule geht sein Einfluss in den höheren Klassen stark zurück.

Im Bezug auf die angesprochen Grundvorstellungen zeichnet sich ein gespaltenes Bild ab. Einerseits wird in der Realschule mit der mengentheoretischen Definition die Zuordnungs-Grundvorstellung angesprochen und auch in den Aufgaben nur sehr selten mit der Kovariations-Grundvorstellung gearbeitet. Dort steht also die Zuordnungs-Grundvorstellung im Mittelpunkt.
In der Hauptschule und dem Gymnasium lassen sich diese beiden Grundvorstellungen

gleichermaßen finden. In den Definitionen der betrachteten funktionalen Abhängigkeiten wird aber in erster Linie von Zuordnungen gesprochen.
In der Realschule und dem Gymnasium werden neue Funktionstypen kennen gelernt, indem der Graph einer schon bekannten Funktion im graphischen Register verschoben wird. Trotz des zu Grunde liegenden Verschiebens des Objektes *Funktion* wird hier wohl eher mit dem Objekt *Kurve* umgegangen. Bei diesen Aufgaben kommt somit nicht unbedingt die Objekt-Grundvorstellung zum Einsatz. Außerdem kann die Objekt-Grundvorstellung beim Zusammenfassen der Potenzfunktionen zu verschiedenen Klassen ausgebildet werden. Sie wird aber in keiner der Schulformen tatsächlich genutzt.

Im concept image der Hauptschüler zu Funktionen sind wegen der wenigen bekannten Funktionen einige Einschränkungen und Fehlvorstellungen zu erwarten. Auch die Schüler der Realschule, die nicht den mathematisch-technischen Zweig besuchen, werden Schwierigkeiten haben sich ein umfassendes Bild zu erarbeiten. Lediglich bei den Schülern des mathematisch-technischen Zweiges der Realschule und den Gymnasialschülern kann eine breite Basis für die Ausbildung der funktionalen Denkweise erwartet werden.

Die Schüler in Bayern können also, abhängig von ihrer Schulform, ein grundlegend verschiedenes Verständnis von Funktionen entwickeln. Sie kennen entweder gar keine Funktionsdefinition, oder die Definition als spezielle Relation oder als Zuordnung. Außerdem steht ihnen am Ende der Sekundarstufe I eine unterschiedliche Auswahl an bekannten Funktionstypen zur Verfügung. Es liegen also fundamentale Unterschiede und, in manchen Fällen, deutliche Einschränkungen vor.

Diese kurze Zusammenfassung soll einen generellen Überblick geben, weswegen nicht alle Details der Analysen der Lehrbücher erfasst werden konnten. Dazu sei auf die jeweiligen Abschnitte verwiesen.

Im nächsten Abschnitt wird das potentielle Curriculum von Frankreich analysiert, um es mit dem potentielle Curriculum Bayerns vergleichen zu können.

7.2 Potentielles Curriculum von Frankreich

In Frankreich müssen Schulbücher von keiner Behörde genehmigt werden. Somit können Schulbücher, die in allen Schulen in ganz Frankreich genutzt werden können, ohne staatliche Kontrolle veröffentlicht werden. Die Verantwortung für die Einhaltung des intendierten Curriculums liegt bei den Lehrern, die frei zwischen allen auf dem Markt erhältlichen Büchern entscheiden. Eine ähnlich starke Bindung an die Lehrpläne wie in Deutschland kann also nicht erwartet werden, weswegen eine genaue Analyse des potentiellen Curriculums von Frankreich besonders wichtig ist. Für jede Jahrgangsstufe werden darum zwei der am meisten genutzten Schulbücher untersucht.

7.2.1 Die Schulbücher

Die erste Klassenstufe, die in Frankreich untersucht wird, der CM2, gehört zur Grundschule. Die betrachteten Schulbücher sind die letzten Bände von Schulbuchreihen, welche die Schüler durch ihre Grundschulzeit begleitet haben.

Aufbau von Cap maths CM2

Der erste Band, der analysiert wird, ist *Cap maths CM2* von Hatier. Viele farbige Überschriften und Illustrationen lockern das Buch auf und gestalten es ansprechend. Die Inhalte werden auf 190 Seiten dargestellt. In einem Zusatzheft für Schüler mit dem Titel *Le Dico maths CM2* werden auf weiteren 50 Seiten die Inhalte nochmals erklärt.
Am Anfang des Buches wird auf einem Übersichtsplan gezeigt, wie die Inhaltsbereiche im Buch aufgeteilt sind und wie sich die Inhalte über das ganze Schuljahr hinweg entwickeln sollen.
Anschließend wird auf zwei Seiten für Schüler erklärt, wie das Buch zu nutzen ist. Dort wird der Aufbau einer Sitzung dargestellt und auf das Zusatzheft hingewiesen.
Das Buch ist nicht nach Inhaltsbereichen aufgeteilt, sondern nach Sitzungen, die jeweils eine Seite einnehmen (in Ausnahmen zwei). Das gesamte Schuljahr ist in 15 Einheiten eingeteilt, die jeweils aus acht Sitzungen bestehen. Die letzte Sitzung jeder Einheit bereitet einen kleinen Test vor und führt diesen durch. Dort finden sich Aufgaben zu den sieben vorangegangenen Sitzungen. Jeweils nach drei Einheiten findet sich eine Doppelseite mit einer Aufgabe zu einer Realsituation, mit der sich die Schüler etwas länger beschäftigen können.
Sitzungen, die keine Testsitzungen sind, haben immer den gleichen Aufbau. Anfangs werden unter dem Titel *Revoir* Inhalte wiederholt, anschließend Neues im Teil *Chercher* mit hinführenden Aufgaben kennen gelernt und schließlich im Teil *Excercices* das soeben Gelernte geübt. Bei keinen Aufgaben, auch nicht bei den Tests, werden Lösungen angeboten.
Am Ende des Buches finden sich in einer Aufgabenbank verschiedene Anwendungsaufgaben zu jeder Einheit, mit denen die Schüler die Inhalte vertiefen können.
Im Schulbuch werden die Inhalte für die Schüler nicht beispielhaft erklärt, statt dessen wird mit hinführenden Aufgaben gearbeitet. Erklärungen werden im Zusatzband *Le Dico maths CM2* gegeben. Ohne jegliche Aufgaben wird dort der mathematische Hintergrund anhand von Beispielen erklärt. Es soll als Nachschlagewerk für die Schüler dienen.
Anweisungen oder Erklärungen des Aufbaus und der Inhalte für Lehrer sind weder im Buch noch im Zusatzheft zu finden.

Inhalte von Cap maths CM2

Die Inhalte zu funktionalem Denken sind in diesem Buch sehr beschränkt. Funktionale Zusammenhänge kommen lediglich bei einem Spiel zum Tragen, bei dem Abhängigkeiten in einer Tabelle erkannt werden sollen um diese zu vervollständigen. Es handelt sich um ein Gedankenspiel, in dem nur die tabellarische Darstellung zum Einsatz kommt. Allerdings nutzen die Schüler die Zuordnungs-Grundvorstellung, wenn sie die Regel der gegebenen Zahlenpaare ermitteln. Die gesuchten Zusammenhänge sind von der Form $y=ax+b$ und $y=x^2$.
Bei der Arbeit mit Proportionalität sollen in den Aufgaben beispielsweise Mischungsverhältnisse verglichen werden oder ein unvollständiges Wertepaar mit Hilfe eines anderen Wertepaares ergänzt werden. Dabei taucht der Proportionalitätskoeffizient nie auf und im Zusatzheft werden zur Lösung ausschließlich Kovariationsüberlegungen vorgeschlagen (Charnay, Combier & Dussuc, 2004b, S. 23).

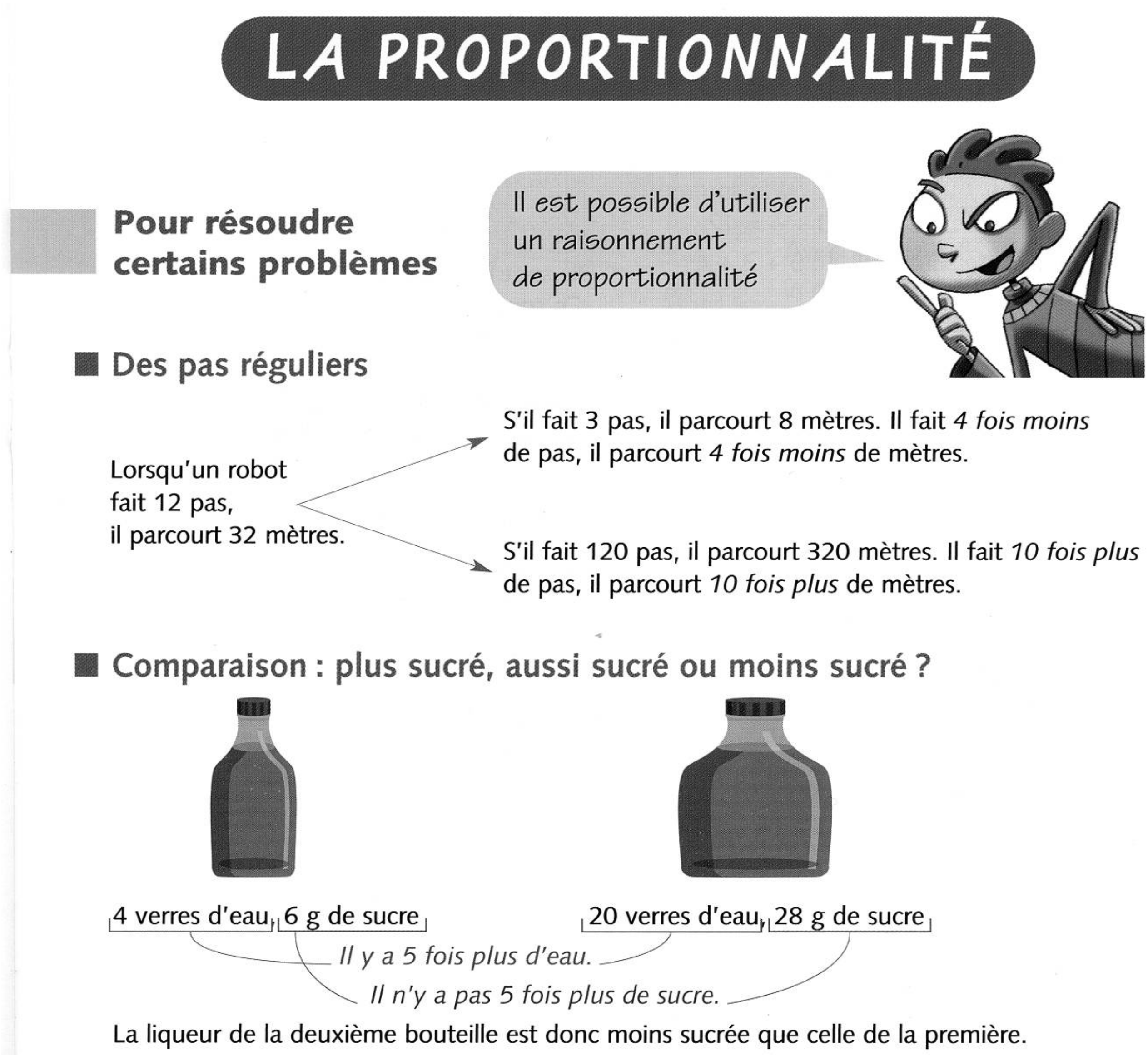


Abbildung 24: CM2, Proportionalität

Bei der Einführung von der Prozentrechnung wird keine Verbindung zu proportionalen Situationen hergestellt.
Außerdem werden die Schüler an die Arbeit in einigen Darstellungsregistern von funktionalen Abhängigkeiten herangeführt. So werden Tabellen genutzt und aus ihnen Balkendiagramme erstellt. (Charnay, Combier & Dussuc, 2004a; Charnay, Combier & Dussuc, 2004b)

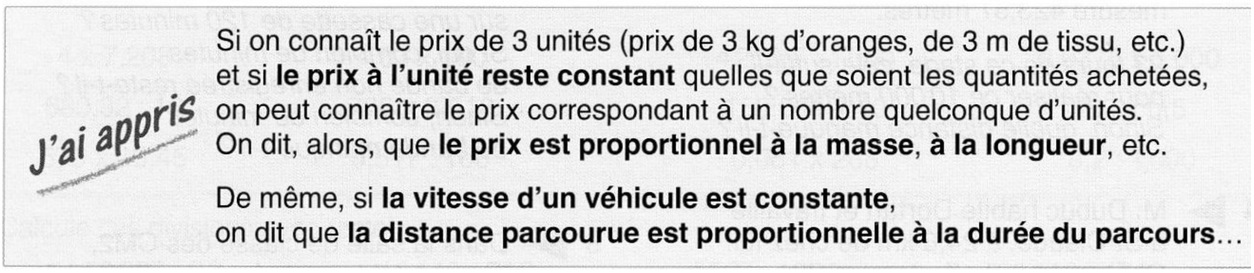
Aufbau von j'apprends les maths, manuel CM2

Das zweite Buch, das für diese Jahrgangsstufe betrachtet wird, ist *j'apprends les maths, manuel CM2* von Retz. Auch dieses Buch ist mit vielen Farben und Illustrationen ansprechend gestaltet. Auf 160 Seiten werden die Inhalte abgedruckt. Ein Zusatzheft für Lehrer enthält auf 24 Seiten zusätzliche Arbeitsblätter, mit denen die Inhalte einiger Bereiche vertieft werden können.
Das Buch beginnt mit einer zweiseitigen Übersicht über einige Forschungsergebnisse und die daraus folgende theoretische Konzeption des Buches. Diese Erklärungen, die sich an die Lehrer richten, werden mit Hilfe von Beispielen genauer erläutert.

Dann folgt die Darstellung des Buchaufbaus und dessen Nutzungsweise. Auf Grund des spiralförmigen Stoffaufbaus innerhalb des Buches wird dringend davon abgeraten die vorgeschlagene Reihenfolge zu verändern. Auch weitere Aktivitäten, wie das regelmäßige Üben von Kopfrechnen oder die Nutzung der Arbeitsblätter, wird den Lehrern nachdrücklich empfohlen.
Nach dem Inhaltsverzeichnis, das in die Bereiche Arithmetik, Geometrie und Messen untergliedert ist, werden die Inhalte in 122 Sitzungen präsentiert.
Für eine normale Sitzung sind ein bis zwei Seiten vorgesehen, die in zwei Teilen aufgeteilt sind. Der erste Teil mit dem Titel *Je découvre* (Ich entdecke) führt neue Inhalte ein, während im zweiten Teil *Je deviens performant* (Ich werde leistungsfähig) Inhalte aus anderen Sequenzen geübt werden. Im Titel der Sitzungen werden das zu entdeckende Thema genannt und außerdem Rechenaufgaben vorgeschlagen, die zu Anfang der Stunde gemacht werden sollen. Am Ende jeder Sitzung wird klein gedruckt für Lehrer eine Erklärung zu den meisten Aufgabe gegeben, insbesondere zu denen aus dem Teil J*e découvre*. Darin wird dargelegt, warum die Aufgabe ausgewählt wurde, wo zu erwartende Schwierigkeiten sind und welcher Lösungsweg zu bevorzugen ist.
Wenn ein neuer Inhalt eingeführt wird, dann gibt es vor den hinführenden Aufgaben keine Erklärungen. Im Anschluss wird dann aber in einem Kasten mit dem Titel *J'ai appris* (Ich habe gelernt) der gelernte Inhalt zusammengefasst.
Nach etwa acht Sitzungen wird eine Doppelsitzung zur *Problemlösung* angeboten. Dort findet man verstärkt Aufgaben zu Realsituationen.
Das Buch und damit das Schuljahr ist in vier Perioden eingeteilt, nach denen jeweils eine Bilanzsitzung angesetzt ist. Dort werden Aufgaben zu den bisher gesehenen Inhalten behandelt. Lösungen zu diesen Tests werden nicht angegeben, genauso wenig wie zu den restlichen Aufgaben des Buches.

Inhalte von j'apprends les maths, manuel CM2

In mehreren Sitzungen werden proportionale Situationen gesehen. Eine proportionale Situation wird dabei über die Rückführung auf die Einheit charakterisiert (Brissiaud, 2000a, S. 124)


J'ai appris

Si on connaît le prix de 3 unités (prix de 3 kg d'oranges, de 3 m de tissu, etc.) et si **le prix à l'unité reste constant** quelles que soient les quantités achetées, on peut connaître le prix correspondant à un nombre quelconque d'unités. On dit, alors, que **le prix est proportionnel à la masse**, **à la longueur**, etc.

De même, si **la vitesse d'un véhicule est constante**, on dit que **la distance parcourue est proportionnelle à la durée du parcours**…

Abbildung 25: CM2, Proportionalität

Es wird also nicht von einem Proportionalitätsfaktor oder von Quotientengleichheit gesprochen, sondern von dem Preis für eine Einheit. Darüber werden Aufgaben gelöst, in denen die Zuordnung im Mittelpunkt steht.
Später lernen die Schüler, dass in manchen Fällen durch Kovariationsüberlegungen die Rückführung auf die Einheit vermieden werden kann. So können fehlende Werte proportionaler Wertepaare gefunden und Tabellen vervollständigt werden.

Bei allen Aufgaben zu proportionalen Situationen handelt es sich um Anwendungsaufgaben zu Realsituationen.

Außerdem werden die Schüler in dieser Jahrgangsstufe an die Arbeit im graphischen und tabellarischen Darstellungsregister herangeführt. In verschiedenen Aufgaben mit Realitätsbezug sollen Informationen aus Tabellen und graphischen Darstellungen entnommen werden und in der jeweils anderen Darstellung ergänzt werden. Die zugrunde liegenden Situationen sind allerdings nicht proportional (z.B. Zeit-Temperatur). (Brissiaud, 2000a; Brissiaud, 2000b).

Übersicht über die Bücher des CM2

Beide hier gesehenen Bücher für den CM2 nehmen den Lehrern Arbeit ab. Sie teilen das Jahr in Sitzungen ein und nehmen den spiralförmigen Stoffaufbau schon vorweg. Während sich *Cap maths* eher an Schüler richtet und viele Erklärungen für sie enthält, scheint *j'apprends les maths* mehr für Lehrer geschrieben zu sein.

In beiden Büchern wird die direkte Proportionalität eingeführt und mit ihr gearbeitet. Unterschiede sind allerdings in der Nutzung der Kovariations-Grundvorstellung zu finden. Wähernd sich *Cap maths* zur Lösung der Aufgaben ausschließlich auf sie verlässt, wird in *j'apprends les maths* mit der Rückführung auf Einheiten noch ein weiteres Verfahren kennen gelernt. Auch dort sollen die meisten Aufgaben jedoch mit Variationsüberlegungen gelöst werden. In keinem der Bücher wird von Proportionalitätsfaktor oder Quotientengleichheit gesprochen und es wird kein Dreisatz für das Ermitteln fehlender Werte genutzt.
In Kopfrechenaufgaben wird in *Cap maths* zusätzlich die Zuordnungs-Grundvorstellung angesprochen.
Mit der Betrachtung des tabellarischen und des graphischen Registers und von Übersetzungen zwischen ihnen werden alle Forderungen des Lehrplans erfüllt.

Für die Klassenstufen 6^{e} bis 3^{e}, also dem Collège, werden die Schulbücher der *Triangle*-Serie von Hatier und der *Cinq sur Cinq* Serie von Hachette analysiert.

Aufbau der Bücher des Collège

Die Bände aus der *Cinq sur Cinq* Reihe sind etwa 280 Seiten stark und in 16 Kapitel unterteilt. Sie sind farbig gedruckt, enthalten aber weniger Illustrationen und Bilder als die Bücher der Grundschule.
Auf jeweils einer Seite werden am Anfang pädagogische Absichten dargelegt und die Lehrplaninhalte auf die einzelnen Kapitel bezogen. Auf einer zweiseitigen Übersicht wird den Schülern der Aufbau und die Nutzungsweise des Buches erklärt. Das Inhaltsverzeichnis zeigt, dass die erste Hälfte der Bücher für numerische Arbeiten vorgesehen ist, während sich die zweite Hälfte mit der Geometrie beschäftigt.
Auf den letzten Seiten dieser Schulbücher befinden sich eine Formelsammlung zur Geometrie und ein Index. Außerdem ist dort ein Mini-Wörterbuch abgedruckt, in dem schwierige oder technische Worte erklärt werden (z.B. Kredit, Eigenschaft, Umfang).
Die Kapitel sind alle nach dem gleichen Schema untergliedert. Auf der ersten Seite werden einfache Multiple-Choice Aufgaben gestellt, die nur mit den Inhalten des Kapitels

beantwortet werden können. Anschließend werden auf zwei Seiten Aufgaben angeboten, mit denen der Lehrer die Inhalte einführen kann. Auf einer Doppelseite mit dem Titel *Retenir* (Behalten) wird der mathematische Hintergrund mit Beispielen erklärt und Beispielaufgaben gelöst.
Die dann angebotenen Aufgaben sind in Gruppen zusammengefasst, in denen bestimmte Inhalte geübt werden sollen. Es folgen ein Test zum bisher Erlernten, der während des Unterrichts gemacht werden soll, und ein weiterer Test, den die Schüler zu Hause bearbeiten sollen. Zu beiden gibt es in der 6^e und 5^e keine Lösungen. In den beiden anderen Klassenstufen finden sich am Ende des Buches die Lösungen für den Testteil, der zu Hause gemacht werden soll.
Auf einer Seite werden die Inhalte im Anschluss an die Tests nochmals mit einfachen Beispielen geübt, wobei andere Aspekte betont werden als zuvor. Nach weiteren Aufgabenseiten, mit auch als speziell schwierig gekennzeichneten Aufgaben, schließen die Kapitel mit einer historischen Anekdote und einer Knobelaufgabe.
Üblicherweise werden nach drei Kapiteln auf zwei Seiten Bilanzaufgaben gestellt, zu denen es für die ersten beiden Jahrgangsstufen am Schluss des Buches Lösungshinweise gibt. Sie ermöglichen die Kontrolle des bis dahin Gelernten.
Ab der 4^e finden sich am den der Kapitel meist einige Aufgaben, die die Schüler auf die Abschlussprüfung am Ende der 3^e vorbereiten sollen und die mit den gerade erlernten Inhalten gelöst werden können. (Delord & Vinrich, 2000a, 2000b, 2002, 2003)

Die Bücher der *Triangle* Reihe sind etwa 260 Seiten lang und in 15 Kapitel unterteilt. Auch sie sind farbig gestaltet und haben weniger Abbildungen und Illustrationen als die Bücher des CM2. Sie unterscheiden sich aber auch in einigen Punkten von denen der *Cinq sur Cinq* Reihe.
Im Inhaltsverzeichnis tauchen auch dort die Oberpunkte numerisches Arbeiten und geometrisches Arbeiten auf. Zusätzlich findet sich in der 5^e und der 4^e ein Oberpunkt Verbindende Arbeiten und in der 3^e einer zum Arbeiten mit Variablen. Im Inhaltsverzeichnis ist eine Spalte eingefügt, in der die Autoren die Reihenfolge vorschlagen, in der Inhalte behandelt werden sollen. Leitende Idee bei der Erstellung des Vorschlags scheint die alternierende Betrachtung von numerischen und geometrischen Kapiteln zu sein.
Nach dem Inhaltsverzeichnis wird der Aufbau und die Nutzungsweise für Schüler auf zwei Seiten erklärt und dann der Lehrplan abgedruckt. Am Ende des Buches finden sich ein Index, und eine Formelsammlung zur Geometrie. Außerdem werden in der 4^e und in der 3^e dort die Methoden für geometrisches Arbeiten zusammengefasst und mit Hilfe einer Formelsammlung begründet.
Die Kapitel sind auch in dieser Reihe alle nach demselben Prinzip aufgebaut. Anfangs werden auf einer Seite Aufgaben gestellt, die die Schüler erst nach dem Kapitel lösen können. Damit sollen sie die auftretenden Hürden erkennen. Anschließend werden hinführende Aufgaben zu den einzelnen Inhalten angeboten, mit denen der Lehrer den Stoff erklären kann. Hinweise auf später folgende Parallelaufgaben zur Einübung sind daneben abgedruckt. Die erworbenen Kenntnisse werden dann auf etwa zwei Seiten nochmals mit Beispielen zusammengefasst. Außerdem werden die Methoden, die zum Lösen der Aufgaben benötigt werden dargestellt,

so dass sie von den Schülern übernommen werden können.
Anschließend folgen die nach den geforderten Fähigkeiten geordneten Aufgaben. In manchen Kapiteln gibt es zusätzlich einen Unterpunkt *Problemlösen*, in dem speziell angewandte Aufgaben gestellt werden. Ein halbseitiger Test mit Aufgaben, deren Lösungen am Ende des Buches zu finden sind, erlaubt es den Schülern eventuelle Schwächen festzustellen. Hinweise auf Übungsaufgaben mit analogem Inhalt werden auch gegeben, so dass im Fall einer erkannten Schwäche dies behoben werden kann. Das Kapitel schließt mit weiteren Aufgaben, die in Übungsaufgaben, komplizierteren Aufgaben und zusammenfassenden Aufgaben eingeteilt sind.
In der 3^{e} befasst sich das letzte Kapitel ausschließlich mit der Vorbereitung auf die Abschlussprüfung und mit dem Übergang in die 2^{de}. Ohne neue Inhalte zu behandeln werden Aufgaben zu allen Bereichen gestellt und alte Prüfungsaufgaben abgedruckt. (Chapiron, Mante, Mulet-Marquis & Pérotin, 2001, 2002, 2003 & 2005)

Beide Bücher sind sich im Aufbau ähnlich. Am Anfang beziehen sie sich beide auf den Lehrplan und erklären wie das Buch genutzt werden soll.
Die Kapitel werden in beiden Fällen mit einigen Aufgaben begonnen, bei denen die Schüler feststellen sollen, dass ihnen die Möglichkeiten zur Bearbeitung fehlen. Anschließend werden Aufgaben angeboten, welche die vom Lehrer gegebenen Erklärungen begleiten sollen. Die zu erlernenden Inhalte werden dann zusammengefasst und Aufgaben zu deren Einübung abgedruckt.
Die Aufgaben sind nach den geforderten Fähigkeiten gruppiert. Ein Test gibt den Schülern und Lehrern die Möglichkeit Defizite aufzudecken und sie mit den dann nachfolgenden Aufgaben zu beheben.
In der *Triangle* Reihe gibt es Informationsseiten zum geschichtlichen Hintergrund und eine vorgeschlagene Reihenfolge für die Behandlung der Kapitel. Beides ist in *Cinq sur Cinq* nicht zu finden.

Inhalte der Schulbücher der 6^{e}

In der 6^{e} finden sich in *Cinq sur Cinq* nur wenige Inhalte zu funktionalen Situationen. Allerdings wird innerhalb der verschiedenen Darstellungsregister gearbeitet. In Aufgaben zu mehreren Teilbereichen lernen die Schüler Informationen aus Graphen und Tabellen zu entnehmen. Es handelt sich anfangs um ein Punktweises Auslesen und in späteren Kapiteln auch um das Eintragen einzelner Punkte in das Koordinatensystem. Übersetzungen zwischen den beiden Darstellungen finden im Allgemeinen aber nicht statt.
In einem Kapitel zum Rechnen mit Variablen werden die Schüler an die Nutzung des algebraischen Registers herangeführt. Variablen werden als Platzhalter betrachtet und Terme für einzelne Werte berechnet. In den Aufgaben soll die Gleichheit zweier Terme erkannt werden und Unbekannte in Gleichungen berechnet werden. Dadurch erhalten die Schüler die Möglichkeit zu erkennen, dass die algebraische Darstellung nicht eindeutig ist. Außerdem werden Übersetzungen zwischen Realsituationen und dem algebraischen Register durchgeführt.

Die Sprechweise *en fonction de* taucht nur in vereinzelten Aufgaben auf und spielt in diesem Buch keine Rolle. (Delord & Vinrich, 2000a)

In *Triangle* finden sich mit einem Kapitel zur Proportionalität mehr Inhalte zu funktionalem Denken. Zentrales Anliegen des Kapitels ist es, dass die Schüler Proportionalität in der Realität erkennen und einzelne fehlende Werte mit verschiedenen Methoden berechnen können. Dabei werden auch Beispiele nichtproportionaler Situationen gesehen. Im Unterrichtsteil wird Proportionalität nochmals definiert. Bei dieser Definition steht die Zuordnung zwischen zwei Größen im Vordergrund, die durch Multiplikation oder Division mit einem festen Wert gegeben wird.
Zum Erkennen von proportionalen Situationen werden den Schülern drei Methoden angeboten: Über den Rückgang zur Einheit, durch Kovariationsüberlegungen oder mit Hilfe des Proportionalitätskoeffizienten.
Eine Untersuchung der Darstellung von Proportionalität im algebraischen oder im graphischen Register findet nicht statt. Auch das tabellarische Register wird kaum genutzt. Außerdem fällt auf, dass in der Definition und den anschließenden Beispielen die Umkehrbarkeit von proportionalen Funktionen genutzt wird.
Innerhalb des Kapitels zur Proportionalität wird auch mit Brüchen und Prozenten gearbeitet. Die Verbindung zur proportionalen Situationen beschränkt sich aber auf die räumliche Nähe und wird kaum durch verbindende Aufgaben gestützt.
Im Kapitel zum Umgang mit Daten sollen die Schüler den Arbeit mit dem tabellarischen und dem graphischen Register erlernen und erste Übersetzungen zwischen den beiden durchführen. Dabei werden Zusammenhänge aus der Realität untersucht, die keine typische Darstellung im algebraischen Register haben. (Chapiron, Mante, Mulet-Marquis & Pérotin 2005)

Die Inhalte der beiden für diese Klassenstufe untersuchten Bände unterscheiden sich deutlich. Bei *Cinq sur Cinq* wird mit den einzelnen Darstellungen gearbeitet und das Rechnen mit Variablen eingeführt, während bei *Triangle* die Proportionalität nochmals gesehen wird und das tabellarische und das graphische Register eingeführt werden.
In beiden Büchern sind Realsituationen noch stark vertreten. Bei *Cinq sur Cinq* kann man die Zuordnungs-Grundvorstellung beim Einsetzen von Werten in Variablen ausmachen. Bei *Triangle* wird die Proportionalität über die Zuordnungs-Grundvorstellung definiert und in den Aufgaben auch die Kovariations-Grundvorstellung genutzt.
Bei keinem der Bände kann man allerdings von einer intensiven Beschäftigung mit funktionalen Abhängigkeiten sprechen. Der Fokus liegt auf den Darstellungen in den Registern bzw. auf dem Erkennen von Proportionalitäten und dem Berechnen einzelner Werte.
Eine Verbindung von Prozentrechnung und Proportionalität findet nicht statt. Während sie in *Cinq sur Cinq* überhaupt nicht verbunden werden, sind sie in *Triangle* zwar im selben Kapitel, ohne jedoch auf einander bezogen zu werden.
Der Lehrplan für diese Jahrgangsstufe ist in den beiden Bänden unterschiedlich umgesetzt worden. Beide arbeiten mit Realsituationen und der graphischen sowie der tabellarischen

Darstellung. In *Triangle* wird außerdem mit Vorarbeiten in der algebraischen Darstellung begonnen, obwohl dieser Inhalt nicht im Lehrplan auftaucht.
Proportionalität soll laut Lehrplan wiederholt werden, ohne systematisch betrachtet zu werden. Dies wird in *Triangle* nicht gemacht. In *Cinq sur Cinq* dagegen wird die Proportionalität sogar neu definiert und ausführlich mit ihr gearbeitet. Hier werden die unterschiedlichen Auslegungsmöglichkeiten des Lehrplans deutlich, die durch das nicht vorhandene Genehmigungsverfahren entstehen.
Es ist noch anzumerken, dass *en fonction de* in keinem der Bücher eine Rolle spielt, obwohl der Lehrplan die Nutzung dieser Sprechweise ab dieser Jahrgangsstufe erwähnt.

Inhalte der Schulbücher der 5^{e}

Der *Cinq sur Cinq* Band für die 5^{e} sieht im Bereich funktionalen Denkens hauptsächlich die Arbeit mit proportionalen Situationen vor. Proportionalität soll in Tabellen und Graphen erkannt werden, wobei nun auf die Quotientengleichheit der Wertepaare hingewiesen wird. Fehlende Werte von Wertepaaren werden mit Hilfe von Dreisatz oder Kovariationsüberlegungen in Tabellen gefunden. Die erlernten Kenntnisse, insbesondere zum Proportionalitätsfaktor, sollen explizit in Aufgaben zu Maßstäben und zur Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit genutzt werden.
Übersetzungen zwischen den tabellarischen und den graphischen Darstellungen werden nicht durchgeführt und Aufgaben zu Realsituationen werden nur beim Punktweisen berechnen zusätzlicher Werte gestellt. In einer als besonders schwer gekennzeichneten Aufgabe soll auch ein lineares Gleichungssystem mit Hilfe einer Tabelle gelöst werden.
Ein weiterer wichtiger Punkt in dieser Jahrgangsstufe ist die Hinführung an die Lösung von Gleichungen. Einfache Gleichungen in einer Variablen sollen erstellt, zwei Gleichungen auf Äquivalenz geprüft und die Gleichungen schließlich gelöst werden.
In den anderen Kapiteln des Buches arbeiten die Schüler auch mit Tabellen und erlernen den Umgang mit dem Koordinatensystem. (Delord & Vinrich, 2000b)

Auch in Band der *Triangle* Reihe liegt der Fokus im Bereich funktionalen Denkens auf der Proportionalität. Sie soll in Realsituationen und in Tabellen erkannt werden. Auffallend ist, dass bei den Erklärungen keine der proportionalen Größen als Ausgangsgröße behandelt wird, wie es bei der Untersuchung eines funktionalen Zusammenhangs der Fall wäre.
In den Aufgaben sollen außerdem fehlende Werte proportionaler Wertepaare ermittelt werden. Dazu werden mehrere Methoden angeboten: die Arbeit mit dem Proportionalitätskoeffizienten, der Dreisatz und Kovariationsüberlegungen. Bei den Aufgaben wird nicht vorgeschrieben, welche dieser Methoden zu nutzen ist. Viele der angebotenen Aufgaben haben eine Realsituation als Hintergrund, auch wenn es sich um Aufgaben zum Erkennen von Proportionalität in Tabellen handelt.
Die graphische Darstellung von proportionalen Situationen taucht nur in einer Aufgabe auf, in der zwei Graphen in eine Tabelle übertragen werden sollen, um dort zu prüfen, ob es sich um proportionale Situationen handelt. Von einer typischen graphischen Darstellung für Proportionalität ist dabei nicht die Rede. Auch die algebraische Darstellung von Proportionalität wird exemplarisch in einer Aufgabe gesehen.

Im Kapitel zur Prozentrechnung und zu Maßstäben werden die Kenntnisse, die beim Studium der Proportionalität erworben wurden, abgerufen. Bei der Berechnung von Werten wird der Proportionalitätsfaktor genutzt und Kovariationsüberlegungen angestellt. Mehr als zwei Wertepaare sind allerdings selten gesucht, so dass der funktionale Charakter der Situationen kaum zum Ausdruck kommen kann.
In einem gesonderten Kapitel werden die Schüler an die Arbeit im algebraischen Register herangeführt. Von Anfang an wird dabei die Sprechweise *en fonction de* gebraucht. Beim Vergleich mehrerer Terme und Gleichungen wird die Nichteindeutigkeit der algebraischen Darstellung deutlich. Am Ende des Kapitels werden in wenigen Anwendungsaufgaben Übersetzungen zwischen der Realität und dem algebraischen Register durchgeführt um realitätsnahe Probleme zu lösen.
In den weiteren Kapiteln werden Werte aus Darstellungen im graphischen Register entnommen und Diagramme gezeichnet, so dass die Fähigkeiten der Schüler hierzu gefestigt werden. (Chapiron, Mante, Mulet-Marquis & Pérotin, 2001)

In der 5^{e} beschränken sich die Inhalte zu funktionalem Denken in beiden Büchern auf die weitere Arbeit mit der Proportionalität. Diese soll jeweils in Realsituationen und Tabellen erkannt werden, wobei der Proportionalitätskoeffizient und Kovariationsüberlegungen genutzt werden.
Beide Bücher sehen, bis auf einzelne Beispiele, von der Betrachtung der algebraischen Darstellung von Proportionalität ab. Im *Cinq sur Cinq* wird allerdings die typische graphische Darstellung gesehen, während diese im *Triangle* nicht thematisiert wird. Das erlernte Wissen wird in beiden Bänden für die Betrachtung von Maßstäben und Aufgaben zur konstanten Geschwindigkeit genutzt.
Von einer funktionalen Betrachtung proportionaler Situationen kann nur eingeschränkt gesprochen werden. Neben den Aufgaben zum Erkennen von Proportionalität, soll meist ein fehlender Wert eines Wertepaares ermittelt werden, das aus einer Realsituation entnommen werden muss. Weitere Übersetzungsvorgänge finden nur vereinzelt statt. Es werden zwar, insbesondere in den Erklärungen, sowohl Zuordnungs- als auch Kovariations-Grundvorstellung angesprochen, aber in den Aufgaben meist zu einzelne Punkte betrachtet. Durch die wenig ausgeprägte funktionale Betrachtung kann also eine konsequente Nutzung der beiden Grundvorstellungen nicht ausgemacht werden.
Vergleicht man die Ergebnisse der Analysen des intendierten Curriculums mit denen des potentiellen Curriculum der 5^{e}, so ist eine weitestgehende Übereinstimmung festzustellen, auch wenn dort mehr Arbeit mit den Grundvorstellungen erwartet worden ist.

Inhalte der Schulbücher der 4^{e}

In der 4^{e} wird weiter mit dem algebraischen Register und Proportionalitäten gearbeitet.
Die Schüler sollen jetzt schwierigere Terme vereinfachen, die Gleichheit von zwei Termen erkennen und einen gegebenen Term für einzelne Werte berechnen. Auch Gleichungen in einer Unbekannten werden gelöst. Die Arbeiten finden fast ausschließlich innerhalb des algebraischen Registers statt. Nur wenige Aufgaben haben eine Realsituation als Hintergrund. Dort sollen Terme und Gleichungen aufgestellt werden oder Terme für mehrere Werte

ausgewertet werden und die Wertepaare dann in Tabellen eingetragen werden. Damit werden der Übergang von der Realität zur algebraischen Darstellung und der Übergang von der algebraischen zur tabellarischen Darstellung gefördert.
Auch in anderen Kapiteln finden sich dazu Aufgaben. Außerdem werden Aufgaben mit geometrischem Hintergrund angeboten, bei denen ein Term erst erstellt und dann ausgewertet werden soll. Dabei wird die Sprechweise *en fonction de* genutzt, sobald dieses möglich ist. Zusätzlich zu dieser Arbeit mit dem algebraischen Register werden nochmals proportionale Situationen in einem eigenen Kapitel betrachtet. Die graphische Darstellung proportionaler Situationen soll nun nicht nur erkannt werden, sondern auch erstellt werden. Gegenbeispiele wie die Graphen von quadratischen Funktionen oder Stufenfunktionen werden gesehen und mittels des Kriteriums der Quotientengleichheit der Wertepaare als nicht proportional identifiziert. Mit diesen Beispielen wird klar, dass die Ursprungsgerade die typische graphische Darstellung der Proportionalität ist. Die Steigung des Graphen wird mit dem Proportionalitätskoeffizienten in Verbindung gebracht und somit der Übergang vom Graphen zur Tabelle ermöglicht. Die algebraische Darstellung von proportionalen Funktionen wird weiterhin nicht genutzt.
Als Anwendungsgebiet für die erlernten Fähigkeiten wird wie im Vorjahr mit Prozenten und Aufgaben zu konstanter Bewegung gearbeitet. Bei vielen dieser Aufgaben handelt es sich allerdings um rein Punktweise Betrachtungen, bei denen nur ein fehlender Wert bestimmt werden soll. (Delord & Vinrich, 2002)

Auch in *Triangle* sind in der 4^{e} der Umgang mit dem algebraischen Register und die Proportionalität die beiden wichtigsten Inhalte zu funktionalem Denken.
Im algebraischen Register sollen Terme vereinfacht, deren Gleichheit erkannt und Gleichungen in einer Unbekannten gelöst werden. Dabei werden die Terme und Gleichungen nach der anfänglich exklusiven Arbeit im algebraischen Register auch aus Realsituationen und der Geometrie gewonnen, bevor sie für konkrete Werte ausgewertet werden sollen. Die Sprechweise *en fonction de* wird wie in Buch der Reihe *Cinq sur Cinq* wann immer möglich genutzt.
Im Kapitel zur Proportionalität wird in dieser Jahrgangsstufe verstärkt mit der graphische Darstellung gearbeitet. Die graphischen Darstellungen von proportionalen Situationen sollen erkannt und erstellt werden. Auch die allgemeine algebraische Darstellung wird definiert und soll aus Realsituationen und Graphiken entnommen werden. Somit sind alle Darstellungen proportionaler Zusammenhänge bekannt und die Übersetzungen zwischen ihnen sollen in den Aufgaben durchgeführt werden. Die Darstellung im algebraischen Register wird allerdings nur als Ziel von Übersetzungsvorgängen erfragt. Beispielsweise gibt es keine Arbeit bei der die Auswirkungen der Änderung des Proportionalitätskoeffizienten des algebraischen Registers im graphischen Register untersucht werden.
Selbst lineare Gleichungssysteme sollen in ein paar Aufgaben graphisch und anschließend rechnerisch gelöst werden.
Als Anwendungen für die Proportionalität werden auch hier die Prozentrechnung und Aufgaben zur Bewegung mit konstanter Geschwindigkeit gesehen. Bei den meisten Aufgaben tritt der funktionale Aspekt jedoch in den Hintergrund, da nur ein einzelner Wert berechnet

werden soll.
Außerdem wird im Kapitel zur Statistik die Übersetzung zwischen dem graphischen und dem tabellarischen Register auch für nichtproportionale Zusammenhänge gesehen. (Chapiron, Mante, Mulet-Marquis & Pérotin, 2002)

In beiden hier betrachteten Schulbüchern werden die Schüler an die Arbeit mit dem algebraischen Register herangeführt. Sie sollen Sicherheit beim Umgang mit Termen und Gleichungen ersten Gerades erlangen und diese mit Realsituationen verbinden können. Außerdem wird weiterhin mit der Proportionalität gearbeitet.
Der graphischen Darstellung wird mehr Raum eingeräumt als in den vorangegangenen Jahren und Übersetzungen zwischen Realität, Tabelle und Graph werden durchgeführt. Im *Triangle* Band wird außerdem die algebraische Darstellung eingeführt und mit den Darstellungen in den anderen Registern verbunden. Es fällt aber auf, dass keine systematische Untersuchung der Auswirkungen der Parameter vorgenommen wird, so dass es sich nur um eine erste Heranführung an die algebraische Darstellung handelt.
Bei der Definition der algebraischen Darstellung in *Triangle* werden proportionale Situationen erstmals nicht als Verhältnis zweier Größen, sondern als funktionale Zusammenhänge betrachtet. Bei *Cinq sur Cinq* ist das noch nicht der Fall. Dort bleiben auch in den Aufgaben Punktweise Betrachtungen stark dominant.
In beiden Bänden wird in den Aufgaben durch die Punktweisen Betrachtungen deutlich mehr die Zuordnungs-Grundvorstellung als die Kovariations-Grundvorstellung angesprochen. Außerdem wird wann immer möglich *en fonction de* benutzt. Dies bereitet die Schüler, insbesondere bei Übersetzungsvorgängen zwischen der Realität und dem algebraischen Register, auf die bevorstehenden funktionalen Betrachtungen vor.
Es zeigt sich, dass mit der algebraischen Darstellung von Proportionalität wieder in Abhängigkeit von der Schulbuchreihe unterschiedliche Inhalte eingeführt werden. Dennoch erfüllen die Bücher weitgehend die Erwartungen der Lehrplananalyse. Allerdings bleibt die Einführung des Kosinus ausschließlich in der Geometrie und es wird keine Verbindung zu funktionalem Denken hergestellt.

Inhalte der Schulbücher der 3^{e}

Mit der 3^{e} endet das Collège und damit ein wichtiger Ausbildungsabschnitt im französischen Schulsystem. In dieser Jahrgangsstufe treffen die Schüler erstmals auf den Funktionsbegriff und untersuchen nichtproportionale Funktionen.
Im *Cinq sur Cinq* Band für die 3^{e} vertiefen die Schüler zuerst ihre Kenntnisse im Umgang mit dem algebraischen Register. Sie arbeiten jetzt auch mit quadratischen Termen und lernen die binomischen Formeln kennen. Diese brauchen sie um quadratische Gleichungen zu lösen, was sie nur über die Faktorisierung machen können. Die Aufgaben zu Termen sind sehr technisch und es finden sich keine Anwendungen in Realsituationen. Erst am Ende der Arbeit mit Gleichungen sollen sie aus Realsituationen und der Geometrie entnommen werden um sie dann im algebraischen Register zu lösen.
Die wichtigsten Inhalte im Bezug zu funktionalem Denken stellen aber die Betrachtungen von proportionalen und linearen Funktionen dar. In dieser Jahrgangsstufe wird das Wort *Funktion*

erstmals benutzt und die algebraische Darstellung funktionaler Abhängigkeiten konsequent genutzt. Was eine Funktion allgemein ist wird nicht definiert. Der Begriff wird im Zusammenhang mit der Definition von proportionalen Funktionen ohne weitere Erklärung benutzt. (Delord & Vinrich, 2003, S. 96)

Définition

Soit a un nombre fixé.
Le procédé qui fait correspondre à tout nombre x le produit ax s'appelle *la fonction linéaire de coefficient a*.
Si f désigne cette fonction, alors on écrit pour la définir :

$$f : x \mapsto ax \, .$$

On dit que ax est l'image de x et on note $f(x) = ax$.

Fonction linéaire de coefficient a .

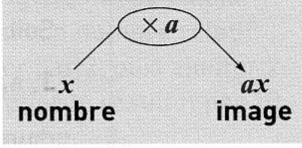


Abbildung 26: 3^e, proportionale Funktionen

Im Mittelpunkt steht hier der Zuordnungsgedanke und es wird eine enge Verbindung zur algebraischen Schreibweise hergestellt, die gleichzeitig mit der Einführung des Funktionsbegriffes erstmals benutzt wird. Erst nach der Definition der proportionalen Funktionen wird eine Verbindung zur Proportionalität hergestellt. Es wird angegeben, dass jede proportionale Situation durch eine proportionale Funktion ausgedrückt werden kann, wenn man den Proportionalitätskoeffizienten als Parameter der Funktionsgleichung auffasst. Über die Entsprechung in umgekehrter Richtung wird nichts gesagt.

In den Aufgaben sollen die Schüler proportionale und lineare Funktionen in ihren typischen Darstellungen erkennen und zwischen den Darstellungen übersetzen. Insbesondere wird der Übergang vom algebraischen Register in das graphische Register, mit dem tabellarischen Register als Zwischenschritt geübt. Aber auch der umgekehrte Übersetzungsvorgang kommt vor. Dabei wird der Einfluss des Parameters a von $y=ax$ auf die algebraische Darstellung betrachtet. Nach dem Studium der rein innermathematischen Aufgaben lassen sich ein paar wenige Aufgaben mit Realitätsbezug finden.

Die Prozentrechnung wird auch in diesem Jahr wieder mit der Proportionalität verknüpft. Diesmal werden aber tatsächlich Aufgaben funktionale Situationen mit Prozentrechnung betrachtet.

Neben den Übersetzungsaufgaben werden auch nichtproportionale funktionale Zusammenhänge als Beispiele gesehen. Bei keiner Aufgabe ist ein starker Einfluss der Kovariations-Grundvorstellung auszumachen. Es dominiert die Zuordnungs-Grundvorstellung.

Auf das Kapitel zu proportionalen Funktionen folgt das zur linearen Funktionen und Gleichungssystemen. Dort werden lineare Funktionen als verschobene proportionale Funktionen eingeführt und dabei die Aufgabe des Parameters b der Gleichung $y=ax+b$ erklärt. Die Gerade als graphische Darstellung und die Proportionalität der Zuwächse werden als typische Eigenschaften kennen gelernt. Auch hier steht aber die algebraische Darstellung im Vordergrund.

In den Aufgaben soll auch wieder zwischen allen Darstellungen übersetzt werden. Insbesondere soll die algebraische Darstellung mit Hilfe der tabellarischen Darstellung bestimmt werden. Nach den innermathematischen Aufgaben befinden sich Aufgaben zu Realsituationen und zu geometrischen Situationen am Ende Kapitels.

Die erworbenen Fähigkeiten sollen in Aufgaben zur Lösung von linearen Gleichungssystemen mit zwei Gleichungen und zwei Unbekannten eingesetzt werden. Die Aufgaben zu Gleichungssystemen, von denen viele auf Realsituationen beruhen, sollen sowohl innerhalb des algebraischen Registers, als auch im graphischen Register gelöst werden.
Beim Studium der Quadratwurzeln und der trigonometrischen Funktionen in der Geometrie wird keine Verbindung zu funktionalem Denken hergestellt. (Delord & Vinrich, 2003)

Auch in der *Triangle* Reihe wird in der 3^{e} erstmals das Wort *Funktion* benutzt.
Vor dieser ersten Nutzung wird hier in einem Kapitel nochmals mit der Proportionalität gearbeitet. Sie wird in allen Darstellungen wiederholt, ohne dass neue Inhalte hinzukommen. Anschließend werden, wie in *Cinq sur Cinq,* quadratische Terme und Gleichungen im algebraischen Register untersucht. Die Gleichungen können nur mit Hilfe der binomischen Formeln über Faktorisieren gelöst werden. Die meisten Aufgaben zu diesen Inhalten sind sehr technisch. Aber es sind im Kapitel zu Gleichungen auch einige Aufgaben zu finden, in denen zwischen der Realität oder einer geometrischen Situation und dem algebraischen Register übersetzt werden soll.
Auch die Einführung von linearen und proportionalen Funktionen wird in sehr ähnlicher Weise durchgeführt wie im oben analysierten Schulbuch. Mit einer Definition, welche die Zuordnungs-Grundvorstellung anspricht, werden proportionale und lineare Funktionen definiert, ohne dass der Funktionsbegriff an sich vorab erklärt worden ist. (Chapiron, Mante, Mulet-Marquis & Pérotin, 2003, S. 117)

Le processus qui, à un nombre x, fait correspondre le nombre ax (où a est un nombre fixé) est appelé fonction linéaire.
- **On la note $f : x \mapsto ax$.**
- **Le nombre $f(x)$ est l'image de x par la fonction f. On le note $f(x) = ax$.**

Abbildung 27: 3^{e}, proportionale Funktionen

Es fällt auf, dass hier der Begriff *Prozess* genutzt wird. Ebenso wie in der *Cinq sur Cinq* Reihe, wo von einem *Verfahren* (Originalbezeichnung *procédé*) gesprochen wird, steht also das Prozess-Konzept im Zentrum der Funktionsbetrachtungen (siehe Abschnitt 3.1.5.1).
In diesem Buch werden lineare Funktionen auf derselben Seite definiert wie die proportionalen Funktionen. Diese stellen dann nur noch einen Sonderfall dar, was die Möglichkeit eröffnet auch die konstanten Funktionen als Sonderfall zu betrachten.
Die graphische Darstellung und die Auswirkungen der Parameter der algebraischen Darstellung werden kennen gelernt.
Neben dem Erkennen von linearen Funktionen in algebraischer Darstellung, graphischer Darstellung und Realität stellt dieser Übergang zwischen Formel und Graph einen der zentralen Inhalte vieler Aufgaben dar. Aber auch alle anderen Übersetzungsvorgänge werden in Aufgaben geübt. Allerdings sind nur wenige Aufgaben zu Realsituationen zu finden.
Am Ende des Kapitels finden sich einige Aufgaben in denen abschnittsweise lineare Funktionen im graphischen Register abgebildet sind. Diese sollen von den Schülern gelesen und interpretiert werden.

Im Kapitel zu Systemen von zwei linearen Gleichungen in zwei Unbekannten wird keine Verbindung zu den soeben gesehenen linearen Funktionen hergestellt. Diese scheint sogar durch die Nutzung der Schreibweise $ax+by=c$ konsequent vermieden zu werden. Selbst bei der Betrachtung der graphischen Lösung fehlt jeglicher Hinweis auf die linearen Funktionen, obwohl dies im Lehrplan steht und sie im Kapitel davor behandelt wurden.
Neben den technischen Aufgaben, die im algebraischen Register gelöst werden sollen, finden sich viele Aufgaben zur Realsituationen oder geometrischen Inhalten, bei denen die algebraische Darstellung des Gleichungssystems erst ermittelt werden muss.
Beim Studium der Quadratwurzeln und der trigonometrischen Funktionen in der Geometrie ist auch in diesem Buch ist nicht von Funktionen die Rede.(Chapiron, Mante, Mulet-Marquis & Pérotin, 2003)

Beide hier analysierten Schulbücher stimmen in weiten Teilen überein. Nach einem Kapitel zur Arbeit im algebraischen Register, in dem erstmals mit quadratischen Gleichungen gearbeitet wird, werden proportionale und lineare Funktionen eingeführt. In keinem der Bücher wird vorab geklärt was Funktionen sind. Begriffe wie Definitionsmenge oder Wertemenge tauchen nicht auf.
Die Definition linearer Funktionen spricht hauptsächlich die Zuordnungs-Grundvorstellung an und ist eng an die algebraische Darstellung gebunden. Während in der *Triangle* Reihe schon im Vorjahr mit der Formeldarstellung gearbeitet wurde stellt die Definition proportionaler Zusammenhänge in *Cinq sur Cinq* auch gleichzeitig den ersten Kontakt mit der Darstellung im algebraischen Register dar. Eine Verwechslung von Darstellung und Begriff kann dadurch gefördert werden.
Zentrale Aspekte der Aufgaben sind, neben dem erkennen von proportionalen und linearen Situationen, Übersetzungen zwischen allen innermathematischen Registern. Im Mittelpunkt steht dabei der Übergang vom algebraischen in das graphische Register. Dabei wird auch die Rolle der Parameter der algebraischen Darstellung untersucht. Aufgaben zu Realsituation kommen nur in beschränktem Maße vor. Die Zuordnungs-Grundvorstellung ordnet sich dem Erlernen der Übersetzungsfähigkeiten unter und taucht nur implizit auf. Eine Nutzung der Kovariations-Grundvorstellung ist nicht auszumachen.
Im Anschluss an das Studium der linearen Funktionen werden lineare Gleichungssysteme in zwei Unbekannten betrachtet. Interessant dabei ist, dass in *Triangle* keine Verbindung zu funktionalen Zusammenhängen hergestellt wird, während diese in *Cinq sur Cinq* bewusst genutzt wird. Dennoch lernen die Schüler bei der Arbeit mit beiden Bänden den Übergang zwischen der Realität und der algebraischen Darstellung, da in diesen Kapiteln verhältnismäßig viele Anwendungsaufgaben zu finden sind.
Als Unterschied zwischen beiden Bänden ist zu erwähnen, dass im *Triangle* nochmals in einem eigenen Kapitel die Arbeit mit Proportionalitäten wiederholt wird, bevor proportionale Funktionen gesehen werden. Außerdem werden im Kapitel zu linearen Funktionen auch funktionale Zusammenhänge Graphen analysiert und interpretiert, die nur Abschnittsweise linear sind. Auch konstante Funktionen werden betrachtet. Solche Aufgaben sind in *Cinq sur Cinq* nicht zu finden.
Die Arbeit mit dem Funktionsbegriff ohne vorherige Definition ist so im Lehrplan

vorgesehen. Auch die anderen Inhalte werden in beiden Bücher umgesetzt. Allerdings sind keine Aufgaben zur Variation in nichtlinearen Situationen zu finden und die allgemeine algebraische Notation *f(x)* wird verwendet. Beides stellt eine Abweichung von Lehrplan dar. Außerdem fällt die Arbeit mit Realsituation weniger stark aus, als dies erwartet worden war.

Aufbau der Bücher der 2de

Nach der 3^{e} endet das Collège. Die meisten Schüler gehen in ein Lycée oder ein Lycée professionell (siehe Kapitel 6.1.2.2. Das Schulsystem Frankreichs). Für die 2de werden nun die Bücher *Transmath* von Nathan und *Déclic* von Hachette betrachtet.

Transmath ist mit 360 Seiten und 13 Kapiteln ein sehr umfangreiches Buch. Es ist farbig gedruckt, enthält aber fast keine Illustration und Bilder mehr. In den Einbänden sind auf ausklappbaren Seiten wichtige Stationen der Mathematikgeschichte, eine Formelsammlung für die Geometrie, Hinweise zur Benutzung von zwei bestimmten Taschenrechners und von Geometrieprogrammen abgedruckt.
Nach dem Inhaltsverzeichnis, das die Aufteilung des Buches in einen Algebra-, einen Statistik- und einen Geometrieteil zeigt, ist eine zweiseitige Erklärung angegeben, in der den Schülern der Aufbau des Buches und die Nutzungsweise erklärt werden. Anschließend ist der Lehrplan abgedruckt und auf sechs Seiten wird das Vorwissen aus dem Collège zusammengefasst. Es handelt sich dabei um eine stichpunktartige Zusammenfassung der Vorgehensweisen bei bestimmten Aufgaben aus der Algebra, die durch Beispiele illustriert und durch ein paar Aufgaben begleitet wird. Auf typische Fehler wird dabei hingewiesen. Eine analoge Zusammenfassung für Statistik und Geometrie findet sich vor den jeweiligen Abschnitten.
Am Ende des Bandes ist auf vier Seiten eine Zusammenfassung und Erklärung des mathematischen Vokabulars mit Beispielen abgedruckt. Außerdem werden in einem achtseitigen *Methodologischen Block* Hinweise und typische Vorgehensweisen für einfache Beweise und technische Berechnungen gegeben, so dass die Schüler diese dort nachschlagen können. Dann werden kapitelübergreifende Aufgaben angeboten, die jeweils so gekennzeichnet sind, dass man sie den verschiedenen Kapiteln zuordnen kann. Am Schluss des Buches sind die Lösungen einiger Aufgaben und ein Index abgedruckt.
Alle Kapitel dieses Bandes fangen mit einer historischen Einordnung der Inhalte an. Anschließend werden diese auf etwa zwei Seiten in hinführenden Aufgaben vorbereitet. Eine sehr schmale Spalte am äußeren Rand der Seite enthält dazu ein paar erklärende Hinweise. Dann folgt der Unterrichtsteil, der in Doppelseiten aufgebaut ist. Auf der linken Seite werden die Inhalte mit einfachen Beispielen erklärt, während die rechte Seite in zwei Spalten unterteilt ist. Die erste Spalte enthält nochmals eine knappe Zusammenfassung der Inhalte und die zweite Spalte gelöste Beispielaufgaben mit Erklärungen. Am Ende des Unterrichtsabschnittes werden alle Inhalte noch einmal kurz auf einer Seite zusammengefasst und wichtige Hinweise zu Aufgaben oder zu typischen Fehlern gegeben.
Vor den eigentlichen Aufgaben sind mehrere Seiten zum betreuten Arbeiten eingefügt. Dort werden sehr detailliert gestellte Aufgaben bearbeitet, die auch alleine gelöst werden können. Die darauf folgenden Aufgaben sind in vier Teile unterteilt. Die erste Aufgabengruppe dient zur direkten Anwendung des soeben Erlernten. Hinweise zur Lösungsmethode und die Nummer der entsprechenden gelösten Beispielaufgabe werden angegeben. Die zweite, kurze

Aufgabengruppe hat zum Ziel den Schülern das mathematische Beweisen näher zu bringen. Auch dort ist eine enge Führung mit vielen Hilfestellungen vorgesehen. In der dritten, umfangreichsten Aufgabengruppe werden vertiefende und weiterführende Aufgaben angeboten. Die vierte Gruppe trägt den Titel *Problèmes* und enthält auf einer Seite unter anderem Aufgaben, die sich auf andere Inhaltsgebiete beziehen.
Alle Aufgabengruppen sind durch Überschriften so unterteilt, dass sie bestimmten Abschnitten des Unterrichtsteils zugeordnet werden können. Des Weiteren gibt es in allen Gruppen Aufgaben, deren Lösungen am Ende des Buches aufgeführt sind. (Antibi, Barra, & Morin, 2004)

Auch *Déclic* ist mit 320 Seiten und elf Kapiteln relativ umfangreich und enthält kaum Bilder oder Illustrationen. Im ausklappbaren Einband wird die Nutzungsweise zweier Taschenrechner erklärt, eine kurze Formelsammlung angeboten und verschiedene Notationen erläutert.
Auf der ersten Seite des Buches wird den Schülern der Aufbau des Buches dargelegt und Hinweise zu Nutzung gegeben. Das darauf folgende Inhaltsverzeichnis zeigt schon, dass dieser Band nicht wie die Bücher aus dem Collège in einen Algebra und einen Geometrieteil untergliedert ist. Anschließend ist der Lehrplan der 3^{e} wiedergegeben.
Am Ende des Buches werden Basiswissen und typische Techniken aus dem Collège auf 15 Seiten wiederholt. In Beispielaufgaben wird gezeigt wie das typische Vorgehen bei einem bestimmten Aufgabentyp sein soll. Schließlich werden die Ergebnisse der korrigierten Aufgaben angegeben und ein Index abgedruckt.
Der Aufbau der Kapitel bleibt im ganzen Band gleich. Am Anfang werden Techniken abgefragt, die im folgenden Kapitel genutzt werden. Die Lösungen der Aufgaben finden sich am Ende des Buches und zu jeder Aufgabe wird angegeben, wo die typische Vorgehensweise für ihre Lösung abgedruckt ist. Anschließen bereiten einfache hinführende Aufgaben den zu studierenden Inhalt vor.
Der Unterrichtsteil ist in Doppelseiten aufgebaut. Auf der linken Seite werden die Inhalte mit Beispielen erklärt. Die rechte Seite ist in zwei Spalten unterteilt. In der ersten Spalte sind die Methoden zur Lösung kurz zusammengefasst und es werden Hinweise auf typische Aufgaben gegeben. In der zweiten Spalte wird eine Beispielaufgabe gelöst. Am Ende des Unterrichtsteils werden die Inhalte nochmals auf einer Seite knapp zusammengefasst und die Vorgehensweise bei Aufgaben dazu in einem Satz beschrieben, so dass die diese Schüler hier nachschlagen können. Bevor dann Aufgaben angegeben werden, wird auf einer Seite noch ein Computerprogramm erklärt, das für die Bearbeitung der Inhalte des Kapitels in Frage kommt. In fast allen Fällen handelt es sich dabei um das Programm *Geospace/Geoplan*.
Die Aufgaben sind in mehrere Teile unterteilt. Zuerst werden meist auf ein bis zwei Seiten technische Rechenaufgaben angeboten, zu denen es typische Vorgehenshinweise und Lösungen gibt. Dann folgen einige mit richtig oder falsch zu beantwortende einfache Fragen, in denen die neu erlernten Inhalte geprüft werden und zu denen es auch Lösungen gibt. Erst dann werden Aufgaben zu den Inhalten des Kapitels angeboten. Diese sind genau wie der Unterrichtsteil in verschiedene Inhaltsbereiche untergliedert. Zuerst sind es einfache Aufgaben bei denen die zu nutzenden Methode angegeben ist. Dann folgen Aufgaben zur

Vertiefung. Am Ende jedes Kapitels werden schließlich noch Aufgaben aus anderen Bereichen oder zu anderen Herangehensweisen, etwa mit Programmen, angeboten. Das können auch historische Probleme sein, oder sehr konkrete Anwendungsaufgaben. (Misset, Turner, & Lotz, 2004)

Beide hier analysierten Bände für die 2de gleichen sich sehr. Ihr Umfang und ihre Gestaltung sind in etwa gleich und auch im Aufbau gibt es nur wenige Unterschiede. Anfangs wird die Nutzungsweise des Buches erklärt und der Lehrplan abgedruckt. Beide enthalten auch eine Wiederholung der Inhalte und Vorgehensweisen, die im Collège erlernt wurden, welche dann im Bedarfsfall auf wenigen Seiten nachgeschlagen werden können.
Die Kapitel beginnen jeweils mit hinführenden Aufgaben, worauf ein ausführlicher Unterrichtsteil und schließlich Aufgaben folgen.
Die Unterrichtsteile enthalten Erklärungen mit Beispielen, kurze Zusammenfassungen auf jeder Seite und gelöste Beispielaufgaben. Außerdem werden zum Schluss jedes Unterrichtsteils die Inhalte nochmals auf einer Seite zusammengefasst, sodass sie dort schnell nachgeschlagen werden können.
Die Aufgaben beider Bücher sind genau wie die Unterrichtsteile in Abschnitte untergliedert, sodass direkt darauf Bezug genommen werden kann. Außerdem werden zuerst einfache Aufgaben angeboten, zu denen die Lösungsmethode oder eine gelöste Beispielaufgabe genannt wird. Erst nach dieser direkten Anwendung des Unterrichts folgen weiterführende und vertiefende Aufgaben.
Bei *Déclic* wird am Anfang der Kapitel wie im Collège ein kurzer Test vorgeschaltet und vor den Aufgaben werden technische Fähigkeiten wiederholt. Außerdem finden sich dort mehr gelöste Aufgaben als in *Transmath*.

Inhalte der Schulbücher der 2de

In *Transmath* ist im Bereich funktionalen Denkens ein deutlicher Unterschied zu den Inhalten und den Vorgehensweisen des Collège zu sehen. Die Funktionsdefinition wird eingeführt, mehrere Funktionstypen (lineare, quadratische, umgekehrt proportionale, trigonometrische, …) werden studiert und es wird anders mit den Darstellungen und Übersetzungen umgegangen.
Im Rahmen der Wiederholung der Inhalte des Collège für den Bereich des funktionalen Denkens wird nur die Proportionalität in Tabellen wiederholt. Die schon bekannten anderen Darstellungen oder lineare Funktionen tauchen nicht auf.
Wie schon im Collège wird der Umgang mit dem algebraischen Register weiter vertieft. Das Faktorisieren von Termen zweiten Grades wird wiederholt und quadratische Gleichungen und Gleichungen mit einer Unbekannten im Nenner werden gelöst. Dabei finden Übersetzungen zwischen Realsituationen bzw. geometrischen Sachverhalten und der Geometrie statt.
Das Kapitel zur Funktionsdefinition und zu linearen Funktionen beginnt mit hinführenden Aufgaben, bei denen die Variation nichtproportional abhängiger Größen untersucht wird. Es wird erklärt, dass solche Zusammenhänge in der Mathematik auf ihre Grundidee der Zuordnung zurückgeführt werden. Darauf folgt die formale Definition von Funktionen (Antibi, Barra, & Morin, 2004, S. 68).

D est un intervalle de $\mathbb{R}$ (ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$).
- Fabriquer ou **définir une fonction** f de D dans $\mathbb{R}$, c'est associer à chaque réel x de D, un réel unique noté $f(x)$.
- On dit que D est l'**ensemble de définition** de f, ou encore que f est définie sur l'ensemble D.
- Le réel $f(x)$ s'appelle l'**image** de x par f.

Abbildung 28: 2^de, Allgemeine Funktionsdefinition

Funktionen sind demnach Zuordnungen, die einer reellen Zahl eine andere reelle Zahl zuweisen. Die Definitionsmenge wird eingeführt und Funktionen zugelassen, die nur auf einem Intervall definiert sind, oder Definitionslücken aufweisen. Funktionen werden sofort mit der Formeldarstellung verknüpft, ohne dass diese als Darstellung gekennzeichnet wird. Diese Kennzeichnung ist dagegen bei Einführung der graphischen Darstellung sehr deutlich. Anschließend werden die linearen Funktionen als erster konkreter Funktionstyp über ihre algebraische Darstellung eingeführt. Es folgen die graphische Darstellung mit der graphischen Deutung der beiden Parameter und die Charakterisierung linearer Funktionen über die Proportionalität der Zuwächse. Auch die konstanten Funktionen werden als Sonderfall eingeführt.

Das Kapitel zur Einführung des Funktionsbegriffs schließt mit der Definition von wachsenden und fallenden Funktionen sowie von Extrema. Zur Analyse wird mit Variationstabellen ein neues Darstellungsregister eingeführt (siehe Abschnitt 6.3.2.1), auf dessen Nichteindeutigkeit hingewiesen wird.

In den Aufgaben zu diesem Kapitel sollen Funktionen in der graphischen Darstellung erkannt und Definitionsmengen angegeben werden. Anschließend wird die graphische Darstellung von funktionalen Abhängigkeiten, deren algebraische Darstellung nicht immer gegeben ist, dazu genutzt um Gleichungen und Ungleichungen zu lösen. Bei linearen Funktionen werden Übersetzungen zwischen Darstellungen im algebraischen Register und Darstellungen im graphischen Register durchgeführt. Außerdem soll die algebraische Darstellung aus der Angabe von zwei Punkten ermittelt werden.

In den Aufgaben zur Variationsanalyse taucht eine Vielzahl von verschiedenen Funktionstypen auf. Variationstabellen sollen aus der graphischen und aus der algebraischen Darstellung erstellt werden und auch andersherum mögliche Funktionen zu Variationstabellen genannt werden.

Im Laufe des Kapitels werden in den Aufgaben auch Intervallweise lineare Funktionen, diskrete Funktionen und Funktionen in zwei Variablen gesehen.

Auf das Kapitel zur allgemeinen Funktionsdefinition folgt ein Kapitel, in dem erstmals nichtlineare funktionale Zusammenhänge im Detail studiert werden. Zuerst werden quadratische Funktionen eingeführt und dann umgekehrt proportionale Funktionen. In beiden Fällen werden die algebraischen Darstellungen angegeben und sofort im Anschluss Variationstabelle und Graph betrachtet.

In den Aufgaben wird im algebraischen und im graphischen Register gearbeitet und mit Variationstabellen umgegangen. Ein zentraler Punkt der Aufgaben sind

Variationsüberlegungen, bei denen allerdings nur etwas über die Variationsrichtung ausgesagt wird aber nichts über die Art der Variation. Übersetzungen finden wenn überhaupt zwischen Formel und Graph statt.
In den weiterführenden Aufgaben werden auch die kubische Funktion und die Wurzelfunktion gesehen, wobei auch hier die Variationsrichtung ein zentraler Punkt der Überlegungen ist.
Im folgenden Kapitel werden Kosinus- und Sinusfunktion für reelle Zahlen eingeführt. Beide Funktionstypen waren, wie auch der Tangens, schon in den Vorjahren in der Geometrie benutzt worden, ohne dabei aber eine funktionale Denkweise anzusprechen. Es werden jeweils die Variation und der Graph betrachtet. Da keine Parameter betrachtet werden können nur wenige Aufgaben angeboten werden. Bei den meisten Aufgaben werden Gleichungen anhand der graphischen Darstellung oder mit Hilfe von theoretischen Überlegungen gelöst.
Im letzten Kapitel des Buches werden lineare Gleichungssysteme untersucht. Eine Verbindung zu funktionalen Situationen wird aber nicht hergestellt.
Zu allen Inhalten tauchen nur sehr wenige funktionale Situationen mit realen Kontexten auf. Anwendungsaufgaben beziehen sich meist auf geometrische Inhalte und finden sich am Ende der jeweiligen Kapitel. (Antibi, Barra, & Morin, 2004).

Auch in *Déclic* ist der deutliche Schnitt zwischen des Collège und Lycée festzustellen. Die behandelten Inhalte erinnern stark an die von *Transmath*.
Die wiederholten Inhalte aus dem Collège beziehen sich wie bei *Transmath* ausschließlich auf die Proportionalität und deren Darstellung in Tabellen. Die darüber hinaus gesehenen linearen Funktionen mit allen ihren Darstellungen werden nicht erklärt.
In mehreren Übungen wird der Umgang mit dem algebraischen Register weiter vertieft. Dabei wird mit quadratischen Termen und Gleichungen gearbeitet.
In einem separaten Kapitel wird der Funktionsbegriff eingeführt. Dort werden Funktionen als Zuordnungen zwischen zwei reellen Zahlen definiert, wobei die Definitionsmenge aus einer Teilmenge der reellen Zahlen besteht (Misset, Turner, & Lotz, 2004, S. 82).

Fonction

définition : $\mathscr{D}$ étant une partie de l'ensemble des réels, lorsque **à chaque réel *x* de** $\mathscr{D}$ on associe **un seul réel *y***, on définit **une fonction *f*** sur l'ensemble $\mathscr{D}$.

On note	$f : x \mapsto y$	ou	$y = f(x)$
On lit	fonction *f* qui à *x* associe *y*	ou	*y* égal *f* de *x*

Abbildung 29: 2de, Allgemeine Funktionsdefinition

Implizit ist bei dieser Definition die Darstellung im algebraischen Register gemeint, was man auch an den gegebenen Beispielen sieht und daran, dass die algebraische Darstellung nicht extra eingeführt wird. Die graphische Darstellung dagegen wird sofort im Anschluss an die Definition von Funktionen eingeführt. Anschließend werden Variation und Extrema untersucht und dabei erstmals Variationstabellen als Darstellungen genutzt.
Die meist nichtlinearen funktionalen Zusammenhänge in graphischen Darstellungen sollen in den Aufgaben als solche erkannt werden. Die Definitionsmenge soll angegeben werden und

Variationstabellen sollen aus der graphischen Darstellung erstellt werden. Mit den Variationstabellen werden Extrema und mögliche Graphen gezeichnet, wobei die Nichteindeutigkeit dieser Darstellung erkannt wird. Am Schluss des Kapitels werden Gleichungen und Ungleichungen graphisch und mit Variationsüberlegungen gelöst. Übersetzungsvorgänge sind, abgesehen vom Punktweisen Ablesen der Graphen, nur sehr wenige zu finden.
Das folgende Kapitel, das sich mit funktionalen Zusammenhängen beschäftigt, ist das Kapitel zu linearen Funktionen und Gleichungssystemen. Lineare Funktionen werden im algebraischen Register definiert und anschließend sofort deren Variation in Abhängigkeit der Parameter und die Proportionalität der Zuwächse angegeben. Erst dann wird die graphische Darstellung betrachtet.
In den Aufgaben sollen lineare Funktionen erkannt werden und Übersetzungen zwischen der graphischen und der algebraischen Darstellung durchgeführt werden. Außerdem wird die algebraische Darstellung einer Funktion gesucht, von der nur zwei Punkte gegeben sind. Im Gegensatz zum Kapitel zur Funktionsdefinition werden hier einige Aufgaben zu Realsituationen angeboten, bei denen die algebraische Darstellung erstellt werden muss.
Bei der Untersuchung von linearen Gleichungssystemen wird keine Verbindung zu linearen Funktionen hergestellt, obwohl diese im selben Kapitel gesehen werden. Tatsächlich werden im Abschnitt zu linearen Funktionen lineare Gleichungssysteme in Sachsituation gesehen und gelöst. Sie sind aber nicht als solche gekennzeichnet, wohingegen später lineare Gleichungssysteme nicht mit linearen Funktionen gefüllt werden.
In einem weitern Kapitel werden mit den quadratischen Funktionen und mit der Wurzelfunktion erstmals nichtlineare Funktionen definiert. Sie werden mit in ihrer Darstellung im algebraischen Register eingeführt. Anschließend folgen Graph und Variationstabelle.
In den Aufgaben soll die Variation verschiedener quadratischer und umgekehrt proportionaler Funktionen untersucht werden und das Extremum quadratischer Funktionen bestimmt werden. Übersetzungen finden vom algebraischen zum graphischen Register statt. Außerdem werden Gleichungen und Ungleichungen gelöst.
Die meisten der angebotenen Anwendungsaufgaben beziehen sich auf geometrische Inhalte. Außerdem muss die algebraische Darstellung in diesen Aufgaben nur selten selbstständig erstellt werden. Sie wird in der Aufgabenstellung angegeben und ist lediglich zu verifizieren.
Wie in *Transmath* werden auch in *Déclic* Kosinus- und Sinusfunktion aus den schon bekannten geometrischen Zusammenhängen hergeleitet. Dazu wird mit dem Einheitskreis eine Verbindung zwischen Winkeln und den reellen Zahlen hergestellt. Damit können Kosinus- und Sinusfunktion als Funktionen der reellen Zahlen über ihre Formeldarstellung definiert werden. Ihre Variationsverhalten werden untersucht und anschließend mit Parametern Perioden- und Amplitudenänderungen, sowie Verschiebungen dieser beiden Funktionen analysiert. Dieses Wissen wird in den Aufgaben eingesetzt, in denen Variationsverhalten und Maxima angegeben werden sollen, sowie die Periode zu bestimmen ist. Übersetzungen werden auch hier von der algebraischen Darstellung in die graphische Darstellung durchgeführt. (Misset, Turner, & Lotz, 2004)

Der Vergleich beider für die 2^de^ analysierten Schulbücher zeigt, dass diese auch bei den Inhalten in weiten Teilen übereinstimmen. Beide vertiefen die Arbeit im algebraischen Register, führen die Funktionen zuerst allgemein ein und arbeiten schließlich mit den linearen, quadratischen, umgekehrt proportionalen Funktionen sowie mit der Sinus- und Kosinusfunktion.
Die Funktionsdefinition beruht auf der Zuordnungs-Grundvorstellung und bezieht sich implizit auf die Darstellung im algebraischen Register. Es werden auch nur Zuordnungen zwischen Intervallen der reellen Zahlen zugelassen.
Der Zeitpunkt der Funktionsdefinition stimmt mit dem Erreichen eines Ziels in der Zahlentwicklung überein. In der 2^{de} werden reellen Zahlen betrachtet und mit Intervallen gearbeitet. Erst dadurch wird eine Definition von Funktionen auf Intervallen der reellen Zahlen möglich. Ein möglicher Grund für den späten Zeitpunkt der Funktionsdefinition kann also darin liegen, dass zu einem früheren Zeitpunkt keine derart allgemeine Definition möglich ist.
Sofort nach der Definition werden Variationsüberlegungen angestellt und Variationstabellen eingeführt. In *Transmath* wird sogar in den hinführenden Aufgaben die Variation als Quelle des Funktionsgedanken identifiziert.
Auch in den Aufgaben wird viel mit Variation gearbeitet, wohingegen wenige Übersetzungen zwischen den Darstellungen in den unterschiedlichen Registern durchgeführt werden. Lediglich zwischen dem algebraischen und dem graphischen Register finden Übersetzungen statt. Und dies in beiden Richtungen auch nur beim Studium der linearen Funktionen. Dort wird auch die algebraische Darstellung aus der Angabe von zwei Punkten ermittelt.
Tabellen lassen sich in keinem der beiden Bücher finden und scheinen in dieser Jahrgangsstufe nicht mehr als Darstellungsmittel für funktionale Abhängigkeiten genutzt zu werden.
Weitere wichtige Punke in den Aufgaben beider Bücher ist das Erkennen der jeweiligen Funktionen in der graphischen Darstellung, das Bestimmen von Definitionsmengen und das Lösen von Gleichungen und Ungleichungen mit Hilfe von funktionalen Abhängigkeiten.
Transmath und *Déclic* unterscheiden sich in der Art in der sie mit der Kosinus- und der Sinus-Funktion umgehen. Während in *Transmath* lediglich Variationsüberlegungen und Punktweise Auswertungen dieser Funktionen ohne Parameter vorgenommen werden, wird in *Déclic* auch die Auswirkung von Parameteränderungen auf die graphische Darstellung untersucht.
Aufgaben mit Bezug zu Realsituationen sind in *Transmath* kaum zu finden, dafür aber einige aus dem Bereich der Geometrie. In *Déclic* wird der Einbeziehung der Realität mehr Platz eingeräumt, wenn auch die Darstellung im algebraischen Register nicht in allen Fällen aktiv von den Schülern ermittelt werden muss. Beiden Büchern stimmen darin überein, dass deutlich weniger realitätsnahe Aufgaben darin auftauchen als in den Schulbüchern des Collège.
In *Transmath* werden im Gegensatz zu *Déclic* auch vereinzelt Beispiele weiterer Funktionen betrachtet. So werden dort etwa diskrete Funktionen, kubische Funktionen oder Funktionen in zwei Variablen betrachtet.
In dieser Jahrgangstufe sind die Übersetzungen zwischen den Darstellungen in den verschiedenen Registern sehr stark zugunsten von Aufgaben mit Variationsüberlegungen zurückgedrängt worden. Trotz der Definition mit der Zuordnungs-Grundvorstellung steht die

Kovariations-Grundvorstellung im Vordergrund. Es bleibt fraglich ob die Schüler diese Definition in ihr concept image aufnehmen, da sie in den Aufgaben nur wenig genutzt wird. Viele der Inhalte des intendierten Curriculums werden wie erwartet übernommen. Allerdings sind bei dessen Analyse ein stärkerer Einfluss der Realität und eine Nutzung aller Darstellungen und der Übersetzungen zwischen ihnen erwartet worden, was nicht der Fall ist. Des Weiteren haben sich die Autoren von *Déclic* entschieden keine der weitergehenden Funktionen einzuführen, die im Lehrplan als Ausblickmöglichkeit angegeben sind.

Im nächsten Abschnitt kann nun das potentielle Curriculum von Frankreich zusammengefasst werden um es dann mit dem von Bayern vergleichen zu können.

7.2.2 Zusammenfassung

Das hier analysierte potentielle Curriculum von Frankreich unterteilt sich in drei Teile, und zwar in die Schulbücher der Grundschule, die des Collège und die des Lycée.
In der Grundschule sind die Bücher in Sitzungen aufgeteilt und es gibt keinen Unterrichtsteil in dem die Inhalte erklärt werden. Die angebotenen Aufgaben zu einer Sitzung sind so unterteilt, dass es sich erst um wiederholende Aufgaben handelt, anschließend um hinführende Aufgaben für neue Inhalte und schließlich um Aufgaben zur Einübung.
Die Schulbücher des Collège und des Lycée sind im Aufbau der Kapitel sehr ähnlich. Auf hinführende Aufgaben folgt ein Unterrichtsteil, in dem mit Beispielen und Musteraufgaben neue Inhalte eingeführt werden. Anschließend folgen Aufgaben zur Einübung. Üblicherweise sind diese durch Überschriften so eingeteilt, dass sie einem Inhalt und damit einer Musteraufgaben zugeordnet werden können. Die Schwierigkeit der Aufgaben wird in mehreren Schritten von direkter Anwendung zu komplexeren Aufgaben gesteigert. Außerdem werden auch Aufgaben angeboten, deren Lösungen am Ende des Buches abgedruckt sind, sodass Schüler hier selbstständig arbeiten können.
In den Büchern der 2^de^ werden die Inhalte des Collège auf wenigen Seiten zusammengefasst und die dort gelernten Methoden zur Lösung von Aufgaben angegeben, so dass die Schüler dort bei Problemen schnell nachschlagen können.
Alle Bücher enthalten Hinweise zum Aufbau des Buches und zu dessen Nutzungsweise. Um eine Verbindung mit dem intendierten Curriculum herstellen zu können, wird in den Büchern des Collége und des Lycée der Lehrplan entweder abgedruckt oder zumindest zusammengefasst.

Die Schulbücher bestätigen das Ergebnis der Lehrplananalyse, dass in Frankreich sehr lange mit den Proportionalitäten und linearen Zusammenhängen gearbeitet wird. Proportionale Betrachtungen werden schon im CM2 eingeführt und bis zur 3^e^ weiter durchgeführt, wo dann noch lineare Funktionen hinzukommen. Proportionale Zusammenhänge sollen als solche identifiziert werden. Situationen, die als nichtproportional erkannt werden, werden nicht weiter im Detail betrachtet. Der hervorgehobene Gegensatz Proportionalität-Nichtproportionalität spiegelt sich also nicht in den Aufgaben wider, die nach der Identifikation der Zuordnungsart bearbeitet werden.

Erst in der 2de werden nichtlineare funktionale Zusammenhänge systematisch untersucht. Dort werden quadratische Funktionen, umgekehrt proportionale Funktionen sowie Kosinus- und Sinusfunktion eingeführt. Letztere sind bis dahin ausschließlich in der Geometrie, ohne funktionalen Charakter benutzt worden.
In beiden Büchern wird nach der Funktionsdefinition mit graphisch definierten Funktionen gearbeitet, deren algebraische Darstellung die Schüler nicht kennen.
In *Transmath* werden auch einige von Funktionstypen näher untersucht, die nicht zu den oben genannten Typen gehören.

In der 3e wird erstmals der Begriff Funktion benutzt. Dies geschieht in *Cinq sur Cinq* gleichzeitig mit der Einführung der algebraischen Schreibweise, was zu Vermischungen der Darstellung und der mathematischen Idee führen kann.
Eine Erklärung von Funktionen im Allgemeinen folgt erst in der 2de, wo diese als Zuordnungen zwischen reellen Zahlen definiert werden. In diesem Zusammenhang werden auch erstmals Definitionsmengen angegeben, da Funktionen auf Intervallen der reellen Zahlen definiert werden.

Anfangs werden zur Darstellung von proportionalen Situationen das graphische und das tabellarische Register genutzt und Übersetzungen zwischen ihnen durchgeführt. Parallel zur Betrachtung der Proportionalität läuft die Hinführung an die Arbeit im algebraischen Register, das aber erst in der 4e bzw. 3e tatsächlich zur Darstellung funktionaler Zusammenhänge genutzt wird. In der 3e arbeiten dann alle Schüler mit proportionalen und linearen Funktionen in allen Darstellungen und führen Übersetzungen zwischen den Darstellungen durch. Die zentrale Übersetzung ist der Übergang zwischen algebraischen und der graphischen Darstellung.
Nach dem Übertritt in das Lycée finden in der 2de nur noch wenige Übersetzungsvorgänge statt und die tabellarische Darstellung wird nicht mehr genutzt. Hauptsächlich wird der Übergang zwischen dem algebraischen und dem graphischen Register geübt. Allerdings soll auch die algebraische Darstellung einer linearen Funktion durch zwei gegebene Punkte angegeben werden.
Realsituationen und damit Übersetzungen von und zur Realität sind bis zur 4e stark vertreten, gehen dann allerdings zurück. In der 2de sind in *Déclic* wenige und in *Transmath* kaum noch Aufgaben mit Realitätsbezug zu finden. Viele Anwendungsaufgaben werden auch aus dem Gebiet der Geometrie angeboten.

Sowohl die Zuordnungs- als auch die Kovariations-Grundvorstellung werden angesprochen. Zur Einführung der Proportionalität im CM2 steht die Kovariations-Grundvorstellung im Mittelpunkt. Bei den Arbeiten in den Folgejahren können beide Grundvorstellungen ausgemacht werden, wobei aber durch die fehlende Betrachtung von Proportionalität als funktionale Situation beide nicht im Vordergrund stehen.
Auch mit der Definition von linearen Funktionen in der 3e spielt die Nutzung von Grundvorstellungen keine hervorgehobene Rolle und tritt hinter das Erlernen von Übersetzungsfähigkeiten zurück.
In der 2de beruht die Funktionsdefinition auf der Zuordnungs-Grundvorstellung. Sofort nach der Definition wird aber mit Variationstabellen gearbeitet und damit die Kovariations-Grundvorstellung angesprochen. Die Variationsrichtung von Funktionen wird im Detail

untersucht, die Art der Variation wird allerdings deutlich seltener betrachtet. So wird beispielsweise nicht die Art der Variation von quadratischen Funktionen mit der von linearen Funktionen verglichen, um so den Unterschied im Wachstumsverhalten zu verdeutlichen.
In den Aufgaben spielen Zuordnungen nur eine untergeordnete Rolle. Es stellt sich somit die Frage, welche Auswirkung dieser Unterschied zwischen der Definition als Zuordnung und der tatsächlichen Nutzung von Funktionen als Variationsbeschreibungen hat (siehe Abschnitt 3.1.6).
Die Objekt-Grundvorstellung kann in keinem der Schulbücher ausgemacht werden.

Da Funktionen erst in der 3^{e} bzw. 2^{de} definiert werden kann auch erst dann Aktions- Prozess oder Objekt-Auffassung von Funktionen gesprochen werden. In einigen hinführenden Aufgaben ist eine Aktions-Auffassung von Funktionen auszumachen, der überwiegende Teil geht allerdings von der Prozess-Auffassung aus. Genau wie die Objekt-Grundvorstellung taucht die Objekt-Auffassung von Funktionen in den hier analysierten Klassenstufen nicht auf.

Trotz des nicht vorhandenen Genehmigungsverfahrens für Schulbücher sind in keinem der hier analysierten Lehrbücher sehr starke Abweichungen von den Lehrplänen zu finden. Allerdings werden mache Inhalte mehrmals wiederholt oder früher eingeführt, als es im Lehrplan vorgesehen ist. So wird beispielsweise in *Triangle* bereits in der 6^{e} mit der algebraischen Darstellung von Proportionalitäten gearbeitet und in *Cinq sur Cinq* die Proportionalität neu definiert. Beides ist so nicht im Lehrplan vorgesehen.

Im concept image der französischen Schüler können einige Einschränkungen erwartet werden. Fünf Schuljahre lang werden nur proportionale und lineare funktionale Zusammenhänge betrachtet, was die Idee von einem *privilegierten Zusammenhang* fördern kann.
Die gegebene Funktionsdefinition schränkt funktionale Zusammenhänge auf Zuordnungen zwischen reellen Intervallen ein, und bei der großen Mehrheit der anschließend gezeigten Kurven handelt es sich um stetige Funktionen. Andersartige Zusammenhänge werden nur vereinzelt betrachtet, so dass auch dies zu einer Beschränkung des concept images führen kann.
In vielen Aufgaben sollen die Schüler Funktionen und spezielle Funktionstypen in den verschiedenen Darstellungen und der Realität erkennen. Dabei sehen sie auch einige Darstellungen von Zusammenhängen, die nicht funktional sind als Gegenbeispiele. Eine relativ gut ausgeprägte Fähigkeit zum Erkennen von funktionalen Zusammenhängen und von bestimmten Funktionen kann somit bei französischen Schülern erwartet werden.

Die Analysen des potentiellen Curriculums bestätigen somit die Ergebnisse der Analysen des intendierten Curriculums von Frankreich.

7.3 Zwei Beispiele

Vor der vergleichenden Analyse zum Abschluss dieses Kapitels sollen noch zwei Beispiele aus Schulbüchern gegeben werden. Das erste zeigt wie Schulbücher die Entwicklung von Fehlvorstellungen fördern können und das zweite die Kontinuität des potentiellen Curriculums.

Schulbücher können dazu beitragen zu verhindern, dass Fehlvorstellungen aufgebaut werden. Aber sie können diesen Aufbau auch fördern, wie man in diesem Einführungsbeispiel kurz vor der Funktionsdefinition aus *Déclic* sehen kann. Hier wird die ikonische Lesart von Graphen stark gefördert, die bekanntlich eine der typischen Schwierigkeiten beim Umgang mit Graphen ist (siehe Abschnitt 4.2.2). Die abgebildete Kurve stellt die Flughöhe eines aus einer Felswand in 7 Metern Höhe gestarteten Vogels in Abhängigkeit von seiner Entfernung von der Felsküste dar. Im Original ist der Bereich unterhalb der x-Achse blau gefärbt. Ob diese Zuordnung ein funktionaler Zusammenhang ist, hängt im Übrigen von der Flugbahn des Vogels ab. (Misset, Turner, & Lotz, 2004, S. 81)

DÉPLACEMENT D'UN OISEAU PÊCHEUR

Un oiseau de mer niche sur une falaise à 7 m de hauteur.

La courbe ci-contre représente l'altitude de l'oiseau en fonction de la distance qui le sépare de la côte.

1° Comment est mathématisée la profondeur? la surface de l'eau ?

2° a) Lire l'altitude de l'oiseau à 5 m de la côte, à 20 m et à 13 m.

b) Pour quelles distances à la côte, l'oiseau est-il à 5 m de hauteur ?

3° a) Décrire le déplacement de l'oiseau en indiquant les phases croissantes ou décroissantes de la hauteur, et le minimum et le maximum.

b) Pour quelles distances l'oiseau est-il au niveau de l'eau ? sous l'eau ?

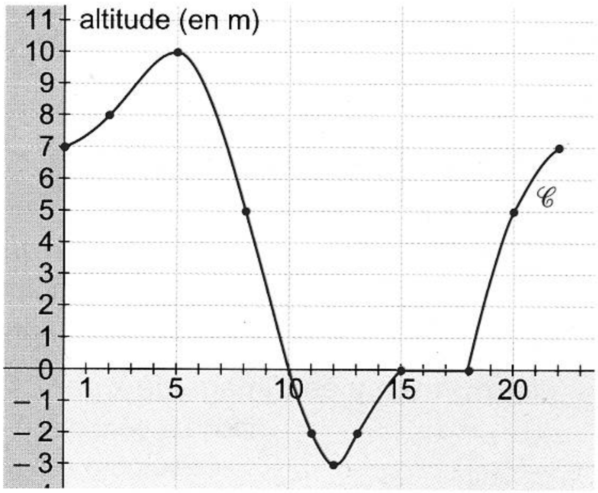


Abbildung 30: 2de: Aufgabe zur Förderung der ikonischen Sichtweise von Graphen

Die folgende Abbildung zeigt wie der Funktionsbegriff zu Mitte der 90er Jahre in einem bayerischen Gymnasialbuch eingeführt wurde. Damals war auch noch im Gymnasium der Einfluss der Mengentheorie sichtbar. Die Lehrplanautoren scheinen im einführenden Beispiel möglichst viele Darstellungen zu benutzen zu wollen um das concept image der Schüler nicht auf eine von diesen einzuschränken. Diese Art von Versuch den Aufbau von Fehlvorstellungen zu vermeiden lässt sich in den oben analysierten Schulbüchern noch immer finden. (Schmitt, et al., 1989, S. A60)

Im folgenden Abschnitt werden nun die Ergebnisse der Analysen der potentiellen Curricula von Deutschland und Frankreich verglichen.

Der Funktionsbegriff

Durch eine Vorschrift, eine Tabelle oder eine graphische Darstellung können wir eine Zuordnung zwischen zwei Größen darstellen. Durch die Angabe der ersten Größe ist dann die zweite eindeutig festgelegt.

1. Beispiel und Definition

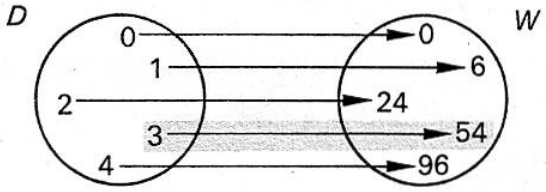
Der Kantenlänge s eines Würfels wird die Oberfläche O dieses Würfels zugeordnet.

Wir schreiben: $s \mapsto O$. Ist die Kantenlänge s in x cm und die Oberfläche O in y cm^2 angegeben, so erhalten wir für x und y folgende Tabelle:

Tabelle:

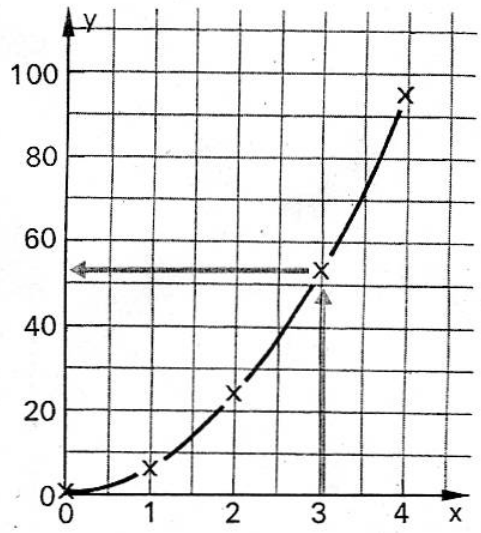
x	0	1	2	3	4
y	0	6	24	54	96

Im Mengenbild stellt sich die Zuordnung so dar:[1]



Die Elemente der Menge *D* werden den Elementen der Menge *W* zugeordnet, z. B. $3 \mapsto 54$. Wir bezeichnen die Menge *D* als *Definitionsmenge* und die Menge *W* als *Wertemenge*.

Graph:[1]



Jedem Element der Definitionsmenge wird *eindeutig* ein Element der Wertemenge zugeordnet. Eine Zuordnung dieser Art nennen wir *Funktion*.

Abbildung 31; Gymnasialbuch der 8. Klasse von 1989

7.4 Vergleich der potentiellen Curricula

Schon im Aufbau der Schulbücher sind große Unterschiede zwischen Deutschland und Frankreich auszumachen.

In Bayern halten sich die Schulbücher sehr eng an die Vorgaben des Lehrplans. Schon im Aufbau des Buches wird der Lehrplan widergespiegelt, während dies in Frankreich nicht der Fall ist. Dort wird allerdings der Lehrplan innerhalb der Bücher abgedruckt. Außerdem enthalten französische Schulbücher eine meist zweiseitige Erklärung, wie die Schulbücher zu nutzen sind.

Sieht man von dem Schulbuch des CM2 ab, das wegen seiner Zugehörigkeit zur Grundschule getrennt betrachtet werden muss, so zeigt sich, dass die hier analysierten Schulbücher von Frankreich ein selbstständigeres Arbeiten der Schüler ermöglichen als die bayerischen Schulbücher. Zu den einzelnen Kapiteln gibt es dort einen Unterrichtsteil mit gelösten Beispielaufgaben und es werden Aufgaben angeboten, deren Lösungen am Ende des Buches nachgeschlagen werden können. In Bayern ist der Unterrichtsteil speziell in den unteren beiden Schulformen deutlich weniger ausgeprägt. Dort haben die Schulbücher mehr den Charakter einer Aufgabensammlung.

Was die behandelten Funktionstypen betrifft, so stellt man fest, dass in beiden Ländern die algebraische Darstellung Leitfaden bei der Betrachtung von Funktionstypen ist.
In Frankreich wird im Gegensatz zu Bayern sehr lange mit proportionalen Zuordnungen und linearen Funktionen gearbeitet. Erst in der 2^de^ werden andere Funktionstypen betrachtet. Schüler der 9. Klasse der Hauptschule haben somit eine größere Auswahl an bekannten Funktionstypen als die Schüler der 3^e^, wo etwa die umgekehrt proportionalen Zusammenhänge noch nicht betrachtet werden.
Auch in der 2^de^ lernen die Schüler mit den quadratischen Funktionen, den Funktionen der umgekehrten Proportionalität sowie der Kosinus- und der Sinusfunktion nicht so viele neue Funktionstypen kennen, wie die bayerischen Schüler. In allen Schulformen werden dort zum Beispiel exponentielle Funktionen betrachtet. Den Schülern der bayerischen Gymnasien sind mit einfachen Potenzfunktionen, Wurzelfunktionen und allen trigonometrischen Funktionen deutlich mehr Funktionen bekannt.

Auch der Zeitpunkt und die Art der formalen Funktionsdefinition sind in beiden Ländern sehr unterschiedlich gewählt. Während in den Schulbüchern der 2^de^ Funktionen als Zuordnungen für alle Schüler definiert werden, sind in Bayern deutliche Unterschiede zwischen den Schularten zu finden. In der Hauptschule wird von Funktionen gesprochen, ohne diese zu definieren, was dem Vorgehen in der 3^e^ in Frankreich entspricht. In Realschule und Gymnasium werden Funktionen schon in der 8. bzw. 9. Klasse als spezielle Relationen bzw. Zuordnungen definiert. Damit arbeiten viele bayerische Schüler deutliche früher mit der Funktionsdefinition als das französische Schüler tun.
Weder in Deutschland, noch in Frankreich wird der Funktionsbegriff als zusammenfassender Begriff nach dem Studium mehrerer Funktionstypen eingeführt, sondern spätestens nach der Betrachtung von linearen Zusammenhängen vorab definiert. Damit wird in beiden Ländern das Risiko eingegangen, dass sich eine vom concept image abgekapselte formale concept definition herausbildet. Besonders groß kann diese Gefahr in der bayerischen Realschule sein, wo nach der Funktionsdefinition nicht mehr mit Relationen gearbeitet wird (siehe Abschnitt 3.1.6).

Bei der Nutzung der Darstellungen in den verschiedenen Registern und der Übersetzungen zwischen ihnen sind Parallelen zwischen den beiden Ländern zu erkennen. Alle Darstellungen werden eingeführt und auch genutzt, wobei die Rolle der tabellarischen Darstellung in den höheren Klassenstufen meist zurückgeht. Zentrale Untersuchungsgegenstand vieler Aufgaben sind Darstellungen im algebraischen und im graphischen Register und der Übergang zwischen ihnen. In Frankreich spielen in der 2^de^ allerdings Übersetzungen keine tragende Rolle mehr.
In beiden Ländern ist eine enge Verbindung zwischen der Funktionsdefinition und der algebraischen Darstellung auszumachen, so dass eine Verwechslung zwischen der mathematischen Idee und ihrer Darstellung möglicherweise gefördert wird.
Der Einfluss von Realsituationen in den Aufgaben nimmt in Frankreich und in der bayerischen Realschule in den höheren Klassenstufen ab, wohingegen er in der Hauptschule

und am Gymnasium von Bayern stark bleibt. In Frankreich werden zusätzlich oft Anwendungsaufgaben aus der Geometrie angeboten.

In beiden Ländern wird sowohl mit der Zuordnungs-Grundvorstellung als auch mit der Kovariations-Grundvorstellung gearbeitet. Bei der Funktionsdefinition steht der Zuordnungsgedanke im Vordergrund. Mit Ausnahme der bayerischen Realschule wird in den Aufgaben auch die Kovariations-Grundvorstellung intensiv genutzt. In Frankreich ist diese Nutzung besonders stark. Schon bei der Untersuchung von Proportionalitäten wird viel auf Variation geachtet und in der 2^{de} ist dies ein zentraler Punkt der meisten Aufgaben. Allerdings wird nur die Variationsrichtung betrachtet und nicht die Art der Variation.
Die Objekt-Grundvorstellung kann in den bayerischen Lehrbüchern nur rudimentär und in den französischen Lehrbücher überhaupt nicht ausgemacht werden.

Französischen Schülern sind zum Ende der Sekundarstufe I weniger Funktionstypen bekannt als bayerischen Schüler, sofern diese nicht nach der 9. Klasse die Hauptschule verlassen haben. Dadurch können sich gewissen Einschränkungen im concept image ergeben.
Eine weitere Tatsache, die zu einem restriktiven concept image der französischen Schüler führen kann, ist die sehr lange Betrachtung von linearen Zusammenhängen.
Ähnliche Einschränkungen sind bei den bayerischen Hauptschülern und, etwas weniger ausgeprägt, bei den bayerischen Realschülern zu erwarten, die nicht den mathematisch-technischen Zweig besuchen.
In beiden Ländern sind die breite Mehrheit der gesehenen Funktionen stetige Zuordnungen zwischen reellen Zahlen. Auch dies wird vermutlich die jeweiligen concept images prägen.
Je nach Land und Schulart sind also teilweise sehr stark unterschiedliche concept images zu Funktionen am Ende der Sekundarstufe I zu erwarten. Dies ist bemerkenswert, da die Pflichtschulzeit für viele Schüler damit vorbei ist und somit in der Bevölkerung nicht von einem gemeinsamen Verständnis von funktionalen Abhängigkeiten ausgegangen werden kann.

Eine weitere Auffälligkeit der französischen Lehrbücher hat möglicherweise Auswirkung auf die Arbeitsweise der Schüler: Die systematische Angabe und Nutzung von Beispielaufgaben kann zu Anwendungsautomatismen ohne Verständnis des Inhalts führen. Eine Suche nach Aufgabentypen und den dazugehörigen Lösungsschemata wird so gefördert. Untypische Aufgaben, die nicht nach einem bekannten Schema bearbeitet werden können, können einige Schüler deswegen in Schwierigkeiten bringen.
Diese Fokussierung auf die Techniken zur Bearbeitung von bestimmten Aufgaben ist auch mit ihrer großen Bedeutung in der französischen Mathematikdidaktik zu erklären. Dort sind sie beispielsweise in den Forschungen von Yves Chevallard ein zentraler Untersuchungsgegenstand.
In dieser Arbeit steht die Entwicklung der funktionalen Denkweise im Mittelpunkt, so dass nur am Rand auf die in den beiden Ländern genutzten Techniken eingegangen wird. Zur reflektierten und effektiven Nutzung von Techniken sind Grundvorstellungen und Grundkenntnisse notwendig, die den Abruf der Techniken ermöglichen. Durch diese Verbindung werden die Techniken direkt mit der funktionalen Denkweise und dem theoretischen Rahmen dieser Arbeit verknüpft und können damit in weiterführenden Detailuntersuchungen betrachtet werden.

Bezug nehmend auf die Definition funktionalen Denkens (siehe Kapitel 1) zeigt sich, dass die meisten Schüler in Deutschland und Frankreich am Ende der Sekundarstufe I nur eingeschränkt die Möglichkeit haben diese auszubilden. In Frankreich stehen ihnen nur wenige Funktionstypen zur Verfügung und sie haben die unterschiedlichen Arten der Variation nicht verglichen. Auch die bayerischen Hauptschüler und die Realschüler, die nicht den mathematisch-technischen Zweig besuchen haben, kennen nur wenige Typen funktionaler Zusammenhänge. Lediglich die Schüler des mathematisch-technischen Zweiges der Realschule und Gymnasiasten kennen mehr funktionale Zusammenhänge. Außerdem kennen sie, genau wie die restlichen Schüler von Deutschland und Frankreich, alle Darstellungen von Funktionen und haben Übersetzungen durchgeführt. Somit haben sie die besten Vorraussetzung für eine volle Ausbildung der funktionalen Denkweise am Ende der Sekundarstufe I.

Die in Kapitel 6 gestellten Fragen können hier nochmals wiederholt werden, da sie durch die Analyse des intendierten Curriculums bestätigt werden:

Fördert in Frankreich die jahrelange Arbeit mit linearen Zusammenhängen eine Fixierung der Schüler auf derartige Zusammenhänge?
Die Funktionsdefinition wird in Frankreich später gegeben als in Deutschland. Dies liegt aber nicht an einer langsameren Hinführung und dadurch eine zusammenfassenden Definition. Die gegebene Funktionsdefinition erinnert an die der bayerischen Gymnasialbücher. Welche Gründe gibt es für diese späte Einführung?
Wie wirkt sich die frühe Beschäftigung mit mehreren Funktionstypen in Deutschland auf die Leistungen der Schüler aus. Oder anders formuliert, welche Auswirkungen hat der beschränkte Funktionsschatz der französischen Schüler?
Welchen Einfluss hat die unterschiedliche Intensität im Umgang mit der Kovariations-Grundvorstellung auf die Leistungen der Schüler?

Mit diesem Kapitel wird die Analyse dessen abgeschlossen, was die Schüler am Ende der Sekundarstufe I zu Funktionen in beiden Ländern laut intendiertem und potentiellem Curriculum wissen sollen. Im den folgenden Kapiteln wird dargestellt, wie die Schüler beider Länder in der internationalen Vergleichsstudie PISA abgeschnitten haben. Außerdem wird die Entwicklung der Leistung bayerischer Schüler im Bereich funktionalen Denkens in der Sekundarstufe I in einer Subskala von PALMA dargestellt und schließlich bestimmte typische Fehler anhand von speziell erhobenen Interviews illustriert.

8 Quantitative Analysen

In den beiden vorangegangenen Kapiteln dieser Arbeit wurde analysiert, was die Schüler im Laufe der Sekundarstufe I in den jeweiligen Schulsystemen im Bereich funktionalen Denkens lernen sollen. Nun stellt sich die Frage, was die Schüler tatsächlich von dem zu Lernenden behalten und wie sie es einsetzen können.

Es gestaltet sich sehr kompliziert ein umfassendes Bild des erreichten Curriculums von Deutschland und Frankreich im Bereich funktionalen Denkens zu erhalten. Mindestens zwei quantitativ erfassbare Punkte erscheinen für dessen umfassende Darstellung wichtig:
Einerseits eine repräsentative Vergleichsstudie von Deutschland und Frankreich am Ende der Sekundarstufe I und andererseits repräsentative Längsschnittstudien, die eine Betrachtung der Leistungsentwicklung in enger Verbindung mit dem intendierten und potentiellen Curriculum ermöglichen. Beide sollten so ausgelegt sein, dass die Fähigkeiten, die in der Definition von funktionalem Denken (siehe Kapitel 1) gefordert werden spezifisch geprüft werden können. Solche Erhebungen können nicht im Rahmen einer Dissertation durchgeführt werden und sind mit sehr großem wissenschaftlichem, personellem und finanziellem Aufwand verbunden. Im Rahmen dieser Arbeit kann allerdings mit PISA 2003 und PALMA auf zwei Untersuchungen zurückgegriffen werden, die in weiten Teilen den oben genannten Anforderungen genügen.

PISA 2003 ist eine repräsentative internationale Vergleichsstudie, an der auch Deutschland und Frankreich teilgenommen haben. Dort werden unter anderem die Leistungen 15-jähriger im Bereich von *mathematical literacy* (Definition siehe unten) erhoben. Eine Zusatzstudie erlaubt sogar repräsentative Aussagen über die verschiedenen deutschen Bundesländer. Die Aufgaben sind in mehrere Subskalen unterteilt, wovon eine sehr eng mit der Definition von funktionalem Denken verbundnen ist. Mit Hilfe dieser Subskala wird im ersten Teil dieses Kapitels versucht das erreichte Curriculum der Schüler von Deutschland und Frankreich kurz vor Ende der Sekundarstufe I zu vergleichen.

PALMA ist eine repräsentative bayerische Längsschnittstudie, mit der die Leistungsentwicklung in Mathematik in der Sekundarstufe I in Bayern dokumentiert wird. Die Erhebungen sind bis zur 9. Klasse abgeschlossen, so dass auch hier Aussagen über einen Grossteil des betrachteten Zeitraumes gemacht werden können. Für Frankreich liegt leider keine solche Studie vor.
Im zweiten Teil dieses Kapitels wird die Leistungsentwicklung der bayerischen Schüler im Bereich funktionalen Denkens mit Hilfe von PALMA dargestellt.

8.1 PISA

In dieser Arbeit werden mit Detailanalysen der PISA Studie die Leistungen der deutschen und französischen Schüler verglichen. Zuvor wird diese kurz vorgestellt.

8.1.1 Ziele, Aufbau und Methoden von PISA

PISA steht für *Programme for interational student assessment* und bezeichnet einen von der OECD angelegten Leistungstest, der zum Ziel hat die Kenntnisse und Fähigkeiten von

Schülern in Alter von 15 Jahren in mehreren Teilbereichen zu erheben und diese untereinander zu vergleichen. Dadurch sollen unter anderem Schwächen und Stärken der einzelnen Länder aufgedeckt werden und Möglichkeiten zur Verbesserung aufgezeigt werden. Die meisten OECD Staaten nehmen daran teil und auch weitere Staaten haben sich zu einer Teilnahme entschlossen.
Die PISA-Studie wird alle drei Jahre durchgeführt, wobei jedes Mal ein unterschiedlicher Schwerpunktbereich gewählt wird. Bei der ersten Erhebungswelle im Jahr 2000 war dies die Lesekompetenz, im Jahr 2003 *mathematical literacy* (Definition siehe unten) und im Jahr 2006 die Naturwissenschaften. Als Referenzpunkt für die Analysen in dieser Arbeit wird die PISA Erhebung aus dem Jahr 2003 genommen.
Im Jahr 2003 haben über 275.000 Schüler weltweit am PISA-Test teilgenommen. Davon waren 4.660 aus Deutschland und 4.300 aus Frankreich, die jeweils repräsentativ für eine überwiegende Mehrheit der 15-jährigen ihres Landes stehen.

Der Aufbau von PISA ermöglicht es den teilnehmenden Ländern den Test um nationale Erhebungen zu erweitern. In Deutschland wird insbesondere deshalb von dieser Möglichkeit Gebrauch gemacht um Aussagen über die Bildungssysteme der verschiedenen Bundesländer treffen zu können. Diese Ergänzungsstudien werden mit PISA-E bezeichnet um sie vom internationalen Test abzuheben. Aufbau und Ablauf der nationalen Erhebungen erfolgen in enger Anlehnung an den internationalen Test. 2003 haben in Deutschland mehr als 45.000 Schüler an PISA-E 2003 teilgenommen.

Sämtliche Daten von PISA 2003 sind frei über die Homepage der OECD im Internet verfügbar. Dort werden auch Beispielaufgaben, Berichte über die Ergebnisse, Technische Berichte und Manuale zur Datenanalyse veröffentlicht (Beispielsweise OECD, 2003a; OECD, 2004b; OECD, 2005a; OECD, 2005b). Bisher wurden allerdings nur wenige Aufgaben aus den Testheften zur Veröffentlichung freigegeben. Ein Grund dafür ist, dass es geplant ist die Aufgaben in späteren Tests noch einmal einzusetzen um Aussagen über die Entwicklung der Leistungen der Schüler machen zu können.

Die Aufgaben aus dem Bereich Mathematik sollen nicht die Schnittmenge aller nationalen Curricula abdecken sondern die Fähigkeiten der Schüler in einem von PISA geprägten Bereich, der *mathematical literacy,* erfassen. *Mathematical literacy* ist dabei folgendermaßen definiert:

> Die Fähigkeit einer Person, die Rolle zu erkennen und zu verstehen, die Mathematik in der Welt spielt, fundierte Urteile abzugeben und die Mathematik zu nutzen und sich mit ihr in einer Weise zu befassen, die den Anforderungen im Leben dieser Person als konstruktivem, engagiertem und reflektierendem Bürger entspricht. (OECD, 2004b, S. 27)

Es wird also großen Wert auf den selbstständigen Umgang mit Mathematik in Alltagssituationen gelegt. In PISA 2003 wurden die Aufgaben des Mathematiktests nach vier übergreifende Ideen unterteilt. Das sind: Raum und Form, Veränderung und Beziehung, Quantität und Unsicherheit. Aufgaben zu den ersten beiden dieser Subskalen waren auch schon in PISA 2000 in ausreichendem Umfang vertreten, so dass hierzu Aussagen über Entwicklungen gemacht werden können.

In dieser Arbeit wird nur die Subskala Veränderung und Beziehung näher betrachtet. In Abschnitt 1.1 wurde gezeigt, dass die Konzeption dieser Subskala in sehr enger Verbindung mit der Definition von funktionalem Denken steht. Die Fähigkeiten der Schüler in Deutschland und Frankreich stellen somit den hauptsächlichen Untersuchungsgegenstand des folgenden Abschnittes dar.

Es soll noch darauf hingewiesen werden, dass im Rahmen der PISA Studien auch beispielsweise der familiäre, finanzielle und kulturelle Hintergrund der Schüler und ihrer Eltern erhoben wurde. Dadurch werden Verbindungen der erbrachten Leistungen mit soziokulturellen und ökonomischen Hintergrundvariabeln ermöglicht. Zu detaillierten Ausführungen hierzu und zu internationalen, deutschen und französischen Ergebnissen aus allen Teilbereichen sei auf die umfangreiche Literatur hierzu verwiesen (Bourny, Fumel, Monnier & Rocher, 2004; Dupé & Olivier, 2005; OECD, 2003a; OECD, 2004b; OECD, 2005a; OECD, 2005b; Prenzel et al., 2004a; Prenzel et al. 2004b).

8.1.2 Funktionales Denken, Veränderung und Beziehung und das Curriculum

Die quantitativen Analysen des Leistungstests aus dem Bereich Mathematik werden in PISA mit dem eindimensionalen Raschmodell durchgeführt. Erklärungen dazu finden sich zum Beispiel in Knoche & Lind (2004a), OECD (2005b) oder Rost (1996). Für das Verständnis der in diesem Abschnitt benutzen Skalen ist es wichtig zu wissen, dass die Ergebnisse aller Skalen auf einen Mittelwert von 500 Punkte mit einer Standardabweichung von 100 Punkten normiert wurden. Dabei wurden nur die Ergebnisse der teilnehmenden OECD-Staaten zur Normierung verwendet.

In jedem Land fand die Datenerhebung innerhalb eines 42-Tage Zeitraums statt, der zwischen dem 1. März 2003 und dem 31. August 2003 zu liegen hatte. Folgende Tabelle, die auch in Kapitel 6 abgebildet ist, zeigt die Verteilung der Zielpopulation von PISA auf die verschiedenen Klassenstufen.

Klassenstufe	7	8	9	10	11
Anteil der Schüler in Deutschland	1,7%	15%	60%	23,3%	0,1%
Anteil der Schüler in Frankreich	0,2%	5,4%	34,9%	57,3%	2,2%

Tabelle 12: Klassenstufenaufteilung der 15-jährigen (OECD, 2003a)

Mit den im Folgenden dargestellten Daten sind somit keine reinen querschnittlichen Aussagen die Leistungen der Schüler am Ende der Sekundarstufe I gemacht werden. Es ist zu beachten, dass die Mehrheit der Schüler in Deutschland in der 9. Klasse ist, während in Frankreich bereits die Meisten die 2de besuchen.

In den Analysen der Kapitel 6 und 7 ist nachzulesen, dass Schüler gegen Ende der 9. Klasse in Bayern einen sehr unterschiedlichen Stand beim Erlernen der für die funktionale Denkweise ausschlaggebenden Inhalte haben. In der Hauptschule werden bis zu diesem Zeitpunkt nur lineare und umgekehrt proportionale Zusammenhänge betrachtet, ohne Funktionen zu definieren. In den nichtmathematischen Zweigen der Realschule sind Funktionen als spezielle

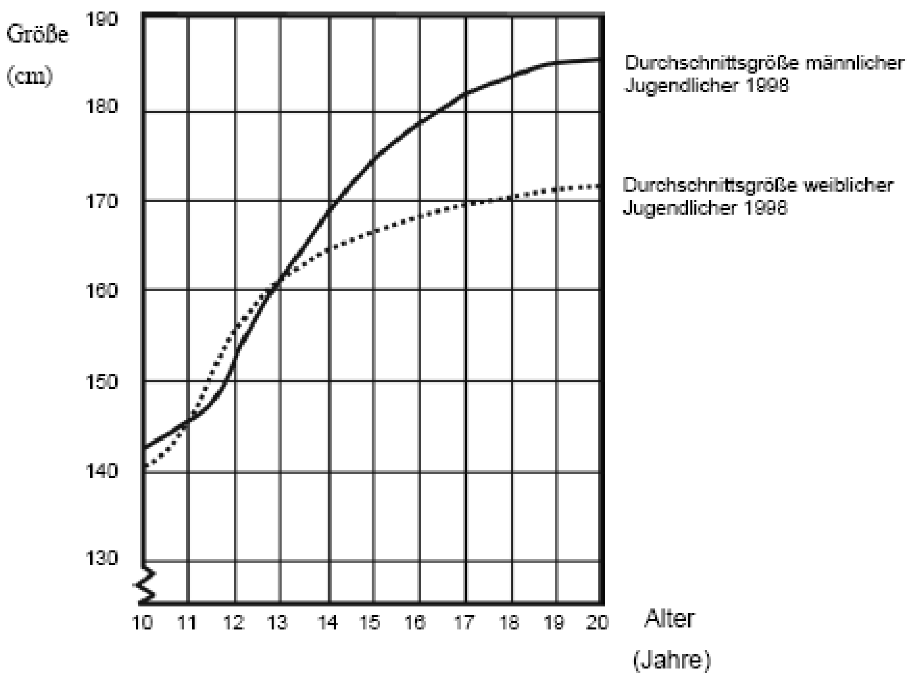
Relationen definiert, ohne dass mehr Arten funktionaler Zusammenhänge bekannt sind. Im mathematischen Zweig der Realschule und am Gymnasium, wo eine Zuordnungsdefinition gegeben wurde, sind in der 9. Klasse auch noch weitere Funktionstypen wie die quadratische Funktionen und Wurzelfunktionen kennen gelernt worden.
40% der teilnehmenden deutschen Schüler besuchen jedoch nicht die 9. Jahrgangsstufe. Sie verteilen sich in etwa gleichen Teilen auf die Klassenstufen darüber und darunter und kennen somit mehr oder weniger Inhalte, was bei den Analysen zu berücksichtigen ist.

In Frankreich sind fast 60% der Schüler in der 2^{de}, aber 40% besuchen noch eine Klassenstufe darunter. Die Schüler der 2^{de} haben eine Funktionsdefinition als Zuordnung erlernt und arbeiten beispielsweise mit quadratischen Funktionen und Funktionen der umgekehrten Proportionalität. Auch andere funktionale Zusammenhänge werden bei der Einführung der Funktionsdefinition gesehen. Schüler die nur die $3^{ième}$ oder eine Klassenstufe darunter besuchen kennen weder eine Funktionsdefinition noch nichtlineare funktionale Zusammenhänge.

Die Analyse der Aufgaben der Subskala *Veränderung und Beziehung* zeigen, dass keines der 22 Items, die dieser Subskala zugeordnet sind, technisches Wissen prüft. Der Begriff *Funktion* wird nicht benutzt und alle Aufgaben bauen auf einer Realsituation auf. Bei 14 der Items liegt eine proportionale oder eine lineare Situation zugrunde, wobei es sich auch um Linearität in mehreren Variablen oder linear in Teilstücken handelt. In einer Aufgabe wird ein quadratischer Zusammenhang betrachtet und bei sieben Aufgaben werden andere funktionale Zusammenhänge untersucht, wie zum Beispiel in der Aufgabe *Größer werden.*

JUGENDLICHE WERDEN GRÖSSER

Für 1998 ist die durchschnittliche Körpergröße von männlichen und weiblichen Jugendlichen in den Niederlanden in folgendem Graphen dargestellt.



Frage 1: GRÖSSER WERDEN

Seit 1980 hat die Durchschnittsgröße 20-jähriger Frauen um 2,3 cm auf 170,6 cm zugenommen. Was war die Durchschnittsgröße einer 20-jährigen Frau im Jahr 1980?

Frage 2: GRÖSSER WERDEN

In welchem Lebensabschnitt sind laut Graphen weibliche Jugendliche durchschnittlich größer als ihre männlichen Altersgenossen?

Frage 3: GRÖSSER WERDEN

Erkläre, wie der Graph zeigt, dass die Wachstumsrate für Mädchen über 12 Jahre sich im Durchschnitt verlangsamt.

Abbildung 32: Größer werden (OECD, 2003b, S. 7)

In etwas weniger als der Hälfte der Aufgaben sollen Punktweise Berechnungen durchgeführt werden (wie in Frage 1 von Größer werden), wobei in einigen Fällen eine Formel vorgegeben ist, die für bestimmte Werte auszuwerten ist. In den Meisten der anderen Fälle finden weitergehende Übersetzungen statt. Diese sind nicht innermathematisch, sondern immer zwischen der Realsituation und einem innermathematischen Darstellungsregister. Lediglich einmal soll ausschließlich im graphischen Register gearbeitet werden. Es fällt auf, dass das graphische und das algebraische Register deutlich mehr zum Einsatz kommen als das tabellarische.
In den meisten Aufgaben werden sowohl die Zuordnungs- als auch die Kovariations-Grundvorstellung angesprochen. Betrachtet man die dominierende Grundvorstellung, so wird steht in zwei Drittel der Fälle mehr die Zuordnungs-Grundvorstellung als die Kovariations-Grundvorstellung im Vordergrund.

Zur Bearbeitung werden also viele der Fähigkeiten benötigt, die mit der funktionalen Denkweise assoziiert sind. Sehr starker Fokus ist allerdings auf Anwendungsaufgaben gelegt. Innermathematische Aufgaben und Übersetzungen zwischen Darstellungen im graphischen, tabellarischen oder algebraischen Register finden nicht statt. Außerdem werden, bis auf eine Aufgabe mit einem quadratischen Zusammenhang, keine anderen konkreten Funktionstypen als lineare funktionale Zusammenhänge untersucht. Auch findet beispielsweise kein Vergleich der verschiedenen Variationseigenschaften statt.
Es zeigt sich also, dass für eine erfolgreiche Bearbeitung der Aufgaben aus der Subskala *Veränderung und Beziehung* eine gewisse Ausprägung der funktionalen Denkweise vorhanden sein sollte. Sie kann aber durchaus Einschränkungen in gewissen Teilen aufweisen. Es wird somit ein zentraler Bereich der funktionalen Denkweise erfasst ohne diese jedoch vollständig abgebildet wird.

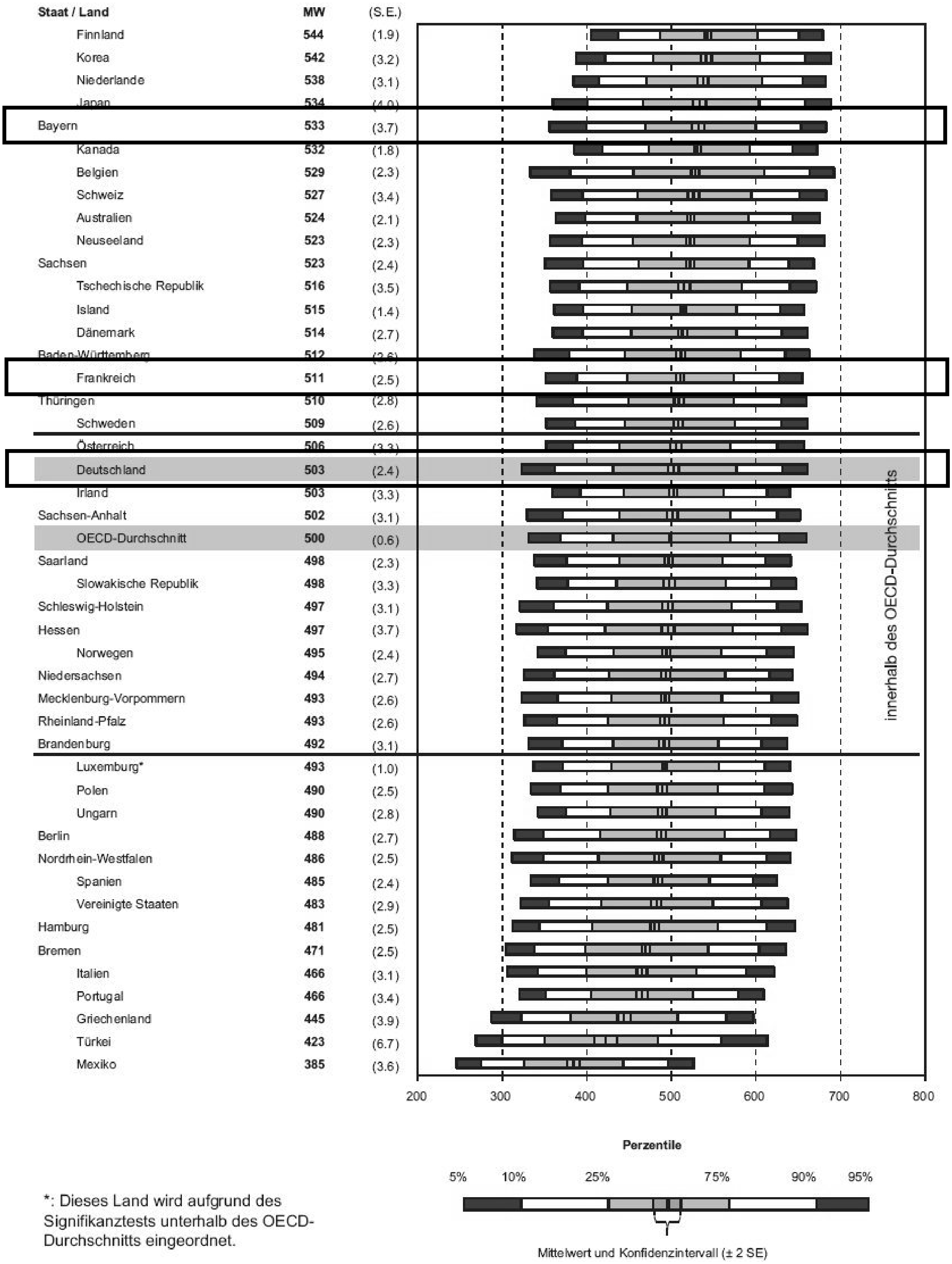
Den Analysen des 6. und 7. Kapitels kann man die Bekanntheit der jeweiligen Aufgabentypen für die Schüler der beiden Länder und der verschiednen Schularten (am Beispiel von Bayern) entnehmen.
Alle Schüler beider Länder kennen proportionale und lineare Funktionen, wobei in Frankreich etwas länger damit gearbeitet wird. Abschnittsweise lineare Funktionen oder lineare Funktionen in mehreren Variablen stellen in beiden Ländern unübliche Aufgabenstellungen

dar. In Frankreich wurden sie allerdings in der 2^{de} im Rahmen der Funktionseinführung und der Variationsuntersuchungen gesehen. Auch die Arbeit mit graphisch gegebenen funktionalen Zusammenhängen ohne bekannten algebraischen Darstellungen, wie in der Aufgabe *Größer werden*, ist in den untersuchten französischen Lehrbüchern, insbesondere in der 2^{de}, deutlich öfter zu finden als in den bayerischen Lehrbüchern.
Die Betrachtung der bayerischen Schulbücher hat außerdem ergeben, dass in der Hauptschule und im Gymnasium der Einfluss von realitätsnahen Aufgaben immer stark bleibt. In der bayerischen Realschule und in Frankreich sind solche Aufgaben in den höheren Klassenstufen seltener, so dass von den Schülern ein selbstständiger Übertrag geleistet werden muss. Zusätzliche Kenntnisse der französischen und bayerischen Schüler, etwa in Bezug auf umgekehrt proportionale Funktionen die traditionell früh in den deutschen Lehrplänen behandelt werden, tauchen in den Aufgaben nicht auf.

Die Aufgabentypen und Aufgabeninhalte der Subskala *Veränderung und Beziehung* sind den Schülern also nicht vollkommen fremd, aber es sind in beiden Länder auch keine Standardschulbuchaufgaben. An unterschiedlichen Stellen sind eigenständige Transferleistungen zu erbringen. Dies kann insbesondere französischen Schülern schwer fallen, da die Betrachtung des französischen potentiellen Curriculums gezeigt hat, dass dort oft mit Beispielaufgaben und Standardvorgehensweisen gearbeitet wird.

8.1.3 Ergebnisse von Deutschland, Bayern und Frankreich

Zuerst sollen an die Ergebnisse der Gesamtskala zur Erhebung von *mathematical literacy* erinnert werden.



*: Dieses Land wird aufgrund des Signifikanztests unterhalb des OECD-Durchschnitts eingeordnet.

Abbildung 33: Ergebnisse der Gesamtskala von PISA 2003 (Prenzel et al., 2004a, S. 6)

Auf der Abbildung 33 können die Leistungsmittelwerte der Schüler und deren Streuung abgelesen werden. Dargestellt sind alle Länder die an PISA 2003 teilgenommen haben und auch die Bundesländer von Deutschland. Der Unterschied zwischen Deutschland und Frankreich und auch der Unterschied zwischen Frankreich und Bayern ist statistisch signifikant (Signifikanzniveau 5%). Auf der Subskala *Veränderung und Beziehung* stellt sich ein ähnliches Bild dar.

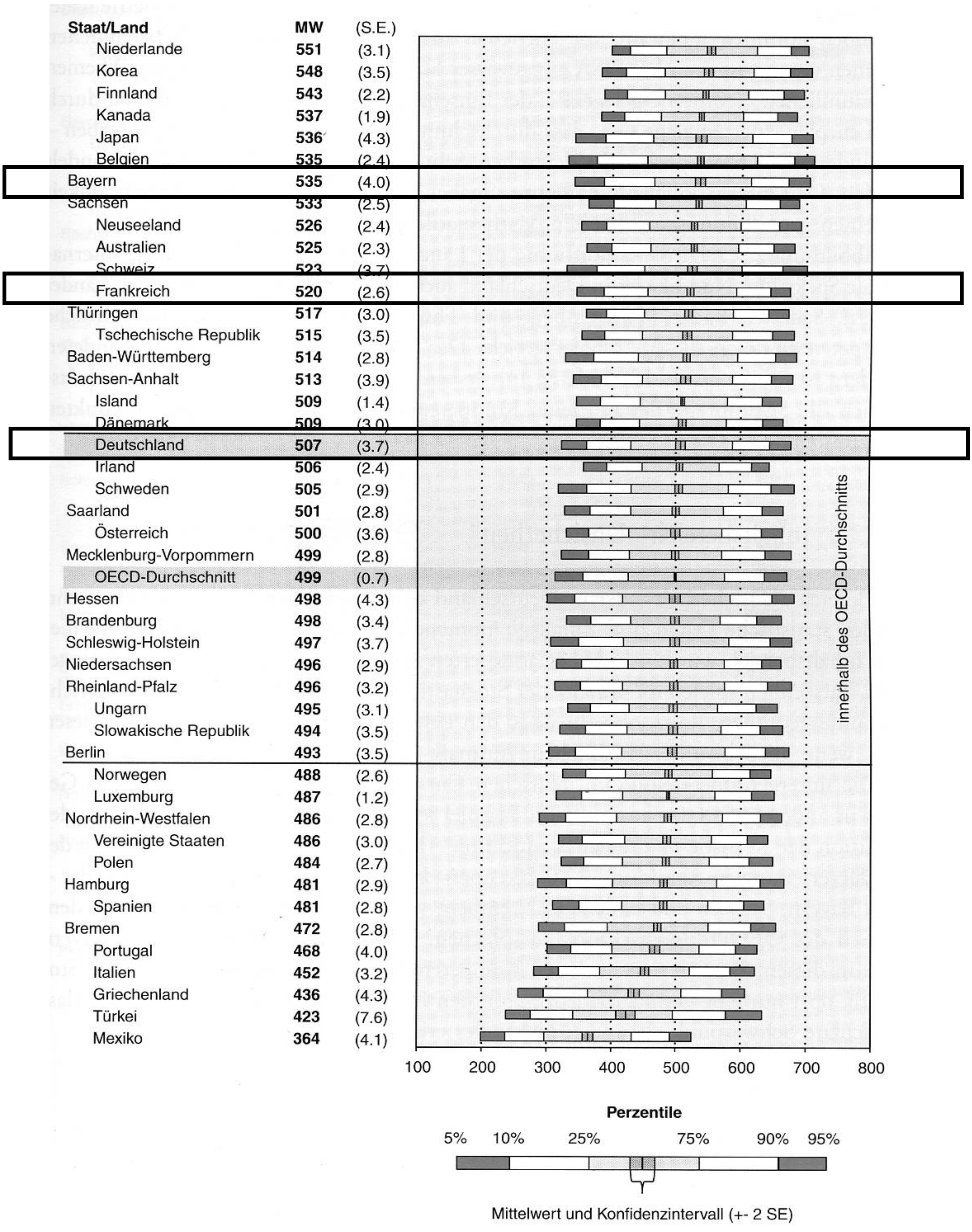


Abbildung 34: Ergebnisse der Subskala Veränderung und Beziehung (Neubrand et al., 2005, S. 67)

Die Leistungsmittelwerte der deutschen und der französischen Schüler unterscheiden sich auch hier signifikant zu Gunsten von Frankreich. Allerdings erzielen die bayerischen Schüler einen noch besseren Mittelwert.

Die Schüler beider Länder haben besondere Stärken im Bereich *Veränderung und Beziehung*. Dies kann man besonders deutlich in Frankreich mit 508, 520, 507 und 506 Punkten in den Skalen *Raum und Form*, *Veränderung und Beziehung*, *quantitatives Denken* und *Unsicherheit* erkennen. Deutschlandweit ist diese relative Stärke nicht so deutlich auszumachen (500, 507, 514, 493) und in Bayern liegt diese Subskala nur noch an dritter Position (539, 535, 543, 515). (OECD, 2004b; Prenzel et al., 2004a)

Wie schon in der Gesamtskala (Abbildung 33) zeigen die Leistungen der deutschen Schüler auch in der betrachteten Subskala (Abbildung 34) eine breite Streuung. Diese ist sowohl auf die unterschiedlichen Leistungen zwischen den Ländern, als auch auf die breite Streuung innerhalb der Länder zurückzuführen. Dies kann gut aus der folgenden Abbildung entnommen werden. Dort werden die deutschen Leistungswerte der Subskala *Veränderung und Beziehung* in Perzentilbändern für jede Schulart dargestellt.

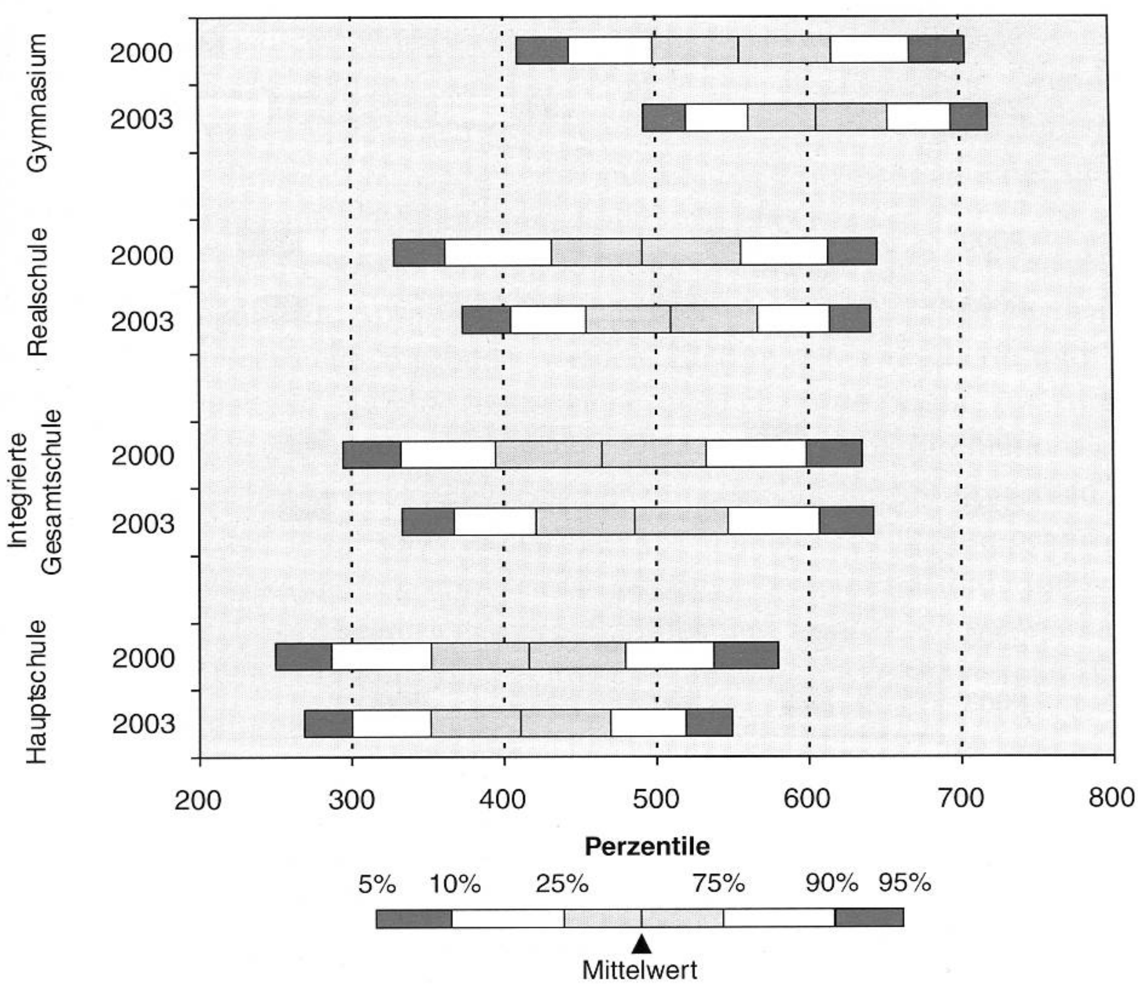


Abbildung 35: Deutsche Schülerleistungen in Veränderung und Beziehung (Blum et al., 2004, S. 87)

Es zeigt sich, dass trotz der großen Differenzen in den Leistungsmittelwerten der einzelnen Schularten große Überlappungen der Leistungen zu finden sind. Ein sehr guter Realschüler erbringt bessere Leistungen als ein durchschnittlicher Gymnasiast.

In Abbildung 35 sind neben den Perzentilbändern aus von PISA 2003 auch noch die von PISA 2000 dargestellt. Das ist möglich, da einige Aufgaben des internationalen Tests zu beiden Zeitpunkten eingesetzt wurden und somit die Leistungen in Relation gesetzt werden können. Deutschland gehört zu den Ländern, die zwischen den beiden Erhebungen in diesem Teilbereich signifikante Fortschritte gemacht hat. Dies gilt insbesondere für die bayerischen Schüler. Bei den Leistungen der französischen Schüler konnte auf dieser Subskala kein signifikanter Zuwachs festgestellt werden. Der Zuwachs in Deutschland ist wesentlichen auf Verbesserungen der unterdurchschnittlichen Gymnasiasten zurückzuführen, wie man aus Abbildung 35 entnehmen kann. Auffällig ist dort auch, dass sich die Streuung innerhalb der Schulen verringert hat. (Blum et al., 2004; Neubrand et al., 2005)

Im Bezug auf die funktionale Denkweise in Deutschland und Frankreich zeichnet sich also folgendes Bild ab: Frankreich schneidet besser als Deutschland ab. Innerhalb von Deutschland erbringen die bayerischen Schüler die besten Leistungen, die sogar noch über denen der französischen Schüler liegen.
In den Analysen der französischen Ergebnisse wird die relative Stärke der Schüler auf die ausführliche Behandlung der Proportionalität und die Auseinandersetzung mit der graphischen Darstellung zurückgeführt (Bourny et al., 2004, S. 3). Dies deckt sich auch mit den Analysen und Erwartungen der vorangegangenen Kapitel.
Das sehr gute Abschneiden der bayerischen Schüler sollte auch im Rahmen des allgemein guten Abschneidens auf der Gesamtskala gesehen werden. Im Gegensatz zu den französischen Schülern sticht die Leistung der bayerischen Schüler nicht als relative Stärke heraus. Ungeachtet dessen erreichen sie, getragen von den Leistungen der Gymnasiasten ein sehr gutes Ergebnis.

Details zu den Ergebnissen der verschiedenen Skalen von PISA und zu den zusätzlich erhobenen Umfeldvariablen können in den entsprechenden Berichten nachgelesen werden. (Bourny et al. 2004; Dupé & Olivier, 2005; OECD, 2004b; Prenzel et al., 2004b; Prenzel et al., 2005)

8.1.4 Analysen von Differential Item Functioning in PISA

Neben der Betrachtung der PISA-Ergebnisse auf Skalenebene kann sich auch der Lösungsverhalten auf Itemebene als aufschlussreich erweisen. In diesem Abschnitt werden mit Hilfe von spezifischen Analysen jene Items identifiziert, deren Lösungshäufigkeiten Auffälligkeiten im binationalen Vergleich aufweisen.
Zuerst wird kurz erklärt, worum es sich bei diesen Analysen handelt.

8.1.4.1 Differential Item Functioning

Die Daten der PISA Erhebungen werden mit dem eindimensionalen Raschmodell ausgewertet. In mehreren Tests wurde gezeigt, dass das die Annahme der Eindimensionalität sinnvoll ist und eine mehrdimensionale Analyse keinen zusätzlichen Erkenntnisgewinn bringt (siehe etwa Knoche & Lind, 2004a).

In diesem Abschnitt werden allerdings Analysen durchgeführt, die kontrafaktisch von einer nicht modellierten Multidimensionalität ausgehen und diese ausnutzen. Diese

Multidimensionalität kann als die unterschiedliche Ausprägung der Facetten einer übergreifenden Fähigkeit interpretiert werden. So setzt sich mathematische Fähigkeit aus einer Vielzahl von einzelnen, untergeordneten Fähigkeiten zusammen. Diese Fähigkeiten können von den verschiedenen Bildungssystemen unterschiedlich gefördert werden.

Grundannahme bei der Durchführung von Analysen zu differential item functioning (DIF) ist, dass sich die Bildungssysteme nicht nur in ihrer Effektivität unterscheiden, sondern auch spezifische Stärken und Schwächen der Schüler produzieren (siehe Klieme & Baumert, 2001, S. 386).
John Keeves und Geofferey Masters schreiben zu Items, mit denen solche Stärken und Schwächen aufgedeckt werden können:

> The detection of this type of biased items provides information of value in education, because the existence of bias reflects either differences in the learning experiences involved for providing a correct response to the item, or deficiencies in the construction of an item so that it would favour on particular group to the disadvantage of the other group. (Keeves & Masters, 1999, S. 12)

Beide Gründe sind für diese Arbeit interessant. Deshalb soll nach solchen differentiell funktionierenden Items der Subskala *Veränderung und Beziehung* gesucht werden.

Differentiell funktionierende Items sind Items, bei denen sich in zwei Teilpopulationen Schwierigkeitsunterschiede ergeben, die sich nicht einfach durch verschiedene Fähigkeiten in der erhobenen Variable erklären lassen. Es ist also wichtig zwischen unterschiedlichen *item impact*, d.h. unterschiedlichem Erfolg bei einem Item wegen Unterschieden in der zu messenden Variable, und DIF zu unterscheiden, bei dem trotz gleicher oder kontrollierter Ausprägung der zu messenden Variable unterschiedliche Ergebnisse erzielt werden.

Das folgende konstruierte Beispiel soll dies verdeutlichen. Dort wird, wie bei den Auswertungen der Erhebungen von PISA, von dem einparametrigen Raschmodell ausgegangen, in dem sich die Items nur in ihrem Schwierigkeitsgrad unterscheiden. In Abbildung 36 sind sieben Kurven eingezeichnet, die für Auswertungen mit dem Raschmodell typisch sind und die Lösungswahrscheinlichkeit eines Items in Abhängigkeit des untersuchten Fähigkeitsparameters darstellen (Knoche & Lind, 2004a; OECD, 2005b; Rost, 1996). Der Schwierigkeitsparameter ist der Wendepunkt der jeweiligen Kurve. Das leichteste Item, dessen Kurve am weitesten links gelegen ist, hat den Schwierigkeitsgrad -1,5. Die Kurve des fett hervorgehobenen Items hat den Schwierigkeitsgrad 0,1.
In diesem Beispiel soll davon ausgegangen werden, dass die Itemkurven mit den Antworten von einer Population 1 erstellt wurden, deren durchschnittliche Fähigkeit auf 0 normiert sei.
In Abbildung 37 sind die Itemkurven derselben Items dargestellt, wobei sie nun mit der Antowrten der Population 2 erstellt worden sind. Auch hier ist die durchschnittliche Fähigkeit der Personen in Population 2 auf 0 normiert worden.
Es fällt auf, dass die Kurven der ersten sechs Items nach rechts verschoben sind, und einen um 0,3 Punkte höheren Schwierigkeitsgrad aufweisen. Das zeigt, dass die Personen in Population 1 im Schnitt eine um 0,3 Punkte höhere Fähigkeit in der gemessenen Variable haben. Bei dem fett gedruckten Item ist nicht dieselbe Verschiebung nach rechts zu erkennen.

Entgegen dem allgemeinen Trend hat es sich leicht nach links verschoben und seine Schwierigkeit hat um 0,2 Punkte abgenommen. Hier scheint eine Besonderheit, ein differentielles Funktionieren vorzuliegen, das näher untersucht werden kann.

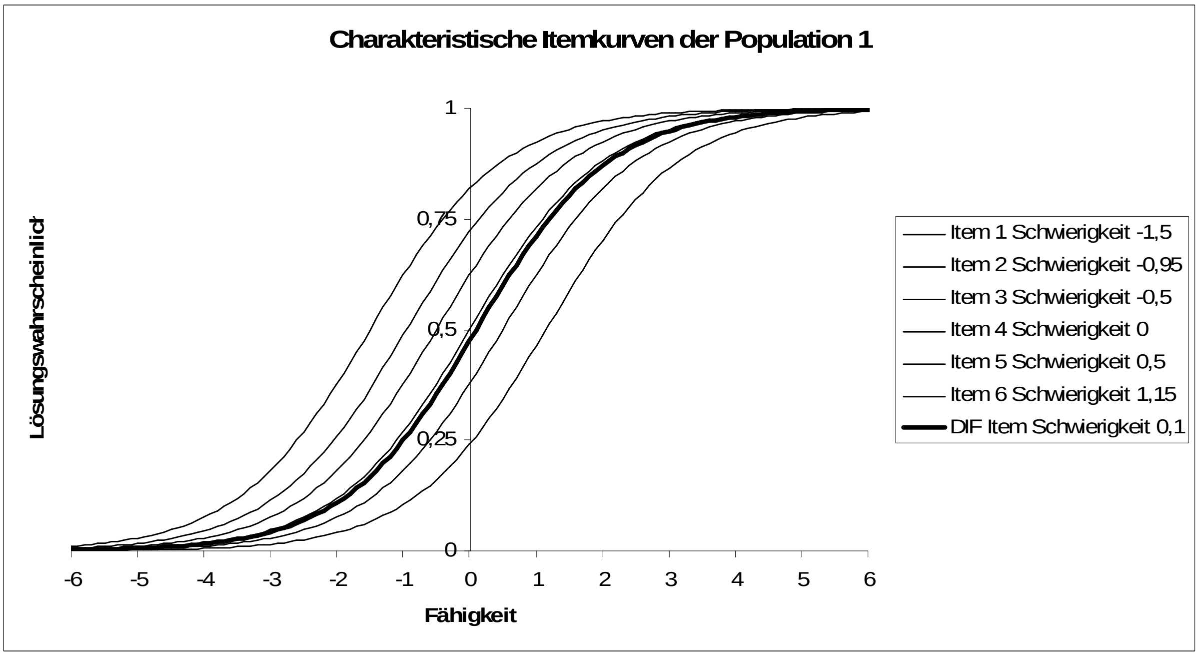


Abbildung 36: Itemkurven der Population 1

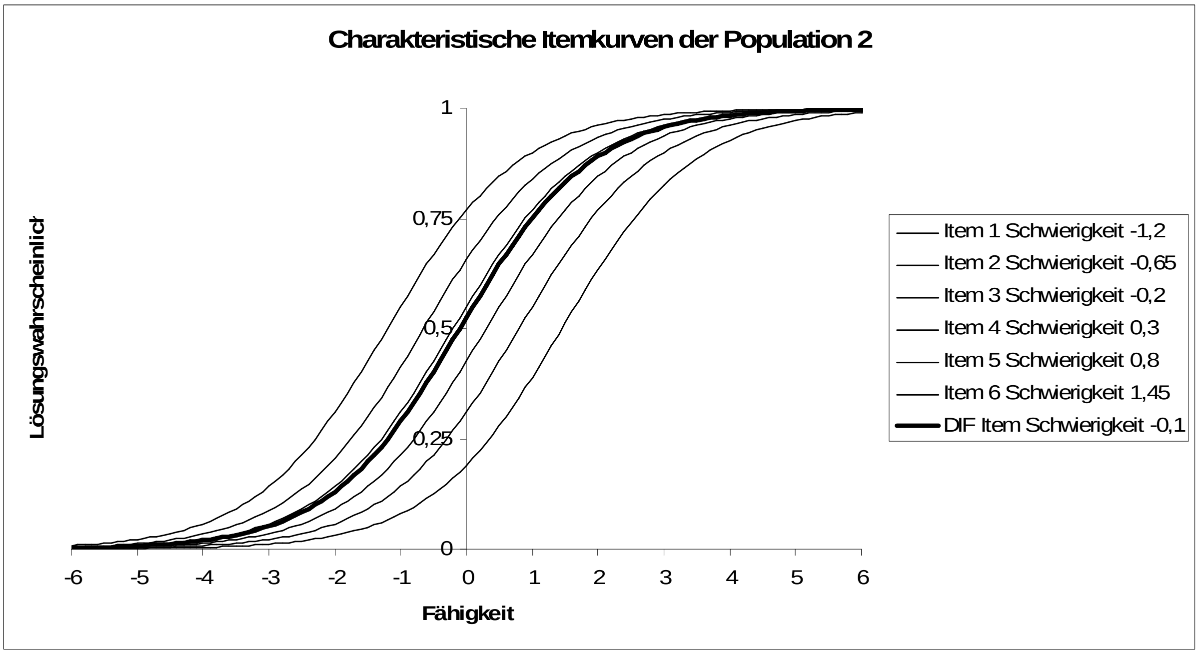


Abbildung 37: Itemkurven der Population 2

Einer durchschnittlichen Person aus Population 2 fallen also die ersten sechs Items schwerer aber das letzte Item leichter als einer durchschnittlichen Person aus der Population 1. Ein solches Item, wie das letzte Item, das sich substantiell vom Verhalten der restlichen Items unterscheidet, funktioniert differentiell.

Es ist nicht einfach solche Items zu identifizieren. Auch stellt sich die Frage nach der Definition von substantiell unterschiedlichem Verhalten. In dieser Arbeit wir die

Vorgehensweise gewählt, wie sie schon in vielen Artikeln zu den Ergebnissen der PISA-Studien publiziert wurde. Sie ist speziell auf die Arbeit mit dem Rasch-Modell und mit sehr großen Stichproben abgestimmt. Bei sehr großen Stichproben ergibt sich das Phänomen, dass selbst sehr kleine Unterschiede in den Itemschwierigkeiten zweier Populationen signifikant werden. Aus diesem Grund wird bei solchen Analysen eine minimale Abweichung von 0,5 Punkten gefordert (siehe Draba; 1977; Knoche & Lind, 2004b; Wang, 2000).
Im obigen Beispiel kann dies wie folgt graphisch dargestellt werden.

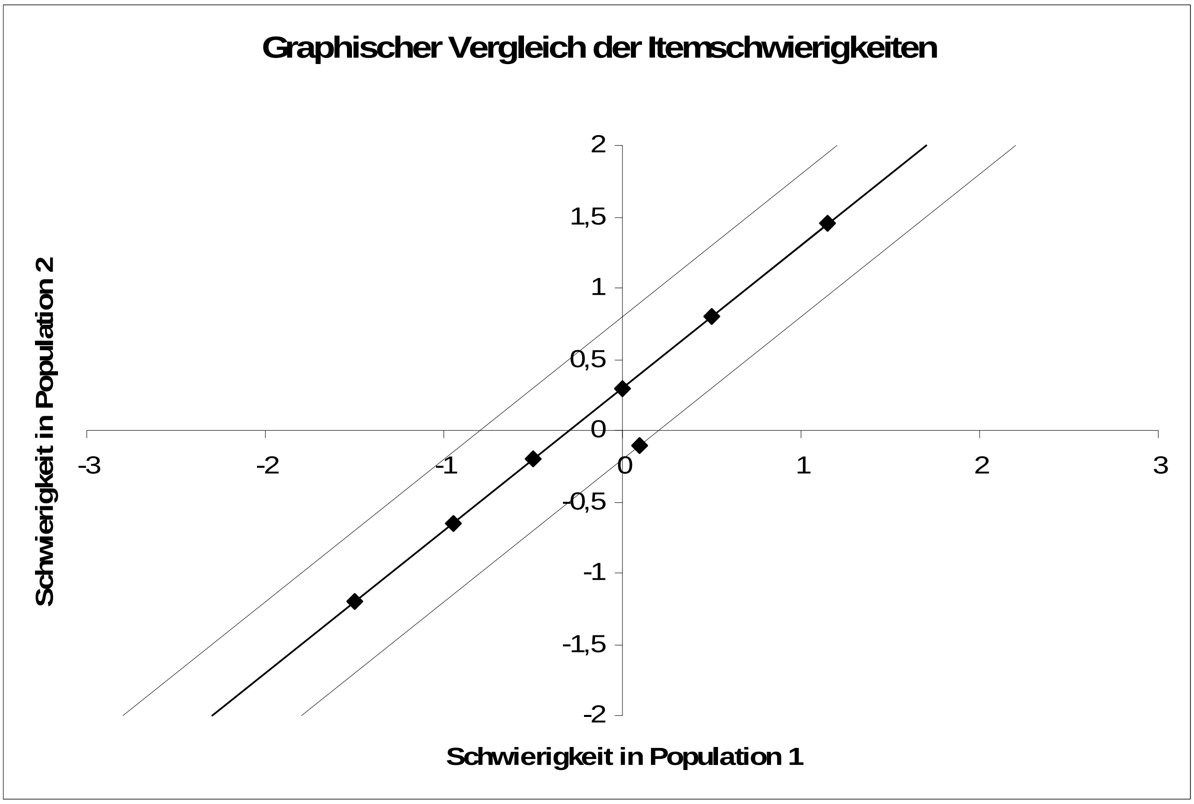


Abbildung 38: Graphischer Vergleich der Itemschwierigkeiten - Beispiel

Trägt man die in den zwei Teilpopulationen geschätzten Itemschwierigkeiten in einem Koordinatensystem gegeneinander auf, so bilden die Punkte im Idealfall eine Gerade, deren y-Achsenabschnitt den Fähigkeitsunterschied der beiden Populationen angibt (siehe Abbildung 38). In der Praxis handelt es sich üblicherweise um eine um diese Gerade gebündelte Punktewolke.
Differentiell funktionierende Items befinden sich außerhalb eines Bereichs von 0,5 Punkten, in dem Abweichungen nicht als substantiell angesehen werden. Im Beispiel liegt das konstruierte Item auf dieser Grenze.

In dieser Arbeit wird zum Auffinden der zwischen Deutschland und Frankreich differentiell funktionierenden Items mit dem Programm ConQuest gearbeitet. Zur Skalierung der Items der Subskala Veränderung und Beziehung werden die Lösungen der Schüler herangezogen, die in Deutschland und Frankreich an der internationalen PISA 2003 Erhebung teilgenommen haben. Mit der in Abbildung 39 gegebenen Syntax werden Itemschwierigkeiten, der globale Schwierigkeitsunterschied und DIF-Werte für alle Items ausgegeben. Nähere Erklärungen zu der hier genutzten Vorgehensweise, zu dem Programm und zur Syntax können beispielsweise in Knoche & Lind (2004b) oder Wu, Adams & Wilson (1998) nachgelesen werden.

```
datafile Pisa2003DIFSubskala.dat;
format country 1-3 responses 14-36;
export logfile >> Pisa2003DIFSubskala.log
labels << Pisa2003DIFSubskala.nam;
codes 0,1,2,3;
set warnings=no,update=yes,iterlimit=100;
model item+country+item*country;
estimate !method=quadrature,nodes=30,iter=1000,conv=0.0001,stderr=full;
show >> Pisa2003DIFSubskala.shw;
quit;
```

Abbildung 39: ConQuest Command File zur Analyse von DIF

Auf weitere Arten von DIF-Analysen, etwa zur Arbeit mit dem mehrparametrigen Raschmodell soll hier nicht eingegangen werden. Dazu sei auf die Literatur verwiesen, in der auch weiter Methoden ohne Nutzung des Raschmodells und die historische Entwicklung erläutert werden (siehe etwa Angoff, 1993; Scheunemann & Bleistein 1999; Zumbo, 1999) .

8.1.4.2 Ergebnisse der DIF-Analysen

In Abbildung 40 sind die Ergebnisse der DIF-Analysen in analoger Weise zu Abbildung 38 dargestellt.

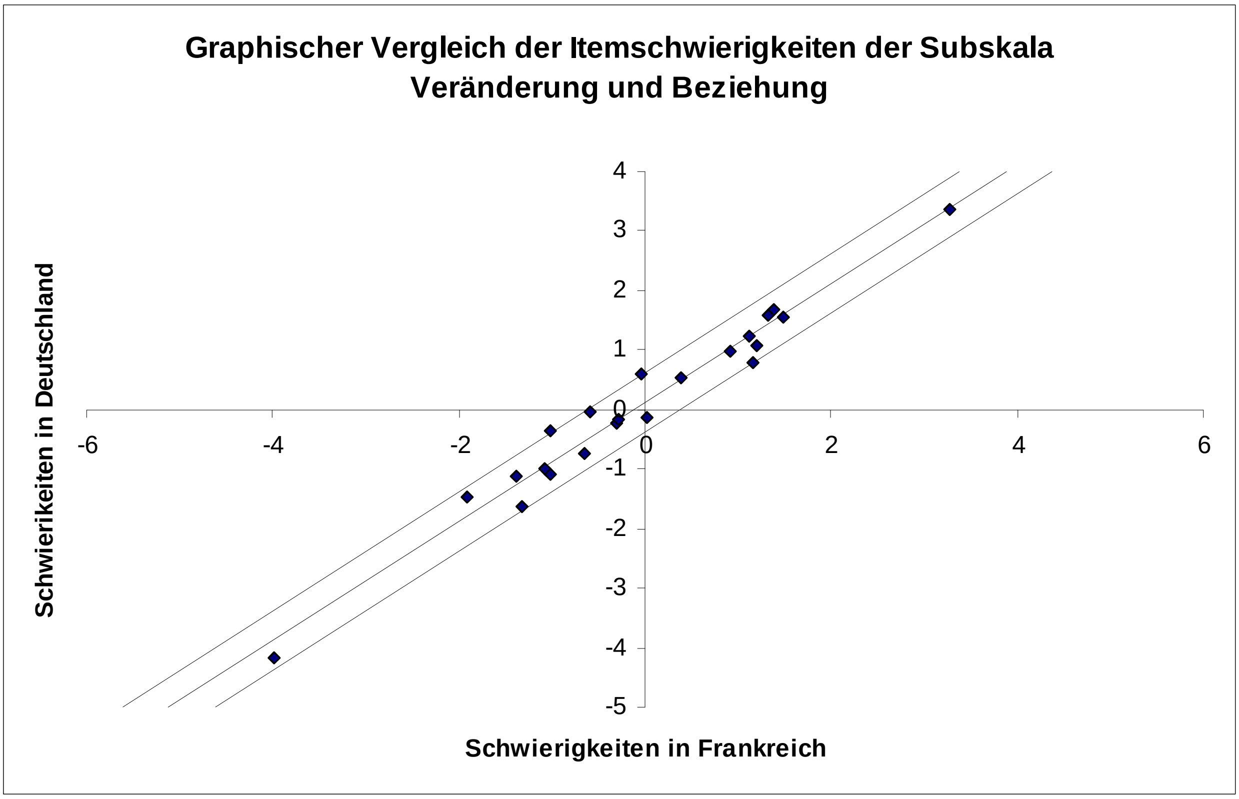


Abbildung 40: Graphischer Vergleich der Itemschwierigkeiten

Die Punktewolke gruppiert sich eng um eine Gerade mit positivem y-Achsenabschnitt, da die französischen Schüler in der Subskala *Veränderung und Beziehung* besser abschneiden als die deutschen Schüler (siehe Abschnitt 8.1.3). Kein Item zeigt sehr große Effekte und hat eine deutlich größere Abweichung als 0,5 Punkte. Dies zeigt, dass keine Aufgabe durch ihren Inhalt oder durch ihre Formulierung die Schüler von einem der beiden Länder stark bevorzugt.

Dennoch sind bei zwei Items substantielle Effekte zu finden und vier weitere Items setzen sich bei der Effektstärke von den anderen Items ab. In Abbildung 41 ist die Effektstärke von jedem Item graphisch dargestellt, wobei sie aufsteigend sortiert wurden. Ein negativer Effekt deutet hier auf eine Stärke von Frankreich hin, während ein Item mit positivem Effekt den deutschen Schülern verhältnismäßig leicht fällt.

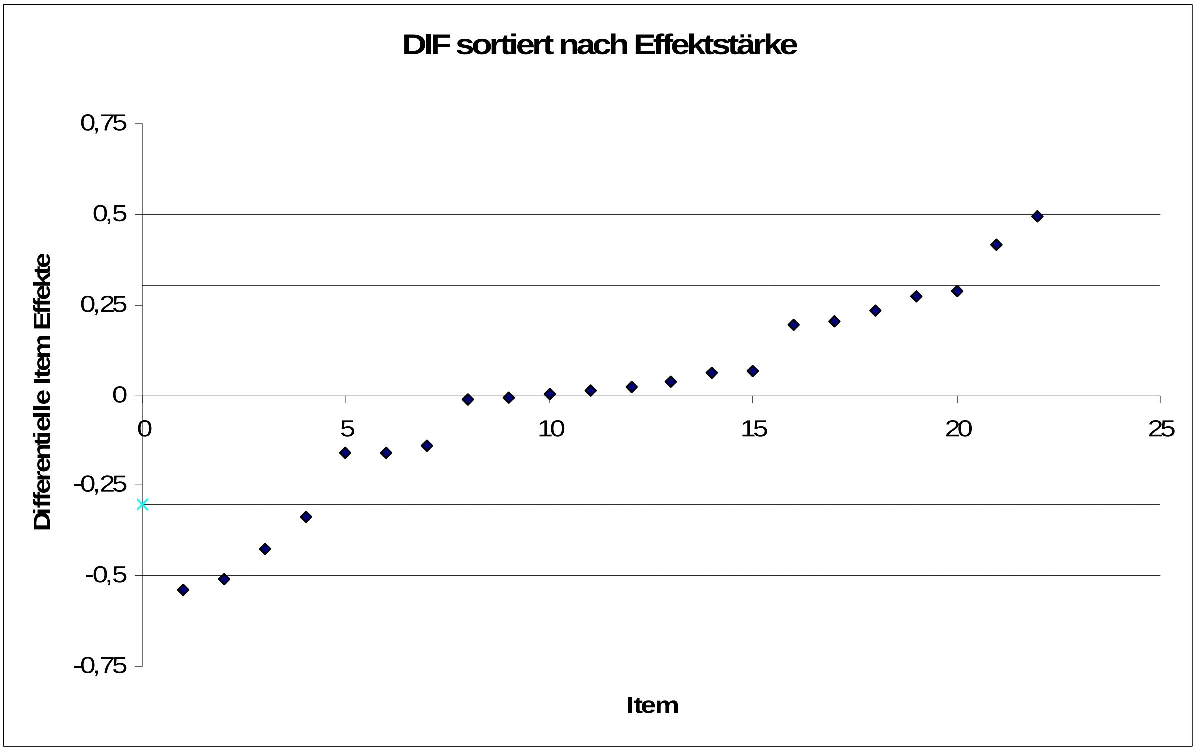


Abbildung 41: DIF nach Effektstärke

Zwei Items haben einen Effekt, der größer als 0,5 Punkte ist. Beide deuten auf spezifische Stärken der französischen Schüler hin.
Auffallend ist außerdem, dass sich vier weitere Items von der restlichen Punktewolke absetzen. Deren Effektstärke ist größer als 0,3 Punkte aber kleiner als 0,5 Punkte. Zwei davon fallen den deutschen Schülern verhältnismäßig etwas leichter als den französischen Schülern, bei den beiden anderen ist das Gegenteil der Fall.

Eine inhaltliche Betrachtung der zwei Items mit substantiellem Effekt und der vier Items, die sie von den Restlichen absetzen, zeigt, dass die Abweichungen mir Hilfe von curricularen Besonderheiten erklärt werden können.

Bei der Bearbeitung des Items mit dem größten Effekt muss eine einfache lineare Zuordnung aus dem Text entnommen werden und anschließend ein Wert eingesetzt werden. Eine mögliche Erklärung für die spezifische Stärke der französischen Schüler ist, dass dieses Item ohne tiefer gehendes Verständnis der Situation gelöst werden kann, indem der Kontext ignoriert und nur die Rechenanweisung direkt ausgeführt wird. Diese Arbeitsweise ist oft in französischen Schulbüchern zu finden, wo mit Lösungsformeln und Standardaufgaben

gearbeitet wird (siehe Kapitel 7). Diese Erklärung wird auch dadurch gestützt, dass das folgende Item, das zu derselben Aufgabe gehört, keinen Effekt aufweist. Hier soll die algebraische Darstellung der linearen Funktion angegeben werden, die im auffälligen Item für einen konkreten Fall ausgewertet wird.
Beim zweiten Item, das bei der DIF-Analyse einen substantiellen Effekt hat, muss qualitativ mit einem Graph gearbeitet werden. Wichtige Punkte und Abschnitte einer graphischen Darstellung sollen erkannt werden und in ein anderes Koordinatensystem übertragen werden. Schüler aus Frankreich, die die 2^{de} besuchen, können nun die Fähigkeiten anwenden, die sie bei der Arbeit mit Variationstabellen gelernt haben (siehe Kapitel 7). Deutsche Schüler haben diese Art von Aufgaben deutlich weniger gesehen. Mit diesem unterschiedlichen curricularen Hintergrund kann der Effekt erklärt werden.

Bei den beiden anderen Items, die französischen Schülern verhältnismäßig leichter fallen als den deutschen, handelt es sich um Items, in denen auch Veränderungen untersucht werden sollen. Dies deckt sich mit der Feststellung, dass die Kovariations-Grundvorstellung in Frankreich, insbesondere in der 2^{de} in den Aufgaben intensiv genutzt wird.
Allerdings befindet sich unter den beiden Items, deren Effektstärke mehr als 0,3 Punkte zu Gunsten der deutschen Schüler beträgt, ein Item, für dessen Bearbeitung die Kovariations-Grundvorstellung benötigt wird. Dabei handelt es sich um ein Item, in dem eine Realsituation zu einem Graphen unter Beachtung von qualitativen Änderungsverhalten zugeordnet werden soll. Solche Aufgaben sind in französischen Lehrbüchern nicht gängig, da dort Variationsüberlungen mit Graphen meist rein innermathematisch stattfinden.
Bei der zweiten Aufgabe mit leichtem Effekt zu Gunsten der deutschen Schüler soll eine gegebene algebraische Darstellung mit Hilfe von Daten, die aus einer Tabelle entnommen werden müssen, ausgewertet werden. Die zugrunde liegende funktionale Abhängigkeit hängt von vier Variablen ab. Solche Abhängigkeiten kommen in französischen Lehrbüchern nicht vor, so dass auch hier zur Erklärung auf die in Frankreich üblichen Musteraufgaben verwiesen werden kann, deren Abwesenheit die Schüler vor besondere Schwierigkeiten stellt.

Bemerkenswert ist auch folgende Feststellung: Eine Betrachtung der Funktionstypen ergibt keinen klaren Vorteil für die Schüler eines der beiden Länder. Insbesondere haben zugrunde liegende proportionale und lineare Abhängigkeiten scheinbar keinen großen positiven Effekt auf die Leistungen der französischen Schüler, obwohl diese sie viel intensiver studiert haben als dies in Deutschland üblich ist.

Einige der Erwartungen bezüglich der Schülerleistungen, die nach den Vergleichen der Curricula von Bayern und Frankreich geäußert wurden, konnten mit Hilfe dieser vergleichenden Analyse bestätigt werden. Die Auswirkungen mancher Unterschiede im Aufbau der Curricula konnten allerdings nicht beobachtet werden.
Im nächsten Abschnitt wird die Entwicklung der Leistung der bayerischen Schüler untersucht und der Einfluss der unterschiedlichen Lehrpläne der drei Schularten dargestellt.

8.2 PALMA

Mit den soeben betrachteten Daten von PISA 2003 kann ein Vergleich der Leistungen der 15 jährigen Schüler von Deutschland und Frankreich vorgenommen werden. Eine Betrachtung der Entwicklung der Leistungsfähigkeit im Bereich funktionalen Denkens in der Sekundarstufe I ist durch den querschnittlichen Aufbau von PISA nicht möglich. Allerdings kann eine detaillierte Analyse dieser Entwicklung mit Hilfe der PALMA-Studie durchgeführt werden, die die Leistungen in Mathematik einer für Bayern repräsentative Stichprobe seit fünf Jahren im Jahresrhythmus erhebt. In diesem Abschnitt wird der Aufbau der Studie vorgestellt und anschließend deren Ergebnisse im Bereich funktionalen Denkens präsentiert.

8.2.1 Ziele, Aufbau und Methoden von PALMA

PALMA steht für *Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik* und bezeichnet eine Längsschnittstudie die im Bundesland Bayern durchgeführt wird. Sie wird von der Deutschen Forschungsgemeinschaft finanziert. Hauptziel der Studie ist es durch Beobachtung der Leistungsentwicklung in der gesamten Sekundarstufe I Gründe für die in den internationalen Vergleichsstudien wie TIMSS und PISA festgestellten Leistungsdefizite zu finden und Handlungsmöglichkeiten aufzuzeigen. Dazu werden Entwicklungsverläufe der Kompetenzen in Mathematik, Mathematikemotionen oder andere Leistungsvoraussetzungen der Schüler sowie und Kontextvariablen zum Unterricht, zur Schulklasse und zum Elternhaus erhoben.

Im Jahr 2002 wurde mit der Datenerhebung einer für ihren Jahrgang repräsentativen Stichprobe von Schülern aus den fünften Klassen Bayerns begonnen. In der zweiten Hälfte des Schuljahres wurden daraufhin im Jahresrhythmus Erhebungen durchgeführt (siehe Abbildung 42). 1318 Schüler haben bei allen bisherigen Messzeitpunkten von der 5. bis zur 9. Klasse am Mathematiktest teilgenommen. Bei der Erhebung im Jahr 2006 wurde mit Hilfe von gemeinsamen Aufgabenblocks eine Verbindung zur deutschen PISA 2006 Studie implementiert, sodass die jeweiligen Gesamtskalen miteinander verbunden werden können. Mit der rechnerischen Durchführung der Verbindung kann aus organisatorischen Gründen allerdings nicht vor dem Frühjahr 2008 begonnen werden. Somit können hier noch keine Ergebnisse dazu gegeben werden.

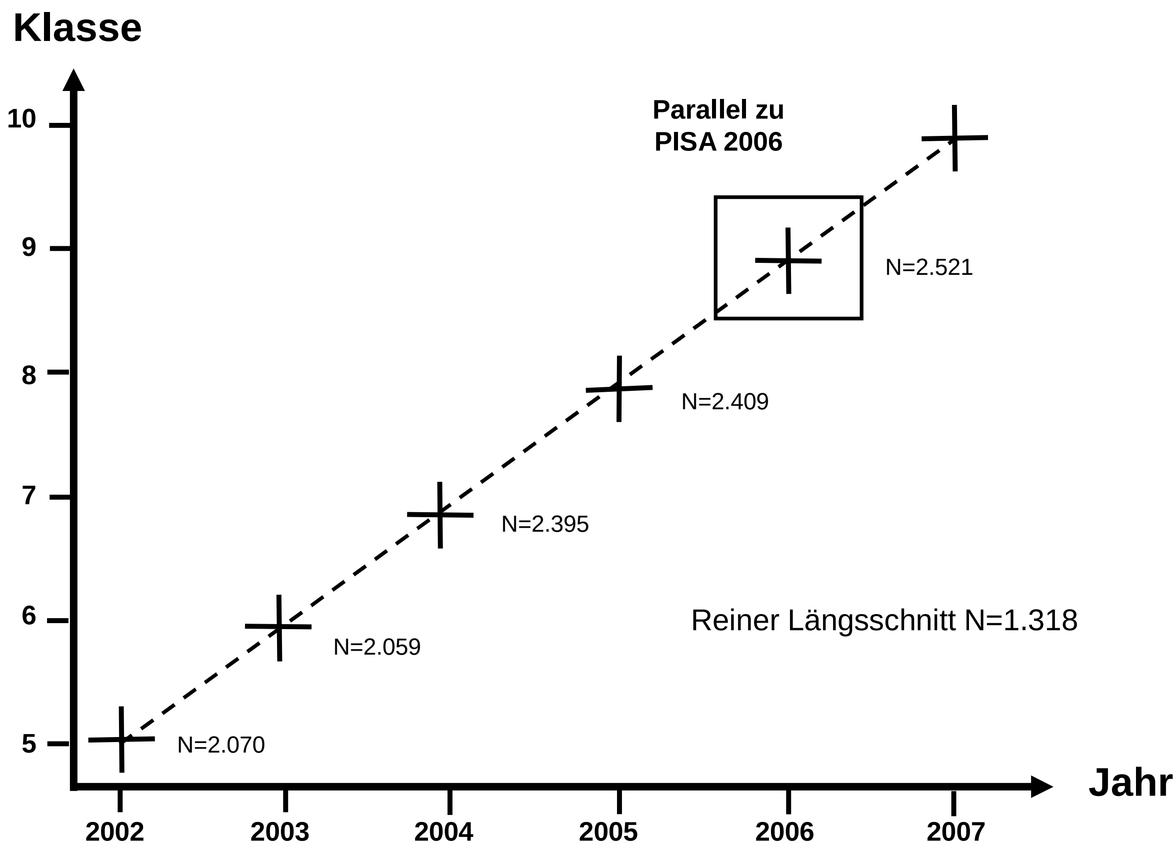


Abbildung 42: Längsschnittaufbau von PALMA

Der Mathematiktest von PALMA nutzt Erhebung der Kompetenzen in enger Anlehnung an PISA das Konzept von *mathematical literacy* und legt damit großen Wert auf die Anwendung von Mathematik in Realsituationen (siehe Abschnitt 8.1.1).

Details zum Aufbau der Studie, zu Ergebnissen der Gesamtskala und zu Analysen erhobenen Emotions- und Kontextvariablen können etwa in Hofe et al. (2002), Hofe et al. (2005a), Hofe et al. (2005b) oder Pekrun et al. (2006) nachgelesen werden.

8.2.2 Die Subskala *Funktionales Denken*

Der PALMA Mathematiktest wird ebenso wie die PISA Erhebungen mit dem eindimensionalen Raschmodell ausgewertet und es werden Subskalen gebildet. Alle Skalen werden bis zur Anbindung die deutsche PISA2006 Skala so normiert, dass die Schülerleistungen in der 9. Klasse einen Mittelwert von 1000 und eine Standardabweichung von 100 aufweisen.

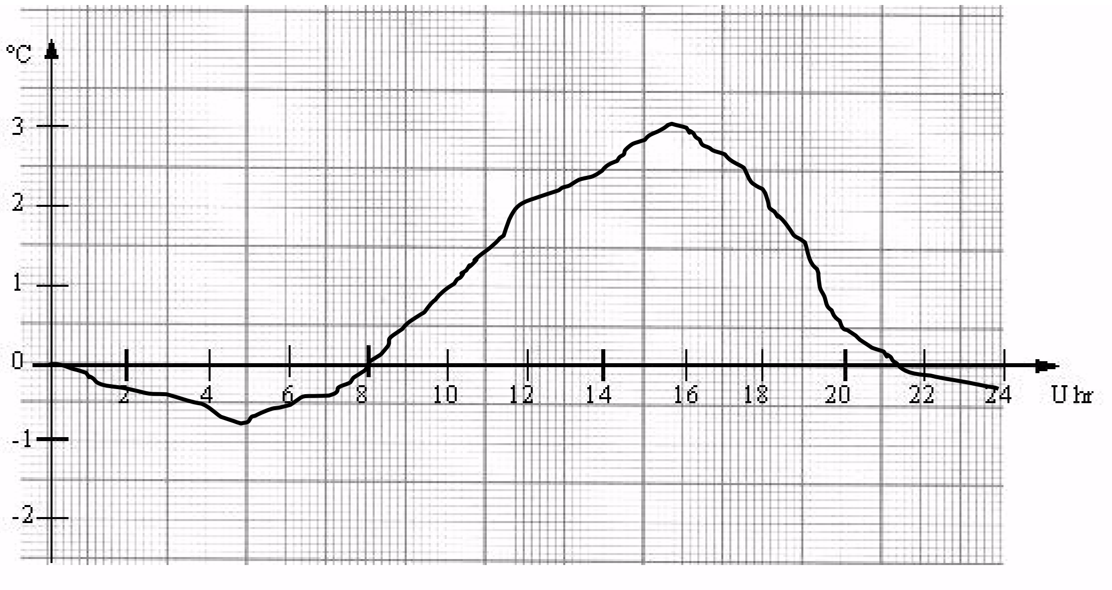
In diesem Abschnitt werden die Längsschnittergebnisse der bayerischen Schüler auf einer Subskala zu funktionalem Denken betrachtet. Durch die breit angelegte Stichprobe können auch Aussagen über die einzelnen Schularten gemacht werden und somit eine direkte Verbindung zu den Ergebnissen aus den Kapiteln 6 und 7 gezogen werden.

Die Subskala *Funktionales Denken* besteht aus den 177 PALMA-Items, die für die Ausbildung der funktionalen Denkweise von zentraler Bedeutung sind.

In den unteren Klassenstufen handelt es sich um Aufgaben, bei denen der Umgang mit Darstellungen aus den verschiedenen Darstellungsregistern im Mittelpunkt steht (Abbildung 43 und Abbildung 44).

Aufgabe: Passau

An einem Tag im Januar wurde in Passau die Lufttemperatur gemessen.
Folgende Abbildung zeigt den Temperaturverlauf des Tages:



a) Welche Temperatur herrschte um 14 Uhr?
b) Um wie viel Uhr war es am kältesten?
c) Um wie viel Uhr betrug die Temperatur 0°C?

Abbildung 43: Aufgabe Passau

Aufgabe: Währung

Folgende Währungstabelle hilft beim Umrechnen von US-Dollar in €.

US-Dollar	€
0,10	0,13
1,00	1,30
2,00	2,60
5,00	6,50
10,00	13,00
20,00	26,00
50,00	65,00

Beantworte mit Hilfe der Tabelle folgende Fragen:

a) Wie viel US-Dollar erhält man für 26,00 €?
b) Wie viel € erhält man für 5,00 US-Dollar?
c) Wie viel € erhält man für 7,00 US-Dollar?

Abbildung 44: Aufgabe Währung

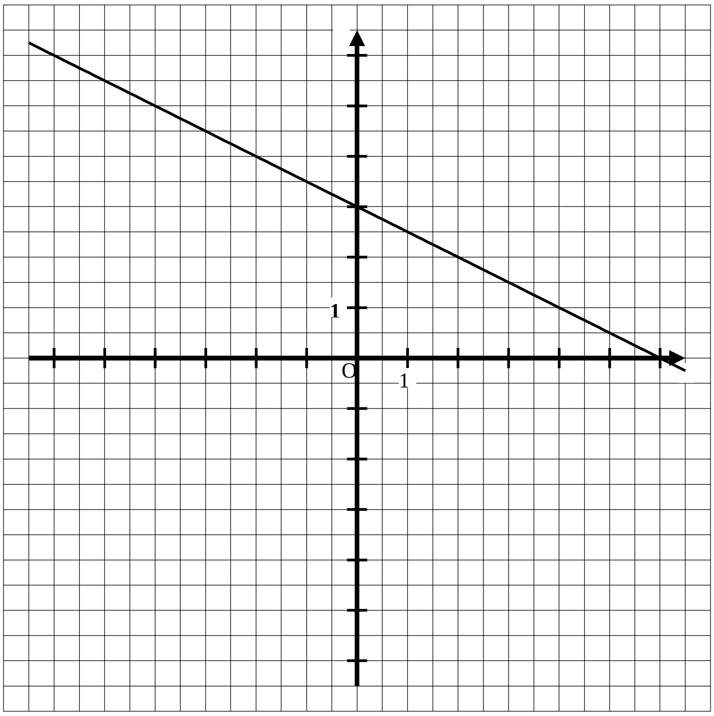
In anderen Aufgaben sollen fehlende Werte in proportionalen Situationen ergänzt werden und auch umgekehrt proportionale Situationen werden betrachtet.

Die Testhefte von späteren Messzeitpunkten enthalten zusätzlich Aufgaben, die sich auf Übersetzungen zwischen den verschiedenen innermathematischen Darstellungen von Funktionen beziehen (Abbildung 45). Außerdem soll mit funktionalen Situationen in Realkontexten gearbeitet werden (Abbildung 46).

Weitere Aufgaben aus der Subskala *Funktionales Denken* sind in Kapitel 9 dargestellt. Dort werden Items aus einer parallel durchgeführten Interviewstudie dargestellt, die auf die Items des schriftlichen Tests zurückgreift.

Aufgabe: Funktionsgraph C

Gib die Gleichung für die eingezeichnete Gerade an.



Gleichung:

y = ___________________:

Abbildung 45: Aufgabe Funktionsgraph C

Aufgabe: Goethestraße A

Einige Freunde entschließen sich, gemeinsam ein großes Haus mit vielen Wohnungen zu kaufen. Die Wohnungen sind unterschiedlich groß. Jeder soll einen Anteil bezahlen, der proportional zur Größe seiner Wohnung ist.
Kreuze an, welche der Aussagen zutreffen:

	richtig	falsch	weiß nicht
Wird der Gesamtpreis des Hauses um 10% heruntergehandelt, so zahlt jeder 10% weniger.	○	○	○
Wenn man die Flächen von Wohnung A und Wohnung B und den Preis von Wohnung A kennt, kann man auch den Preis von Wohnung B berechnen.	○	○	○
Die Personen in der größten Wohnung zahlen mehr Geld pro Quadratmeter als die in der kleinsten Wohnung.	○	○	○
Wenn man den Preis für das ganze Hauses kennt und weiß, wie viel jeder Eigentümer zahlt, kann man die Fläche jeder einzelnen Wohnung berechnen.	○	○	○

Abbildung 46: Aufgabe Goethestraße A

Durch diese vier Aufgabenbeispiele wird deutlich, dass die Subskala so konstruiert ist, dass mit ihr die Entwicklung der funktionalen Denkweise der bayerischen Schüler in der Sekundarstufe I erfasst und dargestellt werden kann. Die Ergebnisse werden im nächsten Abschnitt präsentiert.

8.2.3 Ergebnisse der Subskala *Funktionales Denken*

In Abbildung 47 ist die Entwicklung der Leistungen der bayerischen Schüler im gesamten PALMA Mathematiktest von der 5. bis zur 9. Klasse nach Schularten dargestellt. Die Skala beruht auf den Werten der der 1318 Schüler, die in jedem Jahr am der schriftlichen PALMA Erhebung teilgenommen haben. Von diesen 1318 Schüler besuchen 536 ein Gymnasium, 488 eine Realschule und 294 eine Hauptschule. Wie alle anderen Skalen von PALMA ist auch die Gesamtskala hier so normiert, dass der Mittelwert aller erhobenen Schülerleistungen der 9 Klasse (also aller 2521 teilnehmenden Schüler) bei 1000 Punkten liegt und die Standardabweichung dort 100 Punkte beträgt. Der Mittelwert und die Standardabweichung aller Längsschnittschüler in der 9. Klasse unterschieden sich davon nur wenig (1008, 98). Alle drei Kurven steigen durchgehend an. Der Anstieg ist in allen Schularten von der 5. zur 6. Klasse am steilsten. Am Gymnasium ist außerdem von der 7. zur 8. Klasse eine stark ausgeprägte Zunahme. Von der 6. zur 7. Klasse ist in allen Schularten ein unterschiedlich deutlich ausgeprägtes Abflachen zu erkennen.

Es fällt auf, dass die durchschnittliche Leistung der Hauptschüler weit hinter den durchschnittlichen Leistungen der Schüler der beiden anderen Schularten zurückbleibt. Die Leistungen der Realschüler und der Gymnasiasten liegen im Gegensatz dazu relativ nah zusammen.

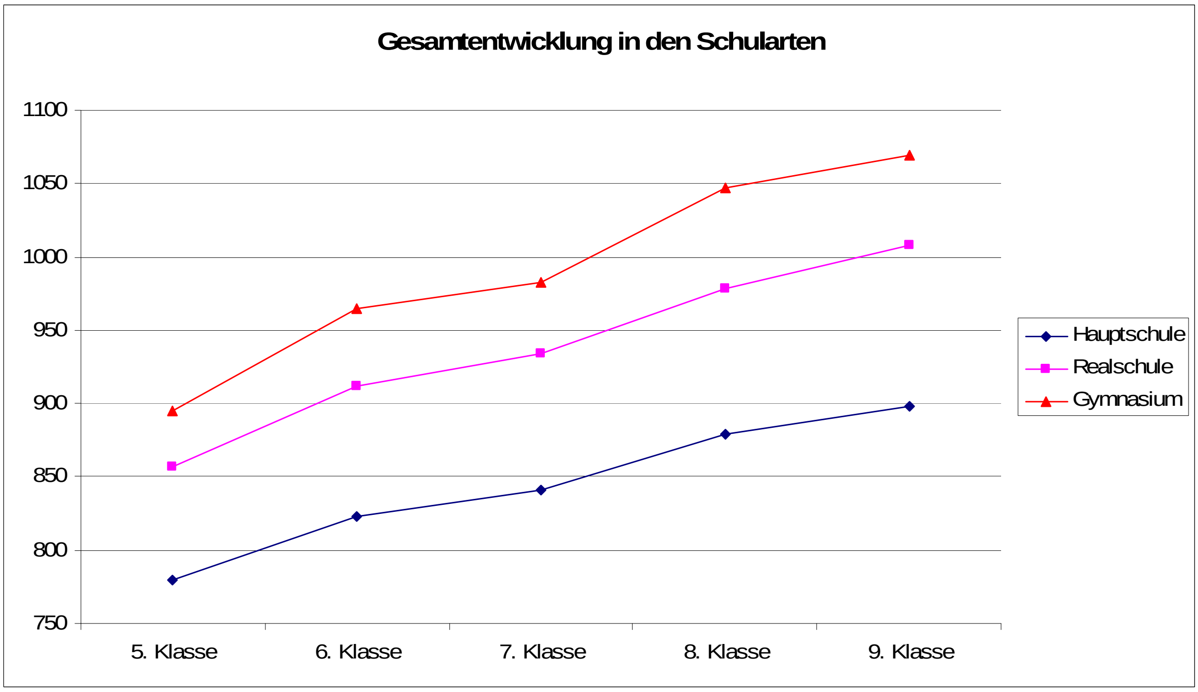


Abbildung 47: Gesamtentwicklung

Abbildung 48 zeigt die Entwicklung der durchschnittlichen Leistung in der Subskala *Funktionales Denken*. Der Mittelwert und die Standardabweichung der Längsschnittschüler betragen in der 9. Klasse 1009 bzw. 99 Punkte. Die Standardabweichung für alle Schularten und Messzeitpunkte können Abbildung 49 entnommen werden.

Es zeigen sich einige Unterschiede zur Gesamtskala. Nach einem starken Anstieg flacht die Kurve von der 6. zur 7. Klasse in allen Schularten sehr deutlich ab. Zwischen der 7. und der 8.

Klasse nimmt die Steigung wieder zu, wobei diese Zunahme am Gymnasium besonders stark ausgeprägt ist. Zwischen der 8. und der 9. Klasse zeigt sich ein uneinheitliches Verhalten in den Schularten. Einem erneuten starken Abflachen im Gymnasium steht ein ungebremster Anstieg in der Realschule gegenüber.

Auch in dieser Subskala wird zwischen den Schularten ein großer Unterschied in den durchschnittlichen Leistungen deutlich. Die Leistungen der Hauptschüler befinden sich in allen Schuljahren sehr deutlich unterhalb der Leistungen der Realschüler und der Gymnasiasten. Letztere liegen relativ nahe zusammen.

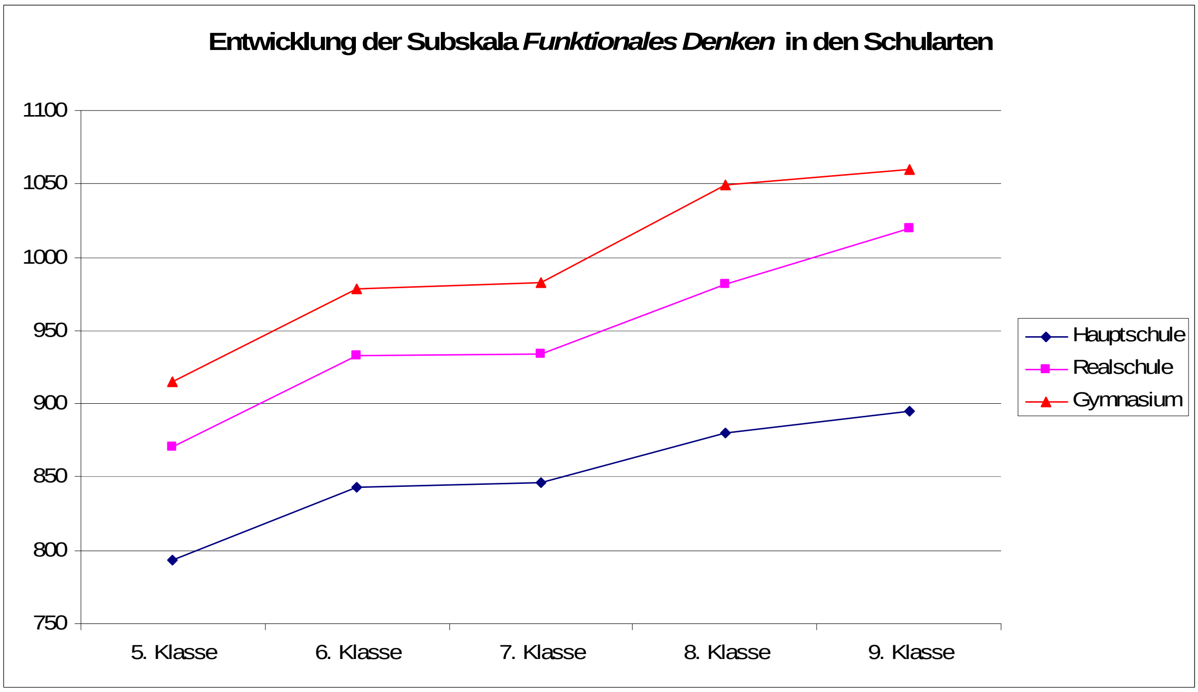


Abbildung 48: Entwicklung der Subskala *Funktionales Denken*

Die Analysen der bayerischen Lehrpläne und Schulbücher (siehe Kapitel 6 und 7) liefern Erklärungsansätze für die in Abbildung 48 dargestellte Entwicklung. Da sich die Testfenster am Ende der jeweiligen Schuljahre befanden, werden zur Erklärung der Zuwächse zwischen zwei Klassen die Inhalte der oberen Klassenstufe betrachtet. Auf Abweichungen, die durch spät in den Schulbüchern auftauchende Inhalte entstehen können wird allerdings hingewiesen.

In allen Schularten lassen sich in der 5. Klasse nur wenige Inhalte zur funktionalen Denkweise finden. In der 6. Klasse wird in der Realschule und am Gymnasium erstmals mit funktionalen Situationen gearbeitet und, wie auch an der Hauptschule, der Umgang mit den verschiedenen Darstellungsregistern intensiviert.
Der relativ steile Anstieg zeigt, dass die Schüler wesentliche Fortschritte beim Umgang mit den Darstellungen und mit proportionalen Situationen gemacht haben. Besonders interessant ist, dass der Anstieg in der Hauptschule nicht wesentlich weniger steil ausfällt als bei den beiden anderen Schularten, obwohl die Proportionalität dort noch nicht im Lehrplan steht.

Die Lehrplan- und Schulbuchanalyse zeigen, dass die Inhalte im Bereich funktionalen Denkens in der 7. Klasse des Gymnasiums einseitiger ausgeprägt sind, als in der 6. Klasse. Die Analysen haben außerdem gezeigt, dass auch in 7. Klasse der Realschule kaum neue Inhalte gesehen werden und im Wesentlichen nur die Kenntnisse des Vorjahres gefestigt

werden sollen. Beides kann eine Erklärung für die Stagnation der Leistungen der Gymnasial- und Realschulschüler sein.
Die Stagnation der Leistungen der Hauptschüler steht in scheinbarem Widerspruch zu den in dieser Jahrgangsstufe neu behandelten Inhalten, da in der 7. Klasse erstmals mit Proportionalitäten gearbeitet wird. Mögliche Ursachen hierfür sind, dass die zu erlernenden Inhalte von den Schülern nicht angenommen werden oder im Schulunterricht vor dem Testzeitpunkt nicht im umgesetzt werden können (Das Kapitel Zuordnungen ist das letzte Kapitel des hier untersuchten Schulbuches der 8. Klasse). Der Lehrplan der 8. Klasse sieht eine Wiederholung der Proportionalität vor, sodass Schüler, die diese in der 7. Klasse noch nicht beherrschen, diese Defizite in der folgenden Jahrgangsstufe ausgleichen können. Sicherlich müssen aber auch andere Ursachen, wie Beispielsweise das Einsetzen der Pubertät, für die Erklärung der Stagnation in allen Schularten herangezogen werden. Dafür bedarf es jedoch weitere Detailanalysen, die hier nicht durchgeführt werden können. Dennoch bleibt festzuhalten, dass das erwartete Abflachen der Leistungszuwächse im Gymnasium und in der Realschule tatsächlich empirisch nachgewiesen werden kann.

Zwischen der 7. und der 8. Klasse zeigt sich ein in allen Schularten unterschiedlich stark ausgeprägtes Wachstum der durchschnittlichen Schülerleistung. Der Zuwachs ist dabei am Gymnasium am stärksten und an der Hauptschule am geringsten.
Im Gymnasium wird der Funktionsbegriff eingeführt und mit linearen und umgekehrt proportionalen Funktionen gearbeitet. Die Schüler beschäftigen sich also intensiv mit funktionalen Zusammenhängen und haben dadurch die Möglichkeit ihre funktionale Denkweise weiter auszubauen.
Dasselbe gilt für die Hauptschule. Dort werden proportionale Zusammenhänge wiederholt und jetzt auch mit ihrer graphischen Darstellung verbunden. Außerdem werden lineare und umgekehrt proportionale Funktionen betrachtet. In diesen beiden Schultypen findet eine intensive Auseinandersetzung mit funktionalen Abhängigkeiten statt und erklärt damit die substantiellen Fortschritte der Schüler im Bereich der funktionalen Denkweise.
In der Realschule ist ein differenzierteres Bild zu zeichnen. Im mathematisch-technischen Zweig lernen die Schüler die mengentheoretische Funktionsdefinition kennen und beschäftigen sich intensiv mit verschiednen Funktionstypen und insbesondere mit der Arbeit im algebraischen Register. Dadurch sind Fortschritte zu erwarten.
In den beiden anderen Zweigen sind lediglich umfangreiche, vorbereitende Arbeiten im algebraischen Register vorgesehen, ohne dass Funktionen oder spezielle funktionale Abhängigkeiten betrachtet werden sollen. Dabei werden unter anderem Terme ausgewertet, Realsituationen mit dem algebraischen Register verbunden und graphische und numerische Wertetabellen erstellt. Vor diesem Hintergrund erscheint die positive Gesamtentwicklung der Realschüler in Einklang mit den oben durchgeführten Analysen.

Von der 8. zur 9. Klasse zeigt sich ein Abflachen der Entwicklung in der Hauptschule und am Gymnasium, während die Zuwächse in der Realschule hoch bleiben.
In der Hauptschule ist in der 9. Klasse ein Abflachen der Entwicklung erwartet worden. Die Schüler lernen nur wenig neue Inhalte und beschäftigen sich nicht mehr so stark mit funktionalen Situationen wie in den Vorjahren.
Auch beim Abflachen der Gymnasialkurve ist eine Ursache in dem geringen Platz zu sehen,

den die Untersuchung funktionaler Zusammenhänge in dieser Jahrgangsstufe einnimmt. Aus diesem Grund konnte nach der Analyse der Schulbücher ein gewisser Rückgang der Steigung erwartet werden. Dass dieser Rückgang jedoch so stark ausfällt deutet auf das Mitwirken weiterer wichtiger Faktoren hin. Einer dieser Faktoren ist sicherlich, dass in der 9. Klasse des Gymnasiums Inhalte zu Funktionen erlernt werden, die kein zentraler Bestandteil der PALMA-Erhebung der 9. Klasse sind (etwa die Umkehrung von Funktionen). Die dort gestellten Aufgaben beziehen sich im Bereich der funktionalen Denkweise zu großem Teil auf Inhalte, die bereits durch den Lehrplan der 8. Klasse des Gymnasiums abgedeckt werden.
Im Lehrplan der 9. Klasse der Realschule sind für den mathematisch-technischen Zweig ist im Gegensatz zur 8. Klasse ein leichter Rückgang der Inhalte zu funktionalem Denken zu beobachten. Dennoch werden auch dort mit quadratischen Funktionen neue Inhalte gesehen und mit linearen und quadratischen Gleichungssystemen ein Themengebiet intensiv bearbeitet, dessen Beherrschung eine funktionale Denkweise voraussetzt. In den beiden anderen Zweigen werden Funktionen eingeführt und es wird erstmals systematisch mit bestimmten funktionalen Zusammenhängen gearbeitet. Dies erklärt die weiterhin starke Zunahme der Leistungen der bayerischen Realschüler.

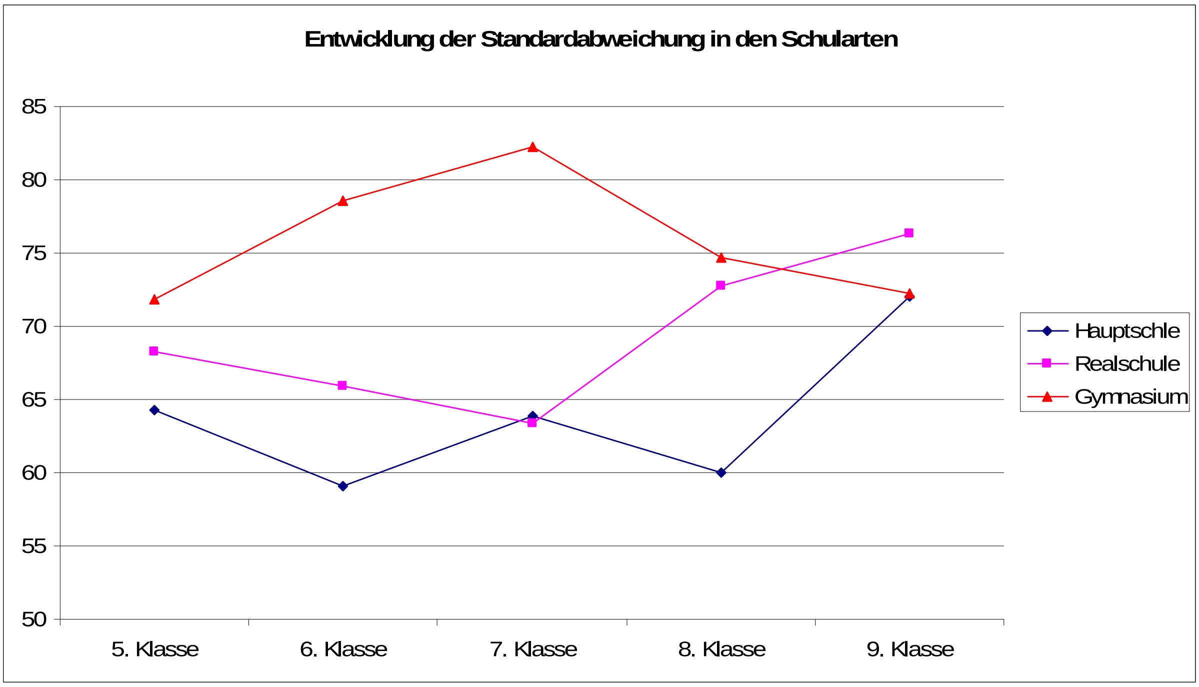


Abbildung 49: Standardabweichung der Subskala *Funktionales Denken* in den Schularten

In Abbildung 49 ist die Standardabweichung der Ergebnisse auf der Subskala *Funktionales Denken* innerhalb der Schularten dargestellt. Hierbei fällt auf, dass sich die Standardabweichung in den Schularten sehr unterschiedlich entwickelt. Ohne ins Detail gehen zu wollen, soll kurz auf einige Punkte hingewiesen werden.

- Im Gymnasium nimmt die Standardabweichung bis zur 7. Klasse zu und anschließend ab. Der Beginn der Abnahme in der 8. Klasse ist die Klassenstufe, in der Funktionen definiert werden und eine systematische Untersuchung bestimmter Funktionstypen beginnt.
- Es ist deutlich erkennbar, dass die Standardabweichung innerhalb der Realschule bis zur 7. Klasse abnimmt und anschließend stark zunimmt. Dieser Wendepunkt stimmt mit dem

Zeitpunkt überein, an dem sich der Lehrplan des mathematisch-technischen Zweiges von dem der anderen beiden Zweige zu unterscheiden beginnt.

- Der Anstieg in der 9. Klasse der Hauptschule ist kein spezifisches Phänomen der Subskala *Funktionales Denken*. Alle in PALMA untersuchten Subskalen, bei denen nicht nur technische Fähigkeiten geprüft werden, zeigen diese starke Zunahme in der Jahrgangsstufe der Hauptschule, in der die Abschlussprüfung vorbereitet wird.

Mit der PALMA-Subskala *Funktionales Denken* kann die nach den Analysen der Lehrpläne und Schulbücher erwartete Entwicklung empirisch dokumentiert werden. Tatsächlich lassen sich erwartete steile Zuwächse und auch Flachstellen nachweisen. Die Entwicklung der funktionalen Denkweise ist nicht konstant ansteigend, sondern sehr eng an die jeweiligen Lehrpläne gebunden. Auch die Entwicklung der Standardabweichung kann teilweise mit den Ergebnissen der vorangegangenen Kapitel erklärt werden.
Mit den Analysen kann außerdem dokumentiert werden, dass die durchschnittliche Leistung der Hauptschüler sehr deutlich hinter den durchschnittlichen Leistungen der Schüler aus den beiden anderen Schularten zurückbleibt. Dieser Rückstand ist bereits in der 5. Klasse groß und vergrößert sich über im Laufe der Jahre noch weiter. Im Gegensatz dazu bleibt der Abstand zwischen den mittleren Leistungen der Realschüler und der Gymnasiasten relativ stabil.

8.3 Zusammenfassung der Ergebnisse

Mit diesem Kapitel konnten die Ergebnisse der vorangegangenen Kapitel durch empirische Befunde ergänzt werden. Außerdem wurden Vermutungen zur Stärken und Schwächen der Schüler beider Länder und auch zur Entwicklung der funktionalen Denkweise empirisch bestätigt.

In der PISA-Subskala *Veränderung und Beziehung* schneiden die französischen Schüler besser ab als die deutschen. Dieser Teilbereich ist sogar eine relative Stärke von ihnen. Ein Grund dafür liegt vermutlich in der ausführlichen Behandlung der Proportionalität und in der Arbeit mit der graphischen Darstellung.
Innerhalb Deutschlands schneiden die bayerischen Schüler am besten ab. Sie erreichen im Durchschnitt auch einen höheren Wert als die französischen Schüler. Hier bildet die Subskala *Veränderung und Beziehung* aber keine spezielle Stärke. Die Ergebnisse sind im Rahmen eines generell guten Abschneidens der bayerischen Schüler zu sehen.

Mit den DIF-Analysen konnten einige Items der PISA-Subskala Veränderung und Beziehung identifiziert werden, die relative Stärken von deutschen oder französischen Schülern dokumentieren. Insbesondere Items aus den Bereichen, in denen spezifische Stärken schon bei der Analyse intendierten und der potentiellen Curricula vermutet worden sind funktionieren differentiell. Allerdings konnte kein positiver Effekt für Frankreich durch die ausführliche Arbeit mit proportionalen und linearen Abhängigkeiten festgestellt werden.

Die Subskala Funktionales Denken von PALMA erlaubt es die Entwicklung der funktionalen Denkweise der bayerischen Schüler zu erfassen und darzustellen. Es zeigt sich dass keine kontinuierliche Entwicklung vorliegt, sondern die durchschnittliche Leistung zwischen den

verschiedenen Messzeitpunkten unterschiedlich stark wachsen. Schon in der 5. Klasse liegen die Leistungen der Hauptschüler sehr deutlich hinter den Leistungen der Schüler der beiden anderen Schularten. In den folgenden Klassenstufen vergrößert sich dieser Abstand noch weiter. Im Gegensatz dazu bleibt der Abstand zwischen den mittleren Leistungen der Realschüler und denen der Gymnasiasten stabil.
Die Größe der Zuwächse der Leistung der Schüler kann in vielen Fällen auf Ursachen im Lehrplan zurückgeführt werden. Das heißt, dass die Kontinuität der Entwicklung der funktionalen Denkweise maßgeblich durch die Inhalte mit Bezug zu funktionalem Denken und die Zeit, die mit ihnen verbracht wird, beeinflusst werden kann. Eine geänderte Verteilung der Inhalte zu funktionalem Denken könnte vermutlich zu einem gleichmäßigeren Anwachsen der funktionalen Denkweise der Schüler führen.

Im folgenden Kapitel werden weitere spezifische Stärken und Schwächen der deutschen und der französischen Schüler dokumentiert. Dabei wird eine im Rahmen von PALMA in Bayern und in Frankreich durchgeführte Interviewstudie ausgewertet, deren Fokus auf Aufgaben mit Bezug zur funktionalen Denkweise liegt.

9 Qualitative Analysen

Im Rahmen der PALMA Studie (siehe Kapitel 8) wurde eine begleitende Interviewstudie in ausgewählten bayerischen Schulen durchgeführt. Für diese Arbeit konnte die deutsche Interviewserie durch eine parallele Interviewstudie in zwei französischen Schulen ergänzt werden.
In diesem Kapitel sollen die bisherigen Ergebnisse durch detaillierte Analysen von Ausschnitten aus einigen Interviews illustriert werden.

9.1 Ziele, Konzeption und Methoden der Interviewstudien

Breit angelegte Studien, bei denen Fragebögen ausgefüllt werden sollen, erlauben die Testung einer großen Anzahl von Personen, und damit das Erhalten von repräsentativen Ergebnissen. Dabei werden allerdings gewisse Einschränkungen bei der Erhebung der Daten in Kauf genommen. So kann nicht flexibel auf bestimmte Antworttypen reagiert und nachgefragt werden. Auch kann es sich als sehr schwierig erweisen falsche Antworten auf spezielle Grundvorstellungsdefizite oder auf mathematisch inkorrekte Teile des concept images zurück zu führen. Solche Analysen können mit Interviewstudien durchgeführt werden.

PALMA ist eine Studie mit einer sehr großen Anzahl an Testteilnehmern (siehe Kapitel 8), weswegen eine Durchführbarkeit nur mit Hilfe von Fragebögen erreicht werden konnte. Seit 2003 wird jedes Jahr eine begleitende Interviewstudie in enger Abstimmung mit dem schriftlichen Test durchgeführt. So können detaillierte Erkenntnisse über spezifische Fehlertypen gewonnen werden und außerdem typische Defizite der Schüler illustriert werden.

In jedem Jahr werden 36 Einzelinterviews an drei verschiedenen bayerischen Schulen geführt. Die Dauer eines Interviews beträgt etwa 30 Minuten. Es handelt sich um halbstandardisierte Einzelinterviews, die während der Schulzeit durchgeführt werden. Dabei werden jeweils der Ton und ab 2005 auch ein Video der Interviews aufgezeichnet.
Alle Interviews eines Jahres werden im demselben Schultyp durchgeführt. Im Jahr 2005 fanden die Interviews in 8. Klassen von Realschulen statt.
Bei der Auswahl der Schüler wurde darauf geachtet, dass diese wenn möglich bei allen vorangegangenen Testzeitpunkten am der schriftlichen Erhebung teilgenommen haben. So kann gewährleistet werden, dass eine möglichst große Datenbasis über sie vorhanden ist, um die Ursachen für eventuelle Defizite in früheren Jahren ausmachen zu können.
Die Mehrzahl der Aufgaben, die in den Interviews eingesetzt wurden, stammt aus dem schriftlichen PALMA-Test.
Im Jahr 2005 ist bei der Auswahl der Aufgaben ein inhaltlicher Schwerpunkt auf die Betrachtung funktionaler Situationen gelegt worden. Acht Aufgaben wurden für eine Bearbeitung durch die Schüler vorbereitet. Allerdings konnten aus Zeitgründen nicht in allen Fällen alle Aufgaben bearbeitet werden.

Im Jahr 2006 wurde eine parallele Interviewstudie im Rahmen eines vom DAAD (Deutscher Akademischer Austauschdienst) geförderten Studienaufenthaltes in Paris durchgeführt. Mit je sechs Schülern aus zwei Schulen aus dem Großraum Paris wurde ein 30-minütiges Einzelinterview während der Schulzeit zu den PALMA-Interviewaufgaben aus dem Jahr 2005

gemacht. Dabei wurde der Ton mitgeschnitten.
Bei den Schulen handelt es sich um zwei Collège. Das eine ist ein anspruchsvolles Collège mit europäischer Ausrichtung und befindet sich im 13. Arrondissement, einem relativ wohlhabenden Stadtteil von Paris. Das andere Collège befindet sich in einem Vorort von Paris, dessen Bevölkerung zu großen Teilen aus den französischen Überseegebieten und Nordafrika stammt. Trotz der sehr kleinen Schulauswahl konnte so eine gewisse Streuung der Versuchspersonen erreicht werden.
Alle Schüler, die in der Frankreich an der Interviewstudie teilgenommen haben, haben die 3^e besucht. Die 3^e entspricht der 9. Klassestufe in Deutschland. Die Interviews sind in Frankreich also nicht in derselben Klassenstufe durchgeführt worden wie in Deutschland. Das liegt daran, dass in der 4^e, die der 8. Klasse in Deutschland entspricht, noch sehr wenig mit funktionalen Zusammenhängen gearbeitet wird (siehe Kapitel 6 und 7). Deshalb wurde ist nach Rücksprache mit den jeweiligen Lehrkräften beschlossen worden, die Interviewserie in Frankreich in der 3^e durchzuführen, in der beispielsweise die linearen Funktionen eingeführt werden.

Ebenso wie in Bayern, wo die Interviews in kurzem Abstand nach den schriftlichen Erhebungen folgen, wurden die Interviews in Frankreich etwa in der Mitte der zweiten Schulhalbjahres durchgeführt.

Bei der nun folgenden Auswertung sollen bestimmte Defizite und typische Fehlvorstellungen, die in den vorangegangenen Kapiteln identifiziert werden konnten, mit Hilfe von ausgewählten Interviews illustriert werden. Da nur 36 Interviews aus Bayern und zwölf aus Frankreich vorliegen, wird auf eine quantitative Analyse und insbesondere auf einen Vergleich der Schülerleistungen in beiden Ländern verzichtet, weil mit einer so kleinen Stichprobe keine repräsentativen Aussagen gemacht werden können. Durch qualitative Analysen ist es jedoch möglich Hypothesen über Ursachen für falsche Lösungen zu entwickeln und diese in Beziehung zum intendierten und zum potentiellen Curriculum zu setzen.

Im folgenden Abschnitt werden die Aufgaben vorgestellt, die in den Interviews bearbeitet werden.

9.2 Die Interviewaufgaben

Da in vielen Interviews nur die ersten sechs Aufgaben bearbeitet wurden, werden hier auch nur diese betrachtet.

Bei den ersten beiden Aufgaben handelt es sich um technische Aufgaben, bei denen Gleichungen im algebraischen Register gelöst werden sollen. Zur Lösung sind nur einfache Regeln zum Umgang mit dem algebraischen Register notwendig. Übersetzungen zwischen verschiedenen Registern müssen nicht durchgeführt werden.

Aufgabe: Gleichung

Berechne x.

$$5 - 4x = 1$$

Abbildung 50: Aufgabe Gleichung

Aufgabe: Bruchgleichung

Berechne x.

$$\frac{56}{x} = 7$$

Abbildung 51: Aufgabe Bruchgleichung

Beide Aufgaben haben zum Ziel die technischen Fertigkeiten der Schüler zu erheben und dabei ihr Verständnis von der von ihnen gewählten Vorgehensweise zu prüfen. Darüber hinaus sollen diese Aufgaben aber auch den Einstieg in die ungewohnte Interviewsituation für die Schüler möglichst einfach gestalten.

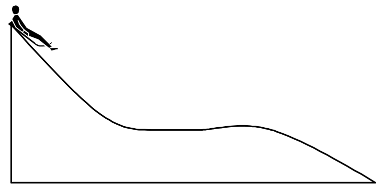
Im schriftlichen PALMA Test der 8. Klasse können 61,6% der Schüler die Aufgabe Gleichung korrekt lösen. Die Aufgabe Bruchgleichung war nicht Teil der schriftlichen Erhebung der 8. Klasse.
Für manche Schüler stellt die Variable im Nenner der Aufgabe Bruchgleichung ein großes Hindernis dar. Diese Probleme treten insbesondere dann auf, wenn die Schüler ein rein instrumentelles Verständnis der ihnen bekannten Rechenregeln haben. Sie wissen nicht, wie und ob die gelernten Regeln auch für Unbekannte im Nenner angewendet werden können. Haben die Schüler aber ein relationales Verständnis von der Bruchgleichung, so können sie sehen, dass die Zahl gesucht ist, durch die man 56 teilen muss um sieben zu erhalten (siehe Abschnitt 3.1.4.2). Dies erleichtert vielen das Finden der Lösung.

Bei der folgenden Aufgabe Schlitten wird eine funktionale Situation in einem Schaubild dargestellt. Die Schüler sollen den Graphen auswählen, bei dem die Geschwindigkeit des Schlittenfahrers korrekt in Abhängigkeit von der Zeit dargestellt wird. Es handelt sich also um eine Übersetzung zwischen dem Register der Sprache und dem graphischen Register. Die Aufgabe spricht vor allem die Kovariations-Grundvorstellung an. Sie kann aber auch durch die Betrachtung der Geschwindigkeit an markanten Punkten gelöst werden, wobei dann aber die Steigung des Graphen als Beschleunigung bzw. Abbremsen interpretiert werden muss. Eine mögliche Schwierigkeit ist die ikonische Sichtweise des Graphen, die durch die dritte Auswahlantwort angesprochen wird. Außerdem ist bei der Bearbeitung dieser Aufgabe eine gewisse Idealisierung und Vereinfachung vorzunehmen. Beispielsweise ist zu verstehen, dass die richtige Kurve die Geschwindigkeit nur bis zu dem Zeitpunkt angibt, zu dem der Schlittenfahrer am Fuß des Berges ankommt. Dies entspricht aber nicht dem Zeitpunkt zu dem er anhält.

Die Aufgabe Schlitten war nicht im schriftlichen PALMA-Test der 8. Klasse enthalten, so dass keine Angaben über die Lösungshäufigkeit gemacht werden kann.

Aufgabe: Schlitten

Welches Schaubild skizziert die Geschwindigkeit des Schlittenfahrers in Abhängigkeit von der Zeit?



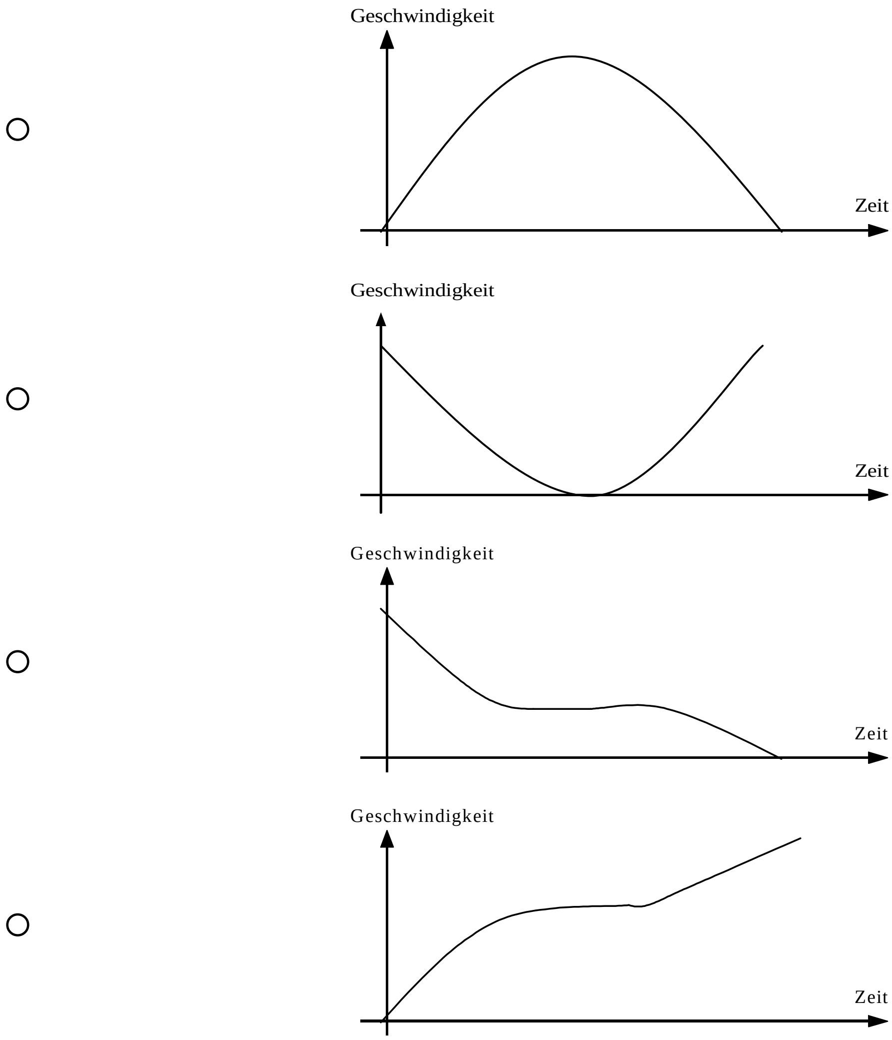


Abbildung 52: Aufgabe Schlitten

Die Aufgabe Kurvenzuordnung besteht aus zwei Teilen. Es ist jeweils der Graph einer Funktion gegeben und es stehen vier funktionale Situationen zur Auswahl. Die Schüler sollen angeben, welche funktionalen Situationen durch die beiden Graphen dargestellt werden können.

Für die französischen Interviews sind die Auswahlantworten leicht abgeändert worden. In beiden Aufgabenteilen wurde *US-Dollar* → € bzw. € → *US-Dollar* durch *Gewicht des Fleisches* → *Preis* ersetzt. Außerdem wurde die zweite Auswahlantwort der ersten Teilaufgabe durch *Geschwindigkeit des Zuges* → *Zeit um 100 km zurück zu legen* ersetzt.

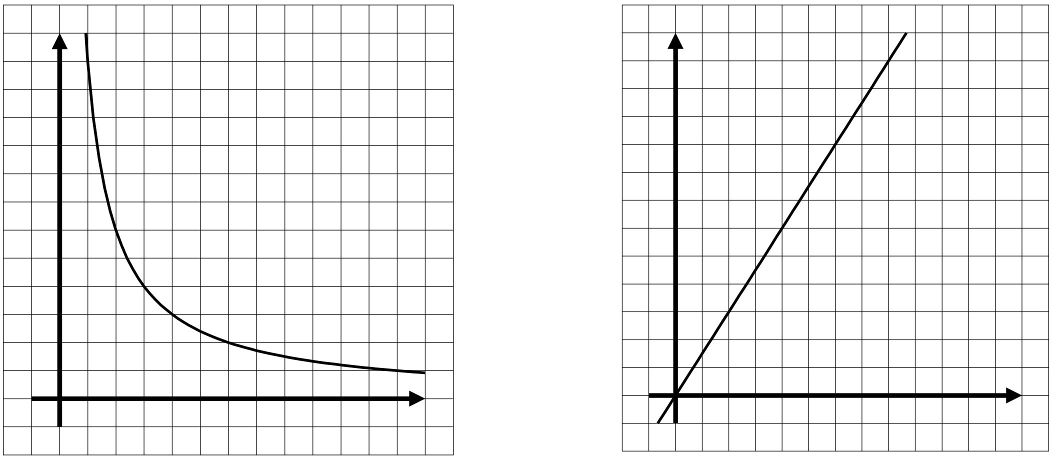
Bei der Lösung dieser Aufgabe muss also zwischen einer Realsituation und einer graphischen Darstellung übersetzt werden. Dabei ist insbesondere die Kovariations-Grundvorstellung zur qualitativen Beurteilung der Variationseigenschaften der funktionalen Situationen erforderlich.

Bei den französischen Schülern sind mehr Schwierigkeiten mit dem ersten Graph zu erwarten, als bei den deutschen Schülern, da sie noch nicht mit umgekehrt proportionalen Funktionen gearbeitet haben.

In der PALMA Erhebung der 8. Klasse konnten 17,8% der Schüler die erste Teilaufgabe lösen und 18,6% die zweite Teilaufgabe.

Aufgabe: Kurvenzuordnen

Kreuze bei jedem Graphen eine passende Zuordnung an.



○ US-Dollar → €

○ Länge eines Rechtecks → Breite des Rechtecks bei gleichem Flächeninhalt

○ Fallhöhe → Geschwindigkeit

○ Parkdauer → Kosten

○ Gesprächsdauer → Telefonkosten mit Grundgebühr

○ Lebensalter → Körpergröße

○ Anzahl Arbeiter → benötigte Arbeitszeit für einen Auftrag

○ € → US-Dollar

Abbildung 53: Aufgabe Kurvenzuordnen

Es folgt die Aufgabe Kerze. Hier ist eine funktionale Situation im Register der Sprache gegeben. Die Schüler sollen die algebraische Darstellung der zugrunde liegenden funktionalen Abhängigkeit angeben. Die Hauptschwierigkeit bei dieser Aufgabe liegt im sinnvollen einbinden der numerischen Angaben des Aufgabentextes in die zu erstellende Formel. Dabei werden die Grundkenntnisse zu linearen Funktionen genutzt (siehe Abschnitt 3.1.4.4.2).

Im schriftlichen PALMA Test der 8. Klasse war diese Aufgabe in zwei Teilaufgaben unterteilt. Erst soll die Höhe der Kerze nach einer Brenndauer von zehn Minuten angegeben werden. Die zweite Teilaufgabe entspricht der in den Interviews gestellten Aufgabe. 41,1% der Schüler haben die erste Teilaufgabe richtig gelöst. 19,7% konnten die algebraische Darstellung richtig angeben.

Aufgabe: Kerze

Eine Kerze ist 30 cm hoch. In 1 Minute brennt sie 0,1 cm ab.

Stelle einen Rechenausdruck auf, mit dem man die Höhe der Kerze nach x Minuten berechnen kann.

Abbildung 54: Aufgabe Kerze

Die letzte hier betrachtete Aufgabe ist die Aufgabe Gefäße. Darin ist eine funktionale Situation in einem Schaubild gegeben. Die Schüler sollen passende graphische Darstellungen selber erstellen und in vorgegebene, leere Koordinatensysteme einzeichnen. Dabei ist die x-Achse des Koordinatensystems mit *Zeit* und die y-Achse mit *Wasserhöhe* beschriftet.

In dieser Aufgabe ist eine selbstständige Übersetzung von einer Realsituation in das graphische Register durchzuführen. Dabei kann mit der die Kovariations-Grundvorstellung oder der Zuordnungs-Grundvorstellung gearbeitet werden. Grundvoraussetzung für eine erfolgreiche Bearbeitung dieser Aufgabe ist, dass die Schüler wissen, dass bei konstantem Zufluss die Wasserhöhe an engen Stellen von Gefäßen schneller steigt als an breiten Stellen. Diese Information müssen sie aus ihren persönlichen Erfahrungen entnehmen.

Im schriftlichen PALMA Test der 8. Klasse wurden korrekte Graphen von 67,1% der Schüler für das erste Gefäß, von 11,2% für das zweite Gefäß und von 21,7% für das dritte Gefäß angegeben.

Aufgabe: Gefäße

Auf den Bildern sind verschieden geformte Gefäße zu sehen, die alle gleich hoch sind.
In alle drei Fällen läuft gleichmäßig Wasser in die Gefäße.

Zeichne jeweils ein, wie die Wasserhöhe in Abhängigkeit von der Zeit steigt.

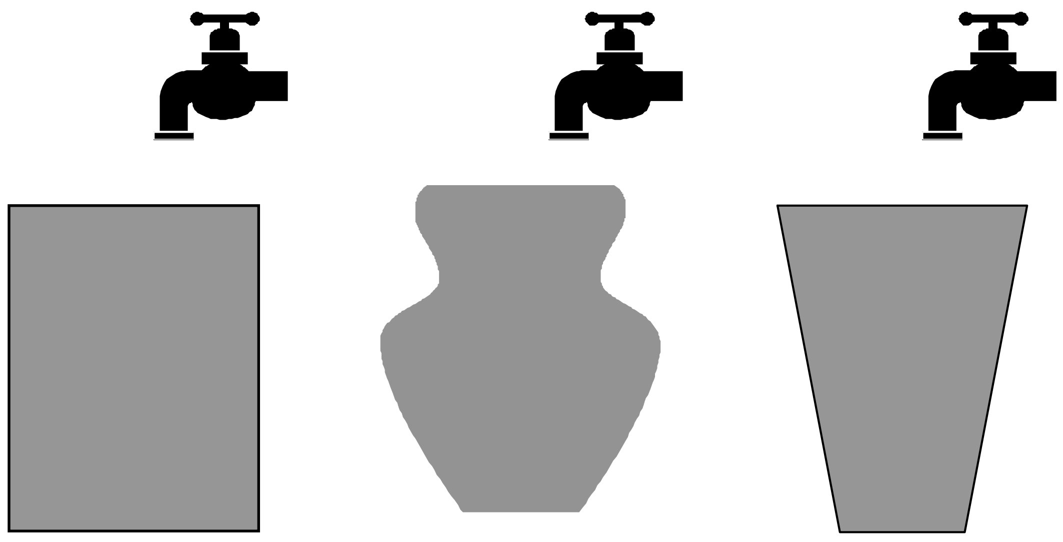


Abbildung 55: Aufgabe Gefäße

Im folgenden Abschnitt werden typische Fehlvorstellungen und problematische Teile des concept image anhand von ausgewählten Interviewausschnitten aus Deutschland und Frankreich exemplarisch dargestellt.

9.3 Ausgewählte Interviews

In diesem Abschnitt werden Ausschnitte aus einigen ausgewählte Interviews im Detail betrachtet. Ziel dabei ist es bestimmte Fehlvorstellung und Defizite zu illustrieren, die entweder im Kapitel 3 und 4 identifiziert wurden, oder auf Grund die Analysen des intendierten und des potentiellen Curriculums (Kapitel 6 und 7) vermutet werden.
Wegen der fehlenden Repräsentativität der Stichprobe können keine Aussagen über die Gesamtpopulation des Landes des jeweils betrachteten Schülers gemacht werden. Dennoch zeigen diese Beispiele, dass die in dieser Arbeit identifizierten Stärken und Schwächen in der Praxis auftreten und dass von einer repräsentativen Forschung bestätigende Ergebnisse erwartet werden können.

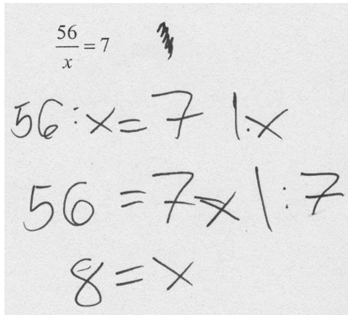
In Abschnitt 4.2.2 wird die ikonische Sichtweise der graphischen Darstellung funktionaler Abhängigkeiten als mögliche Fehlerquelle beim Umgang mit dem graphischen Register identifiziert. In den Analysen der potentiellen Curricula beider Länder konnten keine speziellen Vorbereitungen der Schüler zur Vermeidung dieser Schwierigkeit gefunden werden, so dass deren Auftreten in beiden Ländern erwartet werden kann. In Abschnitt 9.3.1 wird gezeigt, dass die ikonische Sichtweise tatsächlich in den Interviews mit deutschen und mit französischen Schülern zu beobachten ist.
Ein Ergebnis der Analysen des intendierten und potentiellen Curriculums von Frankreich ist, dass dort im Vergleich mit Deutschland sehr lange ausschließlich mit linearen Abhängigkeiten gearbeitet wird. Daraus ergibt sich eine mögliche Einschränkung der concept images der Schüler. In Abschnitt 9.3.2 wird mit zwei Interviewausschnitten dargestellt, wie sich diese Einschränkung beim Umgang mit nichtlinearen funktionalen Abhängigkeiten auswirkt.
Mit einem weiteren Interviewausschnitt wird in Abschnitt 9.3.3 anschließend illustriert, wie Defizite des concept images mit gut ausgebildeten Grundvorstellungen ausgeglichen werden können. Im vorliegenden Fall kann eine französische Schülerin fehlende Erfahrung beim Umgang mit nichtlinearen Abhängigkeiten durch die Nutzung einer gut ausgebildeten Kovariations-Grundvorstellung kompensieren.
Abschließend wird Abschnitt 9.3.4 gezeigt, welche Auswirkungen es haben kann, wenn Schüler eine gewisse Vorhersagbarkeit von funktionalen Abhängigkeiten erwarten. Diese Schwierigkeit kann sich insbesondere dann entwickeln kann, wenn mit den Worten *dépendance* bzw. *Abhängigkeit* eine Kausalität verbunden wird (siehe Abschnitt 3.3.1).

9.3.1 Die ikonische Sichtweise

Der erste hier betrachtete Interviewausschnitt stammt von einer Schülerin aus der 8. Klasse einer bayerischen Realschule.

Die ersten fünf Aufgaben werden von ihr schnell und erfolgreich bearbeitet. Allerdings unterläuft ihr bei der ersten Aufgabe ein Rechenfehler und bei der ersten Teilaufgabe der Aufgabe Kurvenzuordnen hat sie einige Schwierigkeiten beim Verständnis der angebotenen Realsituationen.
Ihr gutes Verständnis zeigt sich insbesondere bei ihrer Lösung der Aufgabe Bruchgleichung. Sie wandelt die Bruchschreibweise in eine übliche Schreibweise für Divisionen um und führt

dann korrekte Umformungen innerhalb des algebraischen Registers durch. (Diese Präferenz für eine Schreibweise ohne Bruchstrich deutet auf eine Schwierigkeit beim Auffassen von Brüchen als Objekte hin. Brüche werden als ungewöhnliche Schreibweise für Divisionen gesehen. Siehe Wartha (2007)).



Auf Nachfrage durch den Interviewer erklärt sie ihre Lösung noch einmal anders:

Interviewer: Hier… wieso rechnest du mal *x*?

Schülerin: Weil das die sieben… die ist ja in dem enthalten da und weil das da

I: Also die 56 durch *x*?

S: Weil, das ergibt ja dann die Zahl, durch die es geteilt wird, weil das müsste ja dann eine Zahl sein, bei der ja … sieben raus kommt. Und die einzige Zahl, bei der sieben dann rauskommt ist ja die acht.

Die Schülerin erkennt also, dass die Zahl gesucht ist, durch die man 56 teilen muss um sieben zu erhalten. Dies ist ein klarer Ausdruck eines relationalen Verständnisses und setzt sich vom instrumentellen Verständnis der durchgeführten Umformungen ab (siehe Abschnitt 3.1.4.2). Es zeigt, dass diese Schülerin hier zu verständnisvoller mathematischer Arbeit fähig ist.

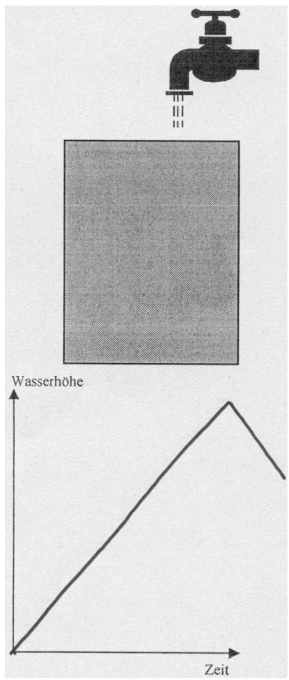
Bei der Aufgabe Gefäße trifft die Schülerin allerdings auf Schwierigkeiten, obwohl sie den Kern der Aufgabe schnell begreift.

Sie zeichnet ohne Schwierigkeiten eine ansteigende Gerade als Graphen für das erste Gefäß. Die Wahl des Funktionstyps kann sie auch richtig begründen.

I: Kannst du erklären, warum das eine Gerade ist?

S: Weil das Gefäß, das bleibt ja, das ist ja so ein Viereck und das bleibt ja gleich groß und das hat immer den gleichen Durchmesser und bei dem ja, da ist es halt eine andere Form, da steigt es ja auch anders, das kommt ganz darauf an, auf die Form darauf an.

Dann erweitert der Interviewer die Situation so, dass die Aufgabe nicht mehr den Aufgabentypen entspricht, die üblicherweise in den Schulbüchern betrachtet werden.



I: Kann man denn sagen, wenn das Gefäß irgendwann voll ist, wie der Graph dann weiter läuft?

S: Ja, das läuft über. Dann ist Schluss.

I: Ja, wie könnte es dann…

S: Ja dann läuft es wieder nach unten.

I: Kannst du das mal einzeichnen?

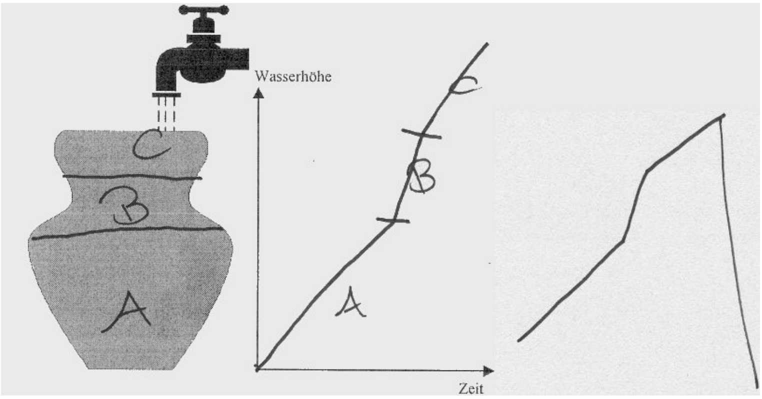
S: Ja so halt dann, ja nach unten.

I: Und warum läuft es wieder nach unten?

S: Weil es ja da an der Seite raus läuft und dann dahin.

Durch die unübliche Frage fällt die Schülerin in eine ikonische Sichtweise von Graphen (siehe Abschnitt 4.2.2). Der zuvor vollkommen richtig erstellte Graph wird um das am Glasrand herabfließende Wasser erweitert.

Beim zweiten Gefäß zeigt sich, dass die Schülerin auch gut mit der komplexeren Situation umgehen kann.



S	OK, weil das hier so… Dann wird es immer weiter, dann weitet sich das und da wird es dann schmäler, da steigt ja wieder schneller da hin und da wird es wieder weiter und dann steigt es wieder etwas langsamer, nicht ganz so steil.

I	Kannst du das mal in so Abschnitte im Graphen unterteilen im Graphen und im Gefäß, so dass man das noch erkennen kann?

S	*nummeriert Graphen und Gefäß* Das ist die Zeit, in der es ganz schnell steigt, weil hier wird es wieder schmäler und steigt.

Die Schülerin unterteilt den Graphen in Geradenstücke. Sie modelliert durch den Graphen allerdings keine kontinuierliche Veränderung der Wasserhöhe. Die Steigung der Geraden drückt in diesem Fall aus, ob die Geschwindigkeit der Höhenänderung im betrachteten Abschnitt der Vase zunimmt (steiler Graph) oder abnimmt (flacher Graph).

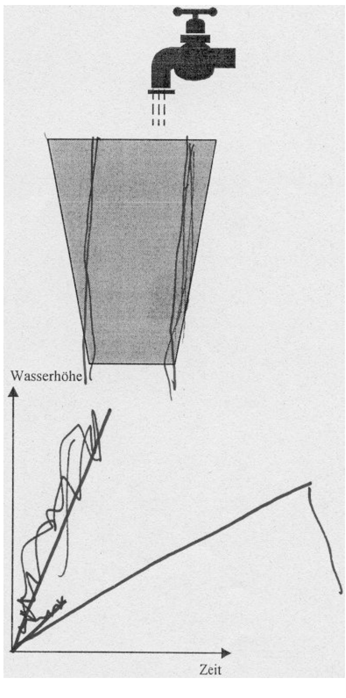
I	Alles klar. Ist das hier eine Gerade? Also wenn du es jetzt ganz exakt zeichnen müsstest, würdest du dann ein Lineal hernehmen?

S	Ja, also ich würde schon ein Lineal hernehmen, aber das geht so, dann geht es steiler und dann geht wieder weniger steiler. Das ist keine Gerade, die ganz so durchgeht und ohne Knicke drin.

Um diese Teilaufgabe abzuschließen wird auch beim zweiten Gefäß die Frage gestellt, was passiert, wenn das Gefäß voll ist. Die Schülerin modelliert wieder das am Glasrand herabfließende Wasser und zeichnet einen fallenden Graphen.

I	OK. Was passiert, wenn das Gefäß wieder voll ist?

S	Ja dann geht es wieder nach unten.



Beim dritten Gefäß sieht die Schülerin zunächst, dass sich die Geschwindigkeit, mit der das Wasser steigt, bei zunehmender Höhe abnimmt.

S	Ja, ich überlege jetzt, wenn… ein bestimmter…ja, das dauert… wird halt ein bisschen flacher, weil da ist es weniger breit und dann wird es immer breiter und dann braucht es länger. […]

Aber sie zeichnet eine Gerade als Graphen. Die Steigung der Geraden drückt aber hier nicht wie beim zweiten Gefäß ein Abflachen der Geschwindigkeit aus. Sie ist hier im Gegensatz zur Steigung des Graphen des ersten Gefäßes zu sehen. Die Schülerin meint, dass das Gefäß etwas größer ist als das erste, weswegen der Graph flacher verlaufen muss.

I	Ist das eine Gerade?

S Ja.

I Und was ist jetzt der Unterschied zwischen dem Ersten und dem Dritten?

S Also wenn die jetzt da unten gleich breit wären… das braucht ja länger hier, weil das hier an der Seite noch das Ding dran hat und das andere geht ja nur so… Hat ja nur das und da ist an der Seite da… da sind ja noch zwei so Dreiecke dran. Deswegen dauert das länger.

Auch bei diesem Gefäß zeichnet die Schülerin zum Schluss einen fallenden Graphen.

I Alles klar. Was passiert hier, wenn es voll ist?

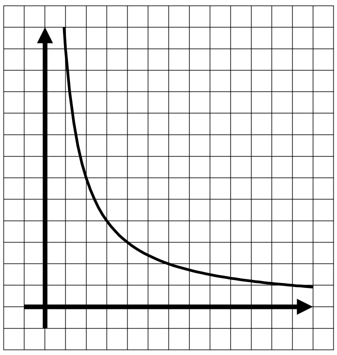
S Dann läuft es auch wieder über.

I OK

S Und dann geht es wieder nach unten.

Dieser Interviewausschnitt zeigt, dass die ikonische Sichtweise von Funktionen nicht nur beim Ablesen und Arbeiten mit Graphen beobachtet werden kann, sondern von manchen Schülern auch bei der aktiven Erstellung von graphischen Darstellungen genutzt wird. Die ikonische Sichtweise tritt auch bei Schülern auf, die keine besonderen Schwierigkeiten beim Umgang mit funktionalen Situationen haben. Die Schülerin des eben analysierten Interviews zeigt, dass sie mit den meisten der gestellten Aufgaben sicher umgehen und die zugrunde liegenden Situationen stets richtig versteht.
Neben der ikonischen Sichtweise, die dann auftritt, wenn eine unübliche Frage gestellt wird, sind bei der Schülerin auch Defizite im Umgang mit Steigung und Änderungen der Steigung auszumachen. Bei der Lösung der zweiten Teilaufgabe ist die Steigung der Geraden als Abnahme bzw. Zunahme der Geschwindigkeit zu werten, mit der das Wasser im Gefäß steigt. Bei der dritten Teilaufgabe lässt sich mit der Steigung die relative Dauer ablesen, die für die Füllung des gesamten Gefäßes benötigt wird.
Beide Fehlertypen können auf Unsicherheiten bei der Kovariations-Grundvorstellung zurückgeführt werden. Bei der ikonischen Sichtweise des Graphen wird zum Schluss nicht mehr beachtet, welche Variablen kovariieren und bei der Fehlinterpretation der Steigung sind Probleme bei der qualitativen Analyse von Kovariation auszumachen.

Auch in den in Frankreich durchgeführten Interviews lässt sich die ikonische Sichtweise von Graphen finden. Als Beispiel soll hier die Bearbeitung der ersten Teilaufgabe der Aufgabe Kurvenzuordnen durch eine Schülerin gezeigt werden.
Bei der Übersetzung ins Französische wurde die Auswahlantwort *Fallhöhe* → *Geschwindigkeit* durch *Fallhöhe eines Steines* → *Geschwindigkeit beim Aufschlag auf dem Boden* konkretisiert. Diese Lösung wird von der Schülerin zuerst als richtige Lösung angesehen. Zur Begründung gibt sie Folgendes an:



S Weil, weil es ein Fall ist. Und, äh, da es hier, am Anfang hoch ist dann fällt es wie bei einem Fall ab.

Sie kommt später noch mal auf ihre Antwort zurück und verwirft sie diesmal.

S Nein, das kann es nicht sein, weil da sagen sie, wenn er auf dem Boden aufschlägt.

I Ja

S Hier berührt es nicht die Kurve

I Ah, es berührt nicht die x-Achse.

Die ikonische Sichtweise des Graphen hat hier zunächst zur Wahl einer falschen Antwort geführt. Bei einer genaueren Betrachtung kommt die Schülerin allerdings zu der Überzeugung, dass diese Lösung doch falsch ist. Auch dabei benutzt sie ein Argument, das auf die ikonische Sichtweise zurück zu führen ist. Die Lösung wird abgelehnt, da der Stein den Boden nicht berührt, was daran zu erkennen ist, das der Graph die x-Achse nicht berührt.

Insgesamt zeigt sich, dass die ikonische Sichtweise von Graphen eine länderübergreifende Fehlvorstellung ist.

9.3.2 Lineare Fixierung

Das folgende Interview wurde mit einer Schülerin aus einer 3[e] in Frankreich geführt.

Die ersten drei Aufgaben werden von ihr richtig bearbeitet.
Bei der Aufgabe Kurvenzuordnen bearbeitet sie zuerst die zweite Teilaufgabe. Dort sieht sie schnell, dass es der Graph einer proportionalen Zuordnung ist. Daraufhin schließt sie zwei Auswahlantworten aus, von denen sie sofort sieht, dass es keine proportionalen Situationen sind. Sie zeigt durch ihre schnellen Analysen, dass sie beim Umgang mit proportionalen Zuordnungen sehr sicher ist.
Schwierigkeiten beim Verständnis der Auswahlantwort *Anzahl Arbeiter → benötigte Arbeitszeit für einen Auftrag* hindern sie allerdings daran diese Teilaufgabe vollständig korrekt zu lösen.
Die erste Teilaufgabe der Aufgabe Kurvenzuordnen fällt ihr deutlich schwerer, da sie noch nicht mit einem solchen Graphen gearbeitet hat.

I Was stört dich? Magst du den Graphen nicht?

S Äh, ja

I Was passt dir nicht?

S Es ist, es ist, dass der Graph die Achsen nicht schneidet.

I Mhm, …, hast du das nie gesehen?

S Äh, nein, ich glaube nicht.

I Mhm […]

S Auf jeden Fall ist es offensichtlich etwas das fällt.

Sie versucht die Aufgabe dann mit Hilfe der Idee lösen, dass es sich um eine Situation handeln muss, in der eine Variable in Abhängigkeit von einer andern fällt. Dies gelingt ihr nicht gut, da sie sich ständig durch den ungewohnten Aspekt des Graphen verwirrt fühlt.

Nachdem sie sehr schnell die richtige Lösung der Aufgabe Kerze findet, zeigen sich die Probleme mit nichtlinearen Zuordnungen bei der Aufgabe Gefäße erneut.
Sie löst schnell die erste Aufgabe und erkennt die Linearität.

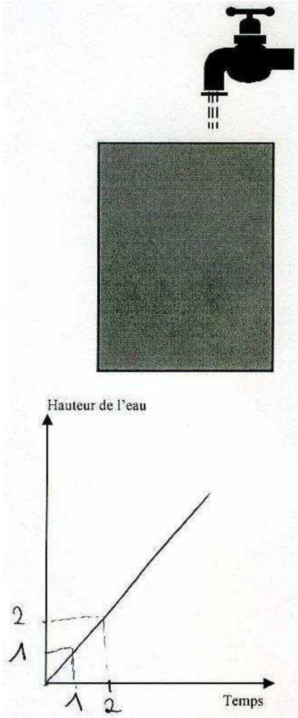
S […] Für dieses, also, ich denke das es linear sein wird.

I Mhm […]

S Da die Vase ein Rechteck ist […] und da deswegen […] die Seiten einen rechten Winkel bilden.

I	Ja

S	Das heißt, dass das Wasser, […] wenn es steigt, dann steigt es immer mit der selben Geschwindigkeit.



Anschließend versucht sie den Graphen für das dritte Gefäß zu erstellen. Sie möchte eine Proportionalität erkennen und zeichnet eine Gerade durch den Ursprung.

I	Also ist es, ist es eine etwas steilere Gerade als beim Ersten.

S	Ein bisschen steiler, weil, wie soll ich sagen, es ist immer noch proportional.

I	Mhm

S	Aber, äh, es ist kein Rechteck, also wird es, es wird nicht geben… Ah, nein. Wie soll ich sagen, … Ich weiß es nicht.

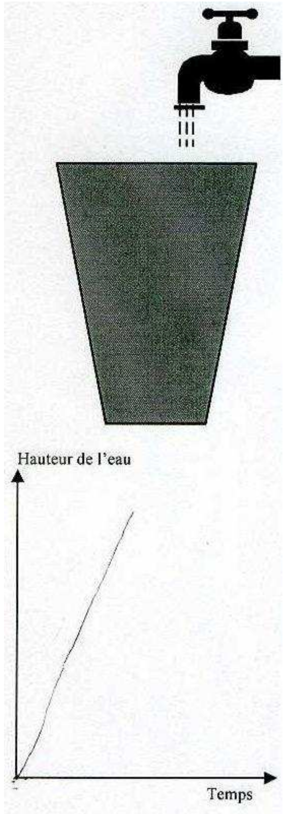
I	Was stört dich?

S	Was mich stört ist, ist dass, äh, da es eher, nicht konisch, aber unten schmaler ist

I	Mhm

S	Es ist, wie soll ich sagen, nein ich weiß es nicht

I	Du versuchst also raus zu finden, welchen Einfluss es hat, dass es unten schmaler ist, oder? Wie man es mit dem Graphen zeigen kann.



S	Genau

I	Du denkst also, dass man es im Graphen sehen sollte? Dass es unten schmaler ist als oben?

S	Nein, nein!

I	Nein?

S	…, eigentlich weiß ich es nicht, ich weiß es nicht.

Die Schülerin versucht weiterhin eine proportionale Situation zu erkennen. Sie ist allerdings dadurch verwirrt, dass das Gefäß nach oben breiter wird. Sie scheint zu wissen, dass dies eine Auswirkung auf den Graphen hat, ohne dies darzustellen zu können.

Sie wechselt dann zum mittleren Gefäß, um dort ihre Schwierigkeiten zu erläutern. Aber auch hier fehlen ihr die Mittel, um das im graphischen Register ausdrücken zu können, was sie intuitiv zu erfassen scheint. Sie zeichnet keinen Graphen in das gegebene Koordinatensystem.

S	Das mittlere, nach einer Weile, da es da hohl ist.

I	Mhm

S	Da es hohl ist, wie sagt man, äh, die Höhe, nein, ich glaube es wird eine Änderung geben.

I	Das heißt?

S	Äh, ich glaube dass die, die Gerade nicht vollkommen, äh

I	Kannst du einzeichnen was du denkst?

S	Ich, ich weiß nicht wie sie sein wird, aber da, nicht das Volumen, aber der Platz

I	Mhm

S	Er ist nicht gleich.

I Ja, der Platz, die Breite des Gefäßes, ja

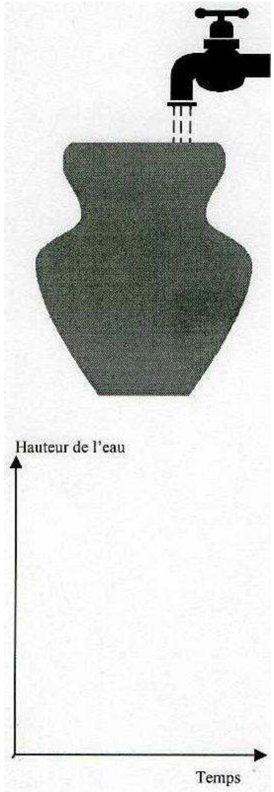
S Also, ich glaube, dass das es nicht, äh, nicht dieselbe Höhe sein wird. Nein!

I Es wird nicht… Was wird sich ändern?

S Ich glaube es ist das, tatsächlich ändert sich nichts.

I Mhm?

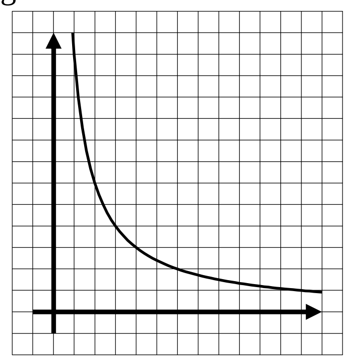
S Ich glaube es ändert sich nichts.



Auch bei diesem Gefäß schafft es die Schülerin nicht, ihr Verständnis der funktionalen Situation durch einen Graphen auszudrücken. Sie scheint anfangs zu versuchen die Auswirkungen der Gefäßform auf die Geschwindigkeit des Wasseranstiegs zu erklären. Bei der Übersetzung in das graphische Register fehlen ihr dann allerdings die Mittel um diese Auswirkungen darzustellen, sodass sie ihre Erklärungen abbricht.

Dieses Interview zeigt, dass die starke lineare Fixierung, die nach der Analyse des intendierten und des potentiellen Curriculums erwartet worden war, tatsächlich bei französischen Schülern der 3^{e} festgestellt werden kann. Trotz widersprüchlicher Eindrücke und eines scheinbaren Verständnisses der zugrunde liegenden Situation hat die Schülerin keine Möglichkeit die funktionale Situation angemessen im graphischen Register darzustellen.
In den Lehrbüchern sind bis dahin nur proportionale und lineare Funktionen ausführlich behandelt worden. Proportionale Situationen sollen als solche erkannt werden und mit funktionalen Zusammenhängen, die als nichtproportional identifiziert werden, werden keine weiteren Detailuntersuchungen durchgeführt. Es kann also davon ausgegangen werden, dass ein stark eingeschränktes concept image der Grund für die Schwierigkeiten der Schülerin ist. Dieses concept image enthält keine nichtlinearen funktionalen Zusammenhänge und lässt nur Geraden als Darstellungen funktionaler Abhängigkeiten im graphischen Register zu.
Auch bei der Bearbeitung der ersten Teilaufgabe der Aufgabe Kurvenzuordnen können die Schwierigkeiten andere Graphen zu akzeptieren gesehen werden. Der unbekannte Aspekt des Graphen verwirrt die Schülerin so sehr, dass sie es nicht schafft mit ihm selbstständig umzugehen. Mit proportionalen und linearen Zuordnungen hat sie aber erwartungsgemäß keinerlei Schwierigkeiten.

Ähnliche Einschränkungen des concept images auf lineare Funktionen konnten auch durch weitere in Frankreich durchgeführten Interviews dokumentiert werden. Insbesondere hat noch eine weitere Schülerin, mit der Aufgabe Kurvenzuordnen und mit der Aufgabe Gefäße Schwierigkeiten, da sie nicht weiß, wie sie mit diesen funktionalen Situationen umgehen soll. Sie bringt ihre Eindrücke beim Erblicken des Graphen der Aufgabe Kurvenzuordnen, der keine Gerade ist, folgendermaßen auf den Punkt.



S Ich habe noch nie so einen Graphen gesehen.

I Warum? Was stört dich?

S Weil, normalerweise sind die Graphen, äh, die Graphen sind gerade. Oder sonst gehen sie […] durch den Ursprung, während dieser eher, er ist, äh, er prallt ab.

Damit bringt sie zum Ausdruck, dass solche Graphen vollkommen neu für sie sind und sie vor erhebliche Schwierigkeiten stellen.

9.3.3 Kovariations-Grundvorstellung

In einem anderen Interview mit einer Schülerin aus der 3[e] kann eine Präferenz für die Nutzung der Kovariations-Grundvorstellung beobachtet werden. Diese Präferenz ist hier mit dem Vorhandensein von Schwierigkeiten beim Umgang mit Darstellungen im algebraischen Register verbunden.

Die beiden ersten Aufgaben fallen der Schülerin schwer. Sie findet die richtigen Lösungen jeweils durch probieren und ist beim Umgang mit dem algebraischen Register sehr unsicher. Dies zeigt sie auch bei der Aufgabe Kerze. Da sie keine allgemeine Formel angeben kann und anfallende Rechnungen mit einem Kreuzprodukt berechnen will, wird sie vom Interviewer gebeten, die Höhe der Kerze nach zehn Minuten anzugeben.

S Also, ich mache das Kreuzprodukt. Ich mache zehn Minuten.

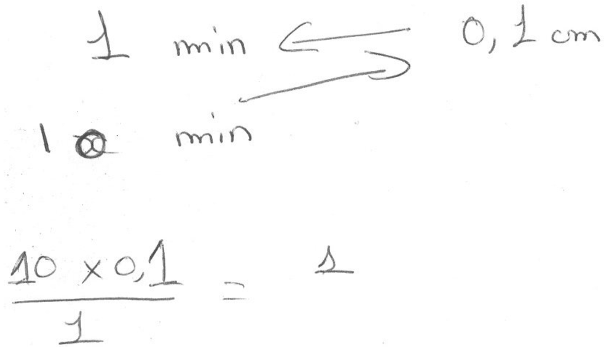
I Mach es … (15 Sekunden) … Was kommt raus?

S Mhm, wenn man multipliziert, verschiebt man oder nimmt man weg?

I Man nimmt weg. […] Aber, bekommt man die Höhe der Kerze, wenn man das berechnet?

S Das macht 1.

I OK



Sie versteht nicht, was sie berechnet, und nutzt das Kreuzprodukt als Lösungsformel.
Diese Nutzung von vorgefertigten Lösungswegen ohne tatsächliches Verständnis war nach bei der Analyse des potentiellen Curriculums erwartet worden. In den betrachteten Schulbüchern werden die Schüler dazu geleitet, die Lösungsmethoden von bestimmten Aufgabentypen zu erlernen. Bei der Bearbeitung von Aufgaben identifizieren sie dann den Aufgabentyp und berechnen die Lösung durch die erlernten Automatismen (siehe Kapitel 7). Bei Anwendung der Lösungsformel zeigen sich außerdem Schwierigkeiten der Schülerin mit der Multiplikation von einfachen Dezimalzahlen.
Die Schülerin schafft es nicht die funktionale Situation als Ganzes zu Erfassen und eine algebraische Darstellung anzugeben. Es zeigt sich, dass sie, zumindest beim Umgang mit funktionalen Abhängigkeiten im algebraischen Register, ein Aktions-Konzept von Funktionen hat (siehe Abschnitt 3.1.5.1). Funktionen werden als Aneinanderreihung von einzelnen Rechnungen gesehen, ohne dass der gesamte Prozess gesehen wird.

Beim Umgang mit funktionalen Abhängigkeiten im graphischen Register zeigt die Schülerin deutlich mehr Sicherheit. Sie löst die Aufgabe Schlitten richtig, indem sie die Geschwindigkeitsänderung des Schlittenfahrers betrachtet. Dabei nutzt sie dasselbe Vokabular für den Graphen und für den Schlittenfahrer. So beschreibt sie den ersten Graphen:

S [… Der Graph] beschleunigt da, aber da bremst er. Dagegen beschleunigt [der Schlittenfahrer] hier, und er ist konstant, und danach beschleunigt er wieder.

Sie betrachtet die Entwicklung des Graphen über mehrere Zeitpunkte und untersucht dessen Variation. Punktweise Überlegungen stellt sie dagegen nicht an.

Auch bei der Aufgabe Kurvenzuordnen zeigt sich, dass sie die Kovariations-Grundvorstellung zum Auffinden der richtigen Lösung nutzt. Zuerst löst sie die zweite Teilaufgabe. Sie stellt fest, dass die Kurve steigt und schließt daraufhin die drei falschen Antwortmöglichkeiten durch Variationsüberlegungen aus und begründet auch die Wahl der richtigen Situation damit.

Bei der ersten Antwortmöglichkeit betrachtet sie nach einiger Diskussion über Tarifmodelle den Fall, dass eine Telefon-Flatrate besteht.

I Würde der Graph so aussehen?

S Nein, er wäre konstant.

Die Zuordnung *Lebensalter* → *Körpergröße* schließt sie mit folgender Begründung aus:

S Aber das ist auch nicht die richtige Wahl.

I Warum?

S Weil, […] ab einem bestimmten Alter wächst man nicht mehr.

I OK, was würde die Kurve also machen?

S Sie würde wachsen und danach wäre sie konstant.

Auch die dritte Antwortmöglichkeit scheint ihr aus Variationsgründen nicht richtig.

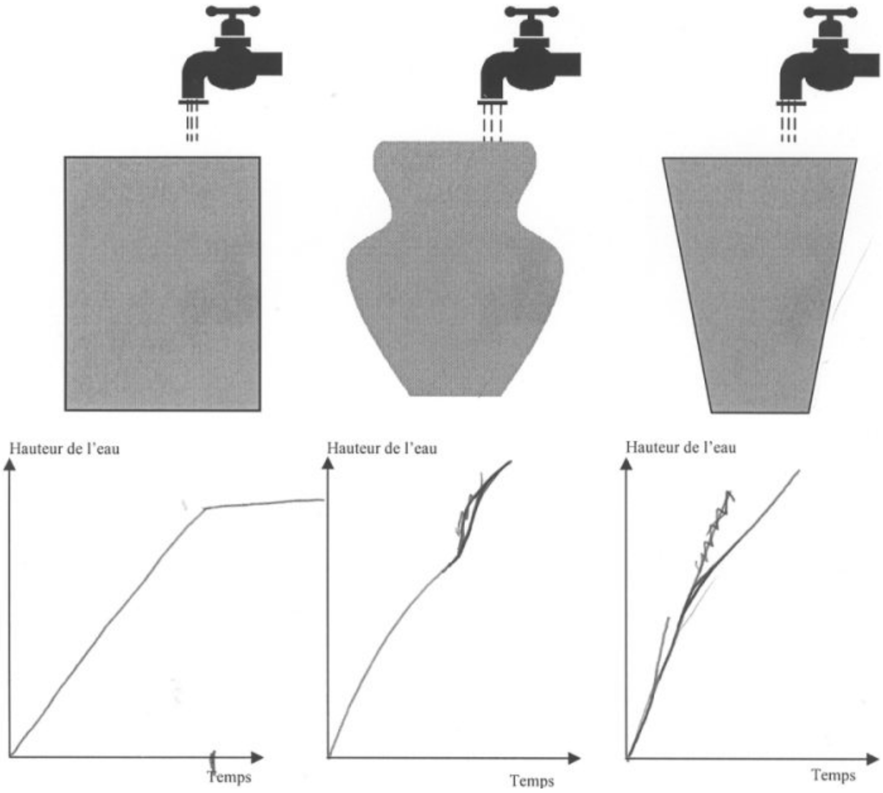
S Die Anzahl der Arbeiter hier, die benötigte Arbeitszeit für einen Auftrag. […] Also nein. Also nein. Weil normalerweise […] je mehr Arbeiter, desto mehr nimmt die Zeit ab.

Schließlich findet sie die richtige Lösung mit folgender Begründung

S Weil, je mehr das Gewicht ansteigt, desto mehr steigt auch der Preis.

Die erste Teilaufgabe der Aufgabe Kurvenzuordnen fällt ihr deutlich schwerer, was insbesondere nichtlinearen Graphen liegt, den sie ungewöhnlich findet.

Trotz dieser Schwierigkeiten mit graphischen Darstellungen nichtlinearer Zusammenhänge kann sie ihre gut ausgeprägte Kovariations-Grundvorstellung dazu nutzen, um die Aufgabe Gefäße richtig zu lösen.



Beim ersten Gefäß zeichnet sie eine Gerade als Graphen und stellt fest:

S Also, er wächst normal.

Auf die Frage wie der Graph weiterzuzeichnen ist, wenn das Gefäß voll ist, antwortet sie schnell und führt den Graphen richtig fort.

S Also dann bleibt er gleich

Beim dritten Gefäß stellt sie sofort fest, dass der Graph schneller wächst als der Graph des ersten Gefäßes, da das Gefäß unten kleiner ist. Daraufhin zeichnet sie eine steilere Gerade. Die wechselnde Breite des Gefäßes gibt ihr allerdings zu denken. Nach einigem Nachdenken erkennt sie, dass die Geschwindigkeit des Wasseranstiegs am Ende kleiner ist als am Anfang. Zuerst zeichnet sie zwei durch einen Knick verbundene Geradenstücke. Auf die Nachfrage, wie dieser Knick nun zu verstehen sei, antwortet sie Folgendes:

S Nein, es biegt sich […] die ganze Zeit.

I OK. Sehr gut.

S Weil die Vase immer so ist. Also biegt es sich die ganze Zeit.

Zuletzt erstellt sie noch den Graphen des zweiten Gefäßes. Da die Interviewzeit schon verstrichen ist, kann sie den Graphen nur noch schnell skizzieren und kurz erklären. Dabei wird deutlich, dass sie mit Hilfe dessen, was sie sich beim dritten Gefäß überlegt, eine korrekte graphische Darstellung erstellen kann.

Schon bei der Bearbeitung der Aufgabe Schlitten und Kurvenzuordnen zeigt die Schülerin, dass sie eine gut ausgeprägte Kovariations-Grundvorstellung von funktionalen

Abhängigkeiten hat. Ebenso wie die Schülerin aus Abschnitt 9.3.2 hat sie noch nicht mit nichtlinearen Zusammenhängen gearbeitet. Bei der ersten Teilaufgabe der Aufgabe Kurvenzuordnen kann gesehen werden, dass derartige Zuordnungen keinen großen Raum in ihrem concept image einnehmen. Dieses Defizit im concept image kann sie aber mit Hilfe der Kovariations-Grundvorstellung füllen. Innerhalb kurzer Zeit versteht sie den funktionalen Zusammenhang bei der Aufgabe Gefäße und kann den Graph korrekt erstellen. Dieser Schritt ist der Schülerin in Abschnitt 9.3.2 nicht gelungen. Gut ausgeprägte Grundvorstellungen ermöglichen es den Schülern neue Bereiche selbstständig korrekt zu erschließen.
Eine gewisse Stärke der französischen Schüler bei der Untersuchung von Kovariation ist schon in den Analysen des Curriculums erwartet worden.

Neben der Wichtigkeit einer gut ausgeprägten Kovariations-Grundvorstellung zeigt dieses Interview auch, dass Schüler in manchen Fällen spezifische Stärken ausbilden und in anderen Bereichen große Schwierigkeiten haben. So kann diese Schülerin mit Hilfe der Kovariations-Grundvorstellung gut Aufgaben lösen, in denen das graphische Register eine Rolle spielt. Bei der Aufgabe Kerze, die im algebraischen Register gelöst werden muss und auch die Zuordnungs-Grundvorstellung anspricht, stößt sie sehr schnell an ihre Grenzen.

9.3.4 Kausalität

In Abschnitt 3.3.1 werden mögliche Schwierigkeiten mit den Bezeichnungen *Abhängigkeit* und *dépendence* angesprochen: Mit dem Wort Abhängigkeit kann eine gewisse Kausalität verbunden werden, was zu Missverständnissen führen kann. So wird von einigen Schülern beispielsweise der Kurs einer Aktie als nicht abhängig von der Zeit gesehen, da er nicht voraussagbar ist.
Mit einem Ausschnitt aus einem Interview, das mit einem französischen Schüler aus der 3^e geführt wurde, kann dies nun genauer illustriert werden.

Der Schüler hat mit den meisten Interviewaufgabe Schwierigkeiten und löst sie nur selten richtig. Bei der Bearbeitung der zweiten Teilaufgabe der Aufgabe Kurvenzuordnen schließt er die Antwortmöglichkeit *Lebensalter* → *Körpergröße* mit folgender Überlegung aus.

S […] Die Körpergröße variiert in Abhängigkeit vom Individuum. Also kann man nicht wissen. Zum Beispiel kann eine Person mit 15 Jahren groß sein, während eine andere Person mit 15 Jahren kleiner ist.

I […] Warum kann das, warum kann das nicht zu einer Person passen?

S Weil die Größe variiert. Es ist nicht dieselbe, im Bezug auf zwei Personen

Der Schüler lehnt das Beispiel zuerst ab, da der Graph nicht allgemein für alle Personen gelten kann. Schon hier können erste Anzeichen der Kausalität ausgemacht werden, die der Schüler implizit fordert. Nachdem ihn der Interviewer darauf hinweist, dass es sich auch um den Graphen für eine bestimmte Person handeln kann, drückt der Schüler seine Gedanken deutlicher aus.

I Ja, aber das ist der Graph für eine Person. […]. Zum Beispiel meiner. […]. Ist das möglich?

S [..] Also nein. Da, man weiß, man weiß nicht wie die Person wachsen wird. […] Man weiß nicht ob er groß sein wird. Bei der Geburt weiß man nicht ob er groß oder klein sein wird.

I OK. Also das was dich stört ist

S ist dass, also dass, zum Beispiel bei diesem Alter

I	Ja

S	hier kann man nicht sagen, dass man bei dieser Höhe sein wird, dass man so groß sein wird.

I	OK. Also, weil es nicht vorhersehbar ist.

S	Genau.

Die Größe einer Person in einem bestimmten Alter kann nicht durch eine Formel vorhergesagt werden. Der Schüler fasst die betrachtete funktionalen Situation anscheinend so auf, dass die Größe einer Person von deren Alter vorbestimmt ist, also durch das Alter eindeutig festgelegt sein muss. Würde er auch willkürliche Zuordnungen mit Funktionen assoziieren, so könnte er die Auswahlantwort nicht aus diesem Grund ablehnen.
Diese Beschränkung auf kausale Zusammenhänge und die Ablehnung von willkürlichen Zuordnungen kann auch bei der historischen Entwicklung des Funktionsbegriffes beobachtet werden (siehe Kapitel 2). Sie wurde als epistemologische Hürde identifiziert (siehe Abschnitt 4.3). Als mögliche Ursache sind aber auch sprachliche Einschränkungen durch die Begriffe *Abhängigkeit* und *dépendence* zu nennen, die in beiden Landessprachen üblicherweise eine gewisse Kausalität beinhalten.
Anhand dieses Interviewausschnittes kann gesehen werden, dass eine Einschränkung des concept images auf Funktionen, die keine willkürlichen Zuordnungen sind, auch bei der Betrachtung von gebräuchlichen funktionalen Abhängigkeiten zu Schwierigkeiten führen kann.

9.4 Zusammenfassung der Ergebnisse

Mit diesem Kapitel können fehlerhafte Sichtweisen, die aus der internationalen Forschung bekannt sind, erwartete Einschränkungen des concept images aber auch die Stärken von gut ausgebildeten Grundvorstellungen dokumentiert werden.

Exemplarisch wird verdeutlicht, wie wichtig eine breite Basis an bekannten Funktionstypen und die aktive Nutzung von Kovariations- und Zuordnungs-Grundvorstellung für den Umgang mit funktionalen Situationen im Alltag sind. Eine funktionale Denkweise ist erst dann in zufrieden stellendem Maße ausgebildet, wenn keine starken Einschränkungen im concept image, wie in Abschnitt 9.3.2, mehr vorliegen. Beide oben genannten Grundvorstellungen sollen für eine selbstständige Erarbeitung von bis dahin unbekannten Situationen genutzt werden können (vgl. Abschnitt 9.3.3). Auch typische Fehler, wie die aus den Abschnitten 9.3.1 und 9.3.4, können durch eine häufige Arbeit mit verschiedenen funktionalen Situationen und den dazu gehörigen Grundvorstellungen vermieden werden.

Die betrachteten Interviewaufgaben veranschaulichen zusätzlich die Fülle von Situationen, für deren Bearbeitung eine funktionale Denkweise gebraucht wird. Je besser ein Schüler die funktionale Denkweise beherrscht, desto mehr Situationen aus dem konzeptuellen Feld der funktionalen Denkweise wird er erfolgreich bearbeiten können.

Mehrere der in den vorangegangenen Kapiteln gestellten Fragen konnten beantwortet werden. Auftretende Schwierigkeiten wurden auf Defizite im concept image und insbesondere Grundvorstellungsprobleme zurückgeführt. Manche von ihnen, wie die ikonische Sichtweise der graphischen Darstellung von Funktionen, treten in beiden Ländern auf. Andere Schwierigkeiten können an curriculare Besonderheiten festgemacht werden.

So wurde bei den Analysen der Curricula eine gewisse proportionale Fixierung von französischen Schülern erwartet. Tatsächlich zeigt sich in den betrachteten Interviews, dass diese Einschränkung des concept image auftritt und dass dadurch Probleme entstehen. Die gut ausgeprägte Kovariations-Grundvorstellung mancher interviewter französischer Schüler erweist sich als großer Vorteil. Dadurch entstehende Einschränkungen konnten nicht festgestellt werden. Lediglich die Weigerung eines Schülers solche Zuordnungen als funktionale Abhängigkeiten aufzufassen, die über keine algebraische Darstellung verfügen, kann möglicherweise auf Probleme mit der Zuordnungs-Grundvorstellung zurückgeführt werden.

Im nächsten Kapitel werden einige Veränderungsvorschläge für die jeweiligen Curricula gemacht, die sich aus den Analysen dieser Arbeit ergeben.

10 Veränderungsvorschläge, Zusammenfassung und Perspektiven

In diesem Kapitel sollen einige Veränderungsvorschläge für die Curricula von Deutschland und Frankreich vorgestellt werden, die sich aus den Analysen dieser Arbeit ergeben. Anschließend folgt eine Zusammenfassung der Ergebnisse und es wird ein Ausblick auf mögliche Forschungsfragen gegeben, die sich durch die vorliegende Arbeit eröffnet haben.

10.1 Veränderungsvorschläge

Im Laufe der Kapitel wurde eine Reihe von Punkten herausgearbeitet, die zu Schwierigkeiten auf dem Weg der Ausbildung der funktionalen Denkweise führen können. Daraus lassen sich Vorschläge ableiten, wie die jeweiligen Curricula dahingehend verändert werden können, dass diese Probleme nicht mehr, oder zumindest nur noch in abgeschwächter Form auftreten. Einige dieser Vorschläge decken sich mit denen, die in Abschnitt 4.5 zusammengefasst wurden.

Im Abschnitt 4.2.2 wurde die Forschung zur ikonischen Sichtweise der graphischen Darstellung funktionalen Abhängigkeiten dargestellt. In Kapitel 9 konnte gezeigt werden, dass diese Sichtweise tatsächlich auch jetzt in Deutschland und Frankreich nachgewiesen werden kann. Aufgaben, die dieser Sichtweise vorbeugen, sind in den hier untersuchten Lehrbüchern nur wenige zu finden. Hier bietet es sich an, gezielt Aufgaben einzusetzen, welche die Schüler auf diese Schwierigkeit vorbereiten. Dies wird beispielsweise in einigen Schulbüchern aus Kanada gemacht, wo unter Mitwirkung von Claude Janvier entsprechende Aufgaben entwickelt wurden.

Was den Zeitpunkt und die Art der Funktionsdefinition betrifft, so wurde in Abschnitt 3.3.3 gefordert, Funktionen als zusammenfassenden Oberbegriff für bis dahin gesehene Arten funktionaler Abhängigkeiten zu definieren. In keinem der hier betrachteten Lehrpläne ist dies so umgesetzt worden. Das Beherrschen der Funktionsdefinition ist kein zentraler Aspekt der funktionalen Denkweise, weswegen in dieser Arbeit keine weiteren Untersuchungen hierzu durchgeführt wurden. Dennoch erscheint es wichtig, Konflikte zwischen dem concept image und der concept definition zu vermeiden, die insbesondere zum Phänomen der compartmentalization führen können. Trotz der noch zu leistenden Forschungsarbeit zur Nutzung und Beherrschung der Funktionsdefinition in Deutschland und Frankreich wird die Forderung nach einer späten, zusammenfassenden Definition zu den Veränderungsvorschlägen dieser Arbeit aufgenommen.
In besonderem Maße gilt diese Empfehlung für das bayerische Gymnasium, wo die Funktionsdefinition in der 8. Klasse eingeführt wird. Bei dieser Einführung wird mit einer Fülle von Beispielen versucht, die Ausbildung von Einschränkungen des concept images zu vermeiden und den Funktionsbegriff als übergreifendes Konzept zu präsentieren. Vor dem Hintergrund vieler bekannter Forschungsergebnisse (siehe Abschnitt 3.3.3) ist jedoch fraglich, ob diese Vorgehensweise zum Erfolg führen kann, so dass sich hier ein anderes, zeitlich gestrecktes Vorgehen anbietet.

Die Forderung nach einer späten Definition sollte aber nicht dazu führen, dass der Funktionsbegriff überhaupt nicht genutzt wird. So lernen etwa Schüler, die ihre Schullaufbahn mit dem bayerischen Hauptschulabschluss beenden, keine Funktionsdefinition kennen. Sie arbeiten auch nur mit linearen und umgekehrt proportionalen Zusammenhängen, so dass sie die Ausbildung einer umfassenden funktionalen Denkweise kaum möglich ist. Ein Ausbau der Inhalte in Bezug auf die funktionale Denkweise erscheint deshalb wünschenswert.

Aus Sicht dieser Arbeit scheint die Art der Funktionsdefinition, die in der bayerischen Realschule genutzt wird, als erste Heranführung an Funktionen ungeeignet. In Abschnitt 3.3 wurde gezeigt welche Schwierigkeiten durch die anfängliche Nutzung von einer Funktionsdefinition über Relationen entstehen können. In sämtlichen anderen Schularten von Deutschland und Frankreich wurde die mengentheoretische Herangehensweise im Laufe der letzten Jahrzehnte wieder aus den Lehrplänen entfernt (Abschnitt 6.2). Dieser Schritt ist in der bayerischen Realschule überfällig. Die Forderung wird noch durch die Tatsache bestärkt, dass Relationen in der Realschule fast ausschließlich bei der Einführung von Funktionen genutzt werden. Dadurch wird eine compartmentalization des concept images der Schüler gefördert.

Neben Veränderungen bei der Art und dem Zeitpunkt der Funktionsdefinition können aus dieser Arbeit auch Vorschläge zu den eingeführten Funktionstypen abgeleitet werden. Durch die Analysen aus Kapitel 7 wird gezeigt, dass mit den Funktionstypen, die den bayerischen Hauptschülern beim Hauptschulabschluss bekannt sind, eine tragfähige funktionale Denkweise kaum ausgebildet werden kann. Aber auch Realschüler, die nicht den mathematisch-technischen Zweig besuchen, werden hiermit bis zur 10. Klasse Schwierigkeiten haben. Bis dahin lernen auch sie nur sehr wenige Funktionstypen kennen. Eine breitere Hinführung wäre dort wünschenswert.

Auch im französischen Curriculum wird sehr spät dem systematischen Untersuchen einer Vielzahl von Funktionstypen begonnnen (siehe Kapitel 7). Die Zentrierung auf proportionale und später lineare funktionale Zusammenhänge schränkt das concept image der Schüler ein, was auch mit Hilfe der qualitativen Analysen illustriert werden konnte. Möglicherweise zu erwartende besondere Stärken beim Umgang mit proportionalen und linearen Situationen konnten zumindest in den quantitativen Analysen dieser Arbeit nicht nachgewiesen werden. Es stellt sich daher die Frage, warum den Schülern nicht schon im Collège mehr Funktionstypen an die Hand gegeben werden. In den Interviewbeispielen aus der 3^{e} wurde gezeigt, dass sie beim Arbeiten mit nichtlinearen Situationen erkennen, dass sie hier einen neuen Funktionstyp für die Modellierung brauchen, aber in ihrem concept image keine weiteren zur Verfügung haben.

In beiden Ländern werden hauptsächlich stetige Zuordnungen zwischen reellen bzw. rationalen Zahlen betrachtet. Untersuchungen anderer funktionaler Abhängigkeiten fallen kaum ins Gewicht und es stellt sich die Frage, inwieweit diese eine Einschränkung der concept images verhindern können. Andererseits ist zu klären, ob eine Einschränkung in der Sekundarstufe überhaupt verhindert werden soll, oder ob eine eingeschränkte Sichtweise von Funktionen hier ausreicht (siehe Abschnitt 3.3.3). Anderenfalls sollte mehr Gewicht auf wiederholt auftretende Beispiele gelegt werden, in denen nichtstetige Funktionen und Funktionen, die nicht zwischen reellen Zahlen definiert sind, gesehen werden.

In der bayerischen Hauptschule wird die algebraische Darstellung funktionaler Abhängigkeiten erst in der 10. Klasse eingeführt. Dies ist sehr spät, da viele Schüler die Hauptschule zu diesem Zeitpunkt bereits verlassen haben. Um auch diesen Schülern die Verbindung von Gleichungen und Funktionen zu ermöglichen bietet sich eine frühere Einführung der Darstellung im algebraischen Register an.

In den Schulbüchern der bayerischen Realschule und von Frankreich nimmt der Anteil von Aufgaben zu Realsituationen in den höheren Klassenstufen deutlich ab. Da viele Funktionstypen erst in diesen Jahrgangsstufen eingeführt werden, ist auch dort eine Betrachtung von Realsituationen für die Ausbildung der funktionalen Denkweise wichtig. Mit Aufgaben zu Realsituationen kann gewährleistet werden, dass die funktionale Denkweise auch tatsächlich von den Schülern angewendet werden kann.

Abschließend soll auf Veränderungsmöglichkeiten in Bezug auf die genutzten Grundvorstellungen zu Aspekten funktionalen Denkens eingegangen werden.
In der bayerischen Realschule wird nur sehr wenig mit der Kovariations-Grundvorstellung gearbeitet. Ein Grund dafür kann in der Funktionsdefinition über Relationen gesehen werden. Für ein effektives Arbeiten mit allen funktionalen Situationen ist eine gut ausgeprägte Kovariations-Grundvorstellung von Vorteil, was auch mit einem Interviewbeispiel dokumentiert werden konnte (siehe Abschnitt 9.3.3). Eine stärkere Betrachtung dieses Aspektes von Funktionen erscheint deshalb wünschenswert.
Im potentiellen Curriculum Frankreichs wird dagegen häufig die Kovariations-Grundvorstellung angesprochen. Im Lehrplan der 2de fällt allerdings auf, dass keine qualitative Untersuchung der Variation vorgenommen wird. Es wird meist nur die Variationsrichtung betrachtet und in eine Variationstabelle übertragen. Für eine gut ausgeprägt funktionale Denkweise erscheint es aber von großer Bedeutung, dass das Wachstumsverhalten von Funktionen beurteilt und mit dem anderer Funktionen verglichen werden kann.

In einer Übersicht können die soeben genannten Veränderungsvorschläge folgendermaßen dargestellt werden:

Länderübergreifend:

- Mehr Aufgaben, die bekannte Fehlertypen, wie die ikonische Sichtweise von graphischen Darstellungen, thematisieren.
- Einführung der Funktionsdefinition als zusammenfassender Oberbegriff und nicht als Konzept, dass erst im Nachhinein mit Inhalten gefüllt wird.

Deutschland – Bayern

Hauptschule:

- Betrachtung weiterer Funktionstypen, auch wenn diese nicht ausführlich studiert werden.
- Nutzung der algebraischen Darstellung vor der 10. Klasse

- Einführung einer Funktionsdefinition in der 9. Klasse

Realschule:

- Abschaffung der mengentheoretischen Herangehensweise
- Intensivere Arbeit mit Realsituationen
- Verstärkte Nutzung der Kovariations-Grundvorstellung und Betrachtung von Variation
- In den nichtmathematischen Zweigen: Arbeiten mir mehr Funktionstypen

Gymnasium:

- Vermeidung der kompakten Einführung des Funktionsbegriffs, um eine harmonische Entwicklung von concept definition und concept image zu ermöglichen.

Frankreich

- Früheres Studium von nichtlinearen Zusammenhängen
- Verstärkte Untersuchung von Realsituationen in den oberen Klassenstufen
- Qualitative Betrachtung der Variation und nicht nur Untersuchung von Variationsrichtung

In den neuen Lehrplänen beider Länder wurden einige dieser Vorschläge bereits umgesetzt (siehe Kapitel 7). Die meisten von ihnen wurden jedoch noch nicht oder zumindest nicht in ihrer vollen Breite implementiert. Aus Sicht dieser Arbeit bleibt somit noch einiges zu tun, um für eine optimale Unterstützung der Schüler bei der Ausbildung der funktionalen Denkweise zu sorgen.

10.2 Zusammenfassung

Zu Beginn der vorliegenden Arbeit kann mit Hilfe des Studiums von deutschen, französischen und anderen internationalen Theoriekonzepten eine theoretische Basis für den Begriff *funktionales Denken* geschaffen werden. In diesem Zusammenhang werden Verbindungen zwischen den verschiedenen theoretischen Ansätzen aufgezeigt und erstellt, so dass dadurch ein Beitrag zur internationalen Vernetzung der Forschung geleistet werden kann.
Durch Analysen der historischen Entwicklung des Funktionsbegriffs und durch Betrachtungen der vorliegenden Forschungsergebnisse wird gezeigt, dass die Entwicklung der funktionalen Denkweise von vielen bekannten Hindernissen und zu erwartenden Schwierigkeiten begleitet wird. Im Anschluss wird mit der Analyse der Curricula untersucht, wie in Deutschland bzw. Bayern und Frankreich den zu erwartenden Schwierigkeiten vorgebeugt wird und welche Stärken bzw. Defizite bei den Schülern in beiden Ländern am Ende der Sekundarstufe I zu erwarten sind. Mit quantitativen und qualitativen Analysen können schließlich einige dieser starken bzw. schwachen Punkte beider Länder empirisch dokumentiert werden.

Der Ausgangspunkt dieser Arbeit ist die Feststellung, dass im Alltag der Umgang mit vielen funktionalen Zusammenhängen gefordert wird, dabei aber oftmals Probleme auftreten. Diese Schwierigkeiten werden insbesondere durch die Ergebnisse der deutschen Schüler auf der Subskala *Veränderung und Beziehung* von PISA 2003 deutlich. Daraus ergibt sich die Frage, wie den Schülern so geholfen werden kann, dass sie besser mit funktionalen Abhängigkeiten umgehen können, oder spezieller, dass sie eine adäquate funktionale Denkweise entwickeln. Bei der Suche nach Veränderungsmöglichkeiten bietet sich die Analyse der Vorgehensweise in anderen Ländern als Quelle für neue Ideen an. Durch diese Überlegungen ist der Rahmen dieser Arbeit abgesteckt worden.

Im ersten Kapitel wird *funktionales Denken* definiert. Den Begriff *funktionales Denken* wird seit Anfang des 20. Jahrhunderts gebraucht. Er taucht im Rahmen des Meraner Lehrplans auf und umfasst dort nahezu alle Kernbereiche des Unterrichts. Außerdem wird die Forderung nach einer Neuausrichtung des gesamten Mathematikunterrichts formuliert. Dieser Lehrplan tritt allerdings nie in Kraft, was eine Neuausrichtung des Begriffes zur Folge hatte.
Mehrere Autoren definieren in der Folge funktionales Denken auf verschiedene Art und Weise. Besonders zu nennen ist dabei Hans-Joachim Vollrath, der funktionales Denken und die damit assoziierten Fähigkeiten genauer beschreibt. Seine Definition dient als Grundlage für folgende Definition, die in der vorliegenden Arbeit genutzt wird.

Unter funktionalem Denken versteht man eine Denkweise, die typisch für den Umgang mit funktionalen Abhängigkeiten ist.

Sie äußert sich insbesondere in folgenden Fähigkeiten:

1) Funktionale Abhängigkeiten zwischen Größen können in allen üblichen Darstellungsformen festgestellt, angegeben und erzeugt werden.
2) Hypothesen über die Art der funktionalen Abhängigkeit, insbesondere den Einfluss von Änderungen, können gebildet und kontrolliert werden.

Diese Definition von funktionalem Denken deckt sich in weiten Teilen mit den Anforderungen, die durch die PISA-Subskala *Veränderung und Beziehung* erfasst werden.

Im zweiten Kapitel wird die historische Entwicklung des Funktionsbegriffs dargestellt. Einige der Schwierigkeiten, auf die Schüler bei der Arbeit mit funktionalen Zusammenhängen stoßen, lassen sich schon bei dieser historischen Entwicklung identifizieren. Viele Einschränkungen des Funktionskonzeptes wurden im Laufe eines sich über viele Jahrhunderte erstreckenden Prozesses abgelegt, sodass sich die heute bekannte Funktionsdefinition in ihrer Allgemeinheit entwickeln konnte. Ein entscheidender Faktor dieses Prozesses war die Nutzung der verschiedenen Darstellungen von Funktionen und der Verknüpfungen zwischen ihnen. Dabei zeigt sich aber auch, dass Darstellungen in einem Darstellungsregister (etwa dem algebraischen, dem graphischen oder dem tabellarischen Register) auch zu einer Hürde werden können, wenn nicht ausreichend zwischen dem mathematischen Konzept und seiner Darstellung unterschieden wird.

Im dritten Kapitel wird zuerst der theoretische Rahmen dieser Arbeit abgesteckt. Dabei werden drei wesentliche Ziele verfolgt. Erstens soll die solide theoretische Fundierung herausgestellt werden, die bei der Wahl der Definition von funktionalem Denken ausschlaggebend ist. Zweitens werden Werkzeuge für die später folgenden Analysen entwickelt. Das dritte Ziel des theoretischen Rahmens ist es, deutsche, französische und weitere internationale Theorienkonzepte, die sich auf den hier untersuchten Bereich beziehen, gegenüberzustellen und miteinander in Verbindung zu setzen.

Bei der oben genannten Definition von funktionalem Denken wird ein großes Gewicht auf die verschiedenen Darstellungen von funktionalen Abhängigkeiten gelegt. Dabei sind auch die Übersetzungen zwischen den Darstellungen implizit mit eingeschlossen. Diese Betonung von Darstellungen und Übersetzungen geht auf die Arbeiten von Duval, Lesh und Kaput zurück. Eine der Grundideen von Duval ist es, dass eine mathematische Idee (etwa Funktion) erst dann begriffen und von seinen Darstellungen losgelöst werden kann, wenn sie in mehreren Darstellungsregistern bekannt ist und Übersetzungen zwischen den Darstellungen durchgeführt werden können. Anderenfalls besteht die Gefahr einer Identifizierung der mathematischen Idee mit ihrer Darstellung. Die Arbeiten von Lesh und Kaput unterstreichen aus anderen Blickwinkeln die daraus folgende Forderung nach der Arbeit in mehreren Registern.

Mit Hilfe der theoretischen Konzepte von Vergnaud kann ein konzeptuelles Feld für die funktionale Denkweise definiert werden. Dadurch erhält sie einen theoretischen Rahmen und es wird ihr eine Menge von Situationen zugeordnet, für deren Bearbeitung sie vorausgesetzt wird.

Die Grundvorstellungstheorie von vom Hofe und die in dieser Arbeit neu definierten Grundkenntnisse machen eine konkrete Füllung der funktionalen Denkweise mit Vorstellungen und Kenntnissen möglich. Die Grundvorstellungen sind in zwei Gruppen aufgeteilt: die Grundvorstellungen zu Aspekten funktionalen Denkens (etwa Zuordnungs-Grundvorstellung oder Kovariations-Grundvorstellung) und die Grundvorstellungen zu den Darstellungsformen (etwa Grundvorstellung funktionaler Abhängigkeiten als Formel, Grundvorstellung funktionaler Abhängigkeiten als Graph). Die Grundkenntnisse erlauben eine Verbindung von Grundvorstellungen mit konkreten mathematischen Inhalten. In einer Liste werden Beispiele von Grundkenntnissen für spezielle Funktionstypen angegeben.

Mit den Theorien von Dubinsky und Sfard kann der Aktions- und Prozesscharakter von Funktionen mit funktionalem Denken verbunden werden und durch die Objekt-Sichtweise, bzw. Reifizierung deren Grenzen aufgezeigt werden.

Für die in späteren Kapiteln dargestellten Analysen erweisen sich die Arbeiten von Vinner von sehr großem Nutzen. Er definiert concept definition und concept image, die eine Beschreibung dessen erlauben, was Schüler mit bestimmten mathematischen Konzepten (im vorliegenden Fall Funktionen) verbinden. Mögliche Einschränkungen der concept images können schon bei der Analyse der Curricula identifiziert und empirisch, beispielsweise mit Hilfe von Interviews, dokumentiert werden.

Eine andere Herangehensweise wird von Sierpinska gewählt. Ihre Arbeiten zu epistemologischen Hürden des Funktionsbegriffs erlauben es Hürden, die in der historischen Entwicklung aufgetreten sind, mit aktuellen Schwierigkeiten von Schülern zu verbinden.

Der zweite und der dritte Teil des dritten Kapitels beschäftigen sich im Detail mit den verschiedenen Darstellungen funktionaler Abhängigkeiten, Übersetzungen zwischen ihnen und mit der Funktionsdefinition. Erst ein detailliertes Verständnis von diesen ermöglicht es, die in den späteren Kapiteln folgenden Analysen durchzuführen.

Darstellungen funktionaler Abhängigkeiten im algebraischen, im graphischen und im tabellarischen Register, sowie im Register der Sprache werden auf ihre jeweiligen Eigenschaften hin untersucht und anschließend Funktionen als übergreifende Idee hinter den Darstellungen herausgestellt. Es zeigt sich, dass mit Darstellungen in den unterschiedlichen Registern verschiedene Aspekte von Funktionen betont werden können und dass bei allen Registern auch Einschränkungen bei der Nutzung zu erwarten sind.
Eine detaillierte Betrachtung des Ablaufs von Übersetzungsvorgängen bei der Arbeit mit Funktionen zeigt, dass eine Vielfalt unterschiedlicher Übersetzungsvorgänge für eine effektive Nutzung der funktionalen Denkweise benötigt wird.
Bei der Untersuchung zur Funktionsdefinition werden zuerst die verschiedenen Aspekte, die bei Funktionsdefinitionen betont werden können, herausgestellt. Dabei handelt es sich im Grunde um den Gegensatz zwischen Zuordnung und Kovariation, der aber mit einer Vielzahl von unterschiedlichen Begriffen belegt wird, die jeweils spezielle Aspekte in den Vordergrund stellen. Im Anschluss wird auf die Schwierigkeiten hingewiesen, die sich bei der Nutzung einer mengentheoretischen Funktionsdefinition ergeben können. Schließlich wird auf den Zeitpunkt der Einführung einer Funktionsdefinition eingegangen. Hierbei wird in Übereinstimmung mit anderen Autoren die Position vertreten, dass eine späte Nutzung der mathematisch korrekten Funktionsdefinition von Vorteil sein kann. Damit wird den Schülern die Möglichkeit gegeben, eine adäquate concept definition in Einklang mit dem concept image zu entwickeln.

Im darauf folgenden Kapitel vier werden die Ergebnisse früherer Untersuchungen zum Funktionsverständnis zusammengefasst und mit dem theoretischen Konzept dieser Arbeit verbunden. Ziel dabei ist es, bereits bekannte Problemfelder zu identifizieren, damit diese bei den Analysen der Lehrpläne, Schulbücher und Schülerantworten besonders berücksichtigt werden können.

Im ersten Teil des Kapitels werden Untersuchungen zum concept image und zur concept definition betrachtet. Zu den typischen Einschränkungen des concept images gehören beispielsweise Einschränkungen der Darstellungsformen (etwa bestimmte Aspekte von Graphen oder eingeschränkte algebraische Darstellungsmöglichkeiten) und Einschränkungen auf bestimmte Aspekte funktionaler Abhängigkeiten (wie etwa Zuordnungs- oder Kovariationsaspekt). Bekannte problematische concept definitions sind Einschränkungen der der Breite der Definition (es werden z.B. keine nicht linearen Zusammenhänge zugelassen) oder Definitionen, die eine Darstellungsform mit einbeziehen.
Inkonsistentes Antwortverhalten von Schülern bei ähnlichen Fragestellungen, ein Phänomen,

das nachweislich oft auftritt, kann häufig mit unterschiedlich ausgeprägten concept images und concept definitions erklärt werden.

Der folgende Teil des vierten Kapitels zeigt, dass eine Vielzahl von Untersuchungen nachweisen, dass Schüler teilweise große Schwierigkeiten mit den verschiedenen Übersetzungsvorgängen zwischen den Darstellungen funktionaler Abhängigkeiten haben, was zu einer Einschränkung der funktionalen Denkweise führen kann. Dabei wird speziell auf die ikonische Sichtweise von graphischen Darstellungen eingegangen.

Das Kapitel schließt mit einer Übersicht zu Verbesserungsvorschlägen, die von anderen Autoren zum Funktionsunterricht gemacht werden. Sie werden in drei Gruppen eingeteilt: die Vorschläge, die sich auf eine Einbindung der Realität beziehen, diejenigen, die eine veränderte Akzentsetzung im Funktionsunterricht fordern und denjenigen, die den Einsatz von Computern beinhalten. Dabei ist der letzte Punkt allerdings stark verkürzt dargestellt, da es sich hier um ein eigenständiges Forschungsgebiet handelt. Einige der Forderungen decken sich mit Vorschlägen in Abschnitt 10.1.

Im fünften Kapitel können die Forschungsfragen dieser Arbeit präzise formuliert werden. Die theoretischen Betrachtungen und die Analysen der bekannten Fehlertypen ermöglichen es zwei übergreifende Fragen jeweils in Komplexe spezifischer Detailfragen aufzuspalten. Diese übergreifenden Fragen sind:

Wie wird die Ausbildung der funktionalen Denkweise im intendierten und im potentiellen Curriculum von Deutschland und Frankreich unterstützt und gefördert?

In welchem Maße bilden die Schüler in Deutschland und Frankreich die funktionale Denkweise aus und inwieweit sind zu deren Anwendung fähig?

In den folgenden vier Kapiteln wird versucht diese Fragen möglichst umfassend zu beantworten. Dafür werden in den Kapiteln sechs und sieben das intendierte und das potentielle Curriculum von Deutschland (am Beispiel von Bayern) und Frankreich betrachtet. Mit diesen Analysen soll die erste der oben genannten Fragen beantwortet werden.
Zur Beantwortung der zweiten Frage werden in den Kapiteln acht und neun die PISA Subskala *Veränderung und Beziehung*, die Längsschnittstudie PALMA und eine in beiden Ländern durchgeführte Interviewstudie quantitativ und qualitativ ausgewertet. Dabei werden einige der nach den Analysen der vorangegangenen Kapitel erwarteten Stärken und Schwächen in der Praxis zu nachgewiesen.

Im sechsten Kapitel wird zunächst gezeigt, dass eine grundsätzliche Vergleichbarkeit von Deutschland und Frankreich besteht. Es bestehen keine Wesentlichen Unterschiede in Bezug auf Größe, Wirtschaftsleistung, Bildungsausgaben und Anteil der Schüler mit Migrationshintergrund. Anschließend wird ein kurzer Überblick über das Schulsystem beider Länder gegeben. Hier zeigen sich einige Unterschiede, die bei der Durchführung der Analysen und der Interpretation der Ergebnisse berücksichtigt werden müssen. So sind in

Deutschland alle drei Schularten in getrennten Analysen zu betrachten, da sie drei weitestgehend von einander unabhängige Bildungsgänge darstellen. Bei der Betrachtung der Ergebnisse von PISA 2003 ist zu beachten, dass 15-jährige französische Schüler etwas länger die Schule besucht haben als 15-jährige deutsche Schüler und demzufolge oftmals schon in einer höheren Klassenstufe sind.

Anschließend folgt eine Übersicht über die historische Lehrplanentwicklung in beiden Ländern. Hier zeigt sich, dass die Entwicklung weitestgehend parallel verläuft. Funktionen werden am Anfang des 20. Jahrhunderts in die Lehrpläne aufgenommen und etablieren sich im Laufe der Zeit immer mehr. In den 70er Jahren wird in der Phase der *Neuen Mathematik* mit Relationen gearbeitet, bevor diese ab dem Anfang der 80er Jahre wieder aus den Lehrplänen verschwinden. In beiden Ländern bestehen Traditionen bezüglich der Einführung und der Arbeit mit bestimmten Inhalten, die in den heutigen Lehrplänen wieder gefunden werden können.

Im restlichen Teil des sechsten Kapitels werden die Lehrpläne von Bayern und Frankreich, die im Jahr 2003 gültig waren, im Detail analysiert, verglichen und ein Ausblick auf die sich seitdem abzeichnende Entwicklung gegeben. Das Kapitel schließt mit einer tabellarischen Übersicht über die jeweils betrachteten Inhalte.

Zunächst fällt auf, dass die Lehrpläne von Frankreich wesentlich umfangreicher sind als die bayerischen Lehrpläne. Sie enthalten viel mehr Anweisungen für den Unterricht und auch deutliche Verbote für bestimmte Inhalte. Ein Grund für die Ausführlichkeit der französischen Lehrpläne mag sein, dass die Schulbücher in Frankreich vor dem Schuleinsatz nicht von den Behörden genehmigt werden müssen. Damit stellt der Lehrplan in Frankreich die wichtigste Möglichkeit der Einflussnahme auf das Curriculum dar.

Was Inhalte betrifft, so sind Ähnlichkeiten in der generellen Abfolge auszumachen. In beiden Ländern wird früh mit dem Betrachten von Proportionalitäten begonnen und alle Darstellungsregister werden eingeführt. Im Rahmen der Betrachtung von linearen Funktionen werden Funktionen nach einer mehrjährigen Phase der Arbeit mit Proportionalitäten definiert. Anschließend wird von den Schülern, beginnend mit quadratischen Funktionen, ein Grundschatz an Funktionen aufgebaut.
Bei der Analyse fallen jedoch auch Unterschiede in der Wahl und Abfolge der Inhalte und dem Zeitpunkt ihrer Einführung auf.
In Frankreich wird sehr lange nur mit Proportionalitäten und linearen Funktionen gearbeitet, wobei letztere erst in der 3^{e} (Jahrgangsstufe 9) dazukommen. Nichtlineare funktionale Zusammenhänge werden erst in der 2de (Jahrgangsstufe 10) ausgiebig studiert, nachdem der allgemeine Funktionsbegriff eingeführt wurde. In den bayerischen Lehrplänen wird im Gegensatz dazu sehr früh mit nichtlinearen funktionalen Zusammenhängen gearbeitet.
Bei der Betrachtung der bahandelten Funktionstypen fällt weiter auf, dass der französische Lehrplan eine spätere Einführung von weniger Funktionstypen vorsieht. Manche Funktionstypen, wie etwa die Exponentialfunktion tauchen dort überhaupt nicht auf.
Im Gegensatz zum deutschen sieht der französische Lehrplan eine intensive Befassung mit Variationen und damit der Kovariations-Grundvorstellung vor. Außerdem wird dort das algebraische Register nur langsam eingeführt und erst spät mit funktionalen Situationen verbunden.

Der Vergleich der zukünftigen Lehrplanentwicklungen zeigt, dass sich die Lehrpläne beider Länder sowohl im Aufbau, als auch bei den Inhalten nur wenig verändern. Insbesondere findet allem Anschein nach keine Entwicklung im Sinne einer Annäherung zu statt.

Eine Analyse dessen, wie die Inhalte der Lehrpläne tatsächlich in den Schulbüchern umgesetzt werden, wird im siebten Kapitel vorgenommen. Dabei kann auch untersucht werden, welche Darstellungsregister in den Aufgaben besonders genutzt werden und inwieweit die verschiedenen Grundvorstellungen zu den Aspekten der funktionalen Denkweise angesprochen werden.

Zusätzlich zu den Inhalten wird auch der Aufbau der Bücher verglichen. Hierbei fällt auf, dass schon im Aufbau der Schulbücher große Unterschiede zwischen Deutschland und Frankreich auszumachen sind.
So halten sich beispielsweise die Schulbücher in Bayern sehr eng an die Vorgaben des Lehrplans, da sich schon im Aufbau des Buches der Lehrplan widergespiegelt. Dies ist in Frankreich nicht der Fall. Darüber hinaus zeigt sich, dass die hier analysierten Schulbücher von Frankreich oftmals ein selbstständigeres Arbeiten der Schüler ermöglichen als die bayerischen Schulbücher.

Was die behandelten Funktionstypen betrifft, so stellt man fest, dass in beiden Ländern die algebraische Darstellung Leitfaden bei der Betrachtung von Funktionstypen ist.
In Frankreich wird im Gegensatz zu Bayern sehr lange mit proportionalen Zuordnungen und linearen Funktionen gearbeitet. Erst in der 2de werden andere Funktionstypen betrachtet. Schüler der 9. Klasse der Hauptschule haben somit eine größere Auswahl an bekannten Funktionstypen als die Schüler der 3^{e}, wo etwa die umgekehrt proportionalen Zusammenhänge noch nicht betrachtet werden.
Diese beschränkte Auswahl an Funktionstypen kann zu Einschränkungen der concept images führen. Außerdem sind in beiden Ländern die breite Mehrheit der betrachteten Funktionen stetige Zuordnungen zwischen reellen Zahlen. Auch dies wird die jeweiligen concept images prägen.

Auch der Zeitpunkt und die Art der formalen Funktionsdefinition sind in beiden Ländern sehr unterschiedlich gewählt. Während in den Schulbüchern von Frankreich Funktionen als Zuordnungen für alle Schüler definiert werden, sind in Bayern deutliche Unterschiede zwischen den Schularten zu finden.
In keinem der Länder wird der Funktionsbegriff als zusammenfassender Begriff nach dem Studium mehrerer Funktionstypen eingeführt, sondern spätestens nach der Betrachtung von linearen Zusammenhängen vorab definiert. Damit wird das Risiko eingegangen, dass sich eine vom concept image abgekapselte formale concept definition herausbildet.

Bei der Nutzung der Darstellungen in den verschiedenen Registern und der Übersetzungen zwischen ihnen sind Parallelen zwischen den beiden Ländern zu erkennen. Alle Darstellungen werden eingeführt und auch genutzt. Zentrale Untersuchungsgegenstand vieler Aufgaben sind Darstellungen im algebraischen und im graphischen Register und der Übergang zwischen ihnen.
In beiden Ländern ist eine enge Verbindung zwischen der Funktionsdefinition und der

algebraischen Darstellung auszumachen, so dass eine Verwechslung zwischen der mathematischen Idee und ihrer Darstellung möglicherweise gefördert wird.
Der Einfluss von Realsituationen in den Aufgaben nimmt in Frankreich und in der bayerischen Realschule in den höheren Klassenstufen ab, wohingegen er in der Hauptschule und am Gymnasium von Bayern groß bleibt.

In beiden Ländern wird sowohl mit der Zuordnungs-Grundvorstellung als auch mit der Kovariations-Grundvorstellung gearbeitet. Bei der Funktionsdefinition steht der Zuordnungsgedanke im Vordergrund. Mit Ausnahme der bayerischen Realschule wird in den Aufgaben auch die Kovariations-Grundvorstellung intensiv genutzt. In Frankreich ist diese Nutzung besonders stark.

Je nach Land und Schulart sind unterschiedliche concept images zu Funktionen am Ende der Sekundarstufe I zu erwarten. Dies ist bemerkenswert, da die Pflichtschulzeit für viele Schüler damit vorbei ist und somit in der Bevölkerung nicht von einem vergleichbaren Verständnis von funktionalen Abhängigkeiten ausgegangen werden kann.
Bezug nehmend auf die Definition funktionalen Denkens zeigt sich, dass die meisten Schüler in Deutschland und Frankreich am Ende der Sekundarstufe I nur eingeschränkt die Möglichkeit haben, diese auszubilden. Oft steht ihnen nur eine beschränkte Auswahl an Funktionstypen zur Verfügung, oder sie haben nur in eingeschränktem Maß mit Variationen gearbeitet.

Die beiden folgenden Kapitel beschäftigen sich mit der Frage, wie ob sich die festgestellten Unterschiede des intendierten und des potentiellen Curriculums tatsächlich in der Ausprägung der funktionalen Denkweise bei Schülern aus Deutschland und Frankreich nachweisen lassen.

Das achte Kapitel ist in zwei Teile unterteilt. Zunächst wird mit den Daten gearbeitet, die im Rahmen von PISA 2003 erhoben worden sind. Im zweiten Teil wird die Entwicklung der funktionalen Denkweise mit Hilfe einer Subskala der Längsschnittstudie PALMA dargestellt.

Nach einer kurzen Vorstellung von PISA und der Subskala *Veränderung und Beziehung* werden die Ergebnisse der deutschen und der französischen Schüler dargestellt. Es zeigt sich, dass die deutschen Schüler im Mittel etwas schlechter abschneiden als die französischen. Die Ergebnisse der bayerischen Schüler liegen allerdings über denen der französischen Schüler. Die Subskala *Veränderung und Beziehung* stellt eine relative Stärke der Schüler beider Länder dar und in Deutschland sind dort im Vergleich zu PISA 2000 signifikante Zuwächse zu verzeichnen. Es fällt allerdings auf, dass in Deutschland eine sehr breite Streuung der Ergebnisse zu verzeichnen ist, die sich auch durch große Überschneidungen zwischen den Schularten äußert.

Anschließend werden Analysen von Differential Item Functioning (DIF) in PISA 2003 durchgeführt. *Differentiell funktionierende Items* sind Items, bei denen sich in zwei Teilpopulationen Schwierigkeitsunterschiede ergeben, die sich nicht einfach durch verschiedene Fähigkeiten in der erhobenen Variable erklären lassen. Es ist wichtig, zwischen unterschiedlichem Erfolg bei einem Item wegen Unterschieden in der zu messenden Variable, und DIF zu unterscheiden, bei dem trotz kontrollierter Ausprägung der zu messenden

Variable unterschiedliche Ergebnisse erzielt werden.
Bei der Durchführung der Analysen erscheinen zwei Items mit einem substantiellen Effekt und vier weitere Items, deren Effektgröße sich von der restlichen Itemgruppe absetzt. Inhaltliche Betrachtungen dieser Items ergeben, dass die Abweichungen mir Hilfe von curricularen Besonderheiten erklärt werden können und damit die Erwartungen der Lehrplan und Schulbuchanalysen bestätigen.
Während sich die Auswirkungen mancher Unterschiede im Aufbau der Curricula nachweisen lassen, können bei anderen Unterschieden keine Auswirkungen beobachtet werden. So ergibt eine Betrachtung der Funktionstypen keinen klaren Vorteil für die Schüler eines der beiden Länder. Insbesondere haben zugrunde liegende proportionale und lineare Abhängigkeiten scheinbar keinen positiven Effekt auf die Leistungen der französischen Schüler, obwohl diese sie viel intensiver studiert haben als dies in Deutschland üblich ist.

Der zweite Teil des achten Kapitels beginnt mit einer Präsentation der Längsschnittstudie PALMA. Dieses Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik analysiert die Entwicklung der mathematischen Grundbildung mit jährlichen schriftlichen Erhebungen an einer bayerischen Stichprobe. Im Jahr 2002 ist mit den Erhebungen in den 5. Klassen der verschiedenen bayerischen Schularten begonnen worden. Für diese Arbeit konnten die Daten von 1.318 Schülern analysiert werden, die in jedem Jahr an diesem Test teilgenommen haben. Anschließend wird die PALMA-Subskala *Funktionales Denken* beschrieben und die Ergebnisse der Schüler vorgestellt. Die Aufgaben der Subskala *Funktionales Denken* begleiten die Schüler bei der Entwicklung der funktionalen Denkweise. Anfangs handelt es sich bei vielen Aufgaben um den Umgang mit den einzelnen Darstellungsregistern, während später Übersetzungsfähigkeiten und funktionale Situationen in den Mittelpunkt rücken. Die Subskala erlaubt es, die Entwicklung der funktionalen Denkweise der bayerischen Schüler zu erfassen und darzustellen.
Bei der Darstellung der Ergebnisse fallen zuerst die Abstände zwischen den Schularten auf. Schon in der 5. Klasse liegen die Leistungen der Hauptschüler sehr deutlich hinter den Leistungen der Schüler aus den beiden anderen Schularten. In den folgenden Klassenstufen vergrößert sich dieser Abstand weiter. Im Gegensatz dazu bleibt der Abstand zwischen den mittleren Leistungen der Realschüler und denen der Gymnasiasten stabil.
Es zeigt sich, dass keine kontinuierliche Entwicklung der Leistungen in diesem mathematischen Teilgebiet vorliegt, sondern die durchschnittliche Leistung zwischen den verschiedenen Messzeitpunkten unterschiedlich stark wächst. Die Größe der Zuwächse der Leistung der Schüler kann in vielen Fällen auf Ursachen im Lehrplan zurückgeführt werden. Das heißt, dass die Kontinuität der Entwicklung der funktionalen Denkweise maßgeblich durch die Inhalte mit Bezug zu funktionalem Denken und die Zeit, die mit ihnen verbracht wird, beeinflusst wird.

Im Rahmen der PALMA Studie wurde eine begleitende Interviewstudie in ausgewählten bayerischen Schulen durchgeführt. Für diese Arbeit konnte die deutsche Interviewserie durch eine parallele Interviewstudie in zwei französischen Schulen ergänzt werden.
Im neunten Kapitel werden die bisherigen Ergebnisse durch detaillierte Analysen von Ausschnitten aus einigen Interviews illustriert.

Der erste Interviewausschnitt zeigt, dass die ikonische Sichtweise von Funktionen nicht nur beim Ablesen und Arbeiten mit Graphen beobachtet werden kann, sondern von manchen Schülern auch bei der aktiven Erstellung von graphischen Darstellungen genutzt wird. Die ikonische Sichtweise tritt auch bei Schülern auf, die keine besonderen Schwierigkeiten beim Umgang mit funktionalen Situationen haben und welche die Situation, die der Aufgabe zu Grunde liegt, richtig verstanden haben.
Dieser Fehlertyp, der auch auf Unsicherheiten mit der Kovariations-Grundvorstellung zurückgeführt werden kann, wurde sowohl bei den bayerischen als auch bei den französischen Interviews dokumentiert.

Mit dem zweiten Interviewausschnitt wird eine Schwierigkeit französischer Schüler dokumentiert, die nach den Analysen der Lehrpläne und Schulbücher erwartet wurde.
Das Interview zeigt, dass die starke lineare Fixierung, tatsächlich bei französischen Schülern der 3^{e} festgestellt werden kann. Trotz widersprüchlicher Eindrücke und eines scheinbaren Verständnisses der zugrunde liegenden Situation hat die Schülerin keine Möglichkeit, die funktionale Situation angemessen im graphischen Register darzustellen, da ihr concept image nur Geraden als Darstellung zulässt.

Die französische Schülerin im dritten Interviewausschnitt zeigt, dass sie eine gut ausgeprägte Kovariations-Grundvorstellung von funktionalen Abhängigkeiten hat. Obwohl auch sie noch nicht mit nichtlinearen funktionalen Zusammenhängen gearbeitet hat, hat sie nicht dieselben Schwierigkeiten wie die Schülerin aus dem zweiten Interviewausschnitt. Sie schafft es, ihr Defizit im concept image mit Hilfe der Kovariations-Grundvorstellung zu füllen. Dies zeigt die Wichtigkeit von gut ausgeprägten Grundvorstellungen, die es den Schülern ermöglichen, neue Bereiche selbstständig korrekt zu erschließen.

Im theoretischen Teil dieser Arbeit werden mögliche Schwierigkeiten mit den Bezeichnungen Abhängigkeit und dépendence angesprochen, da mit ihnen eine gewisse Kausalität verbunden werden kann. Mit dem vierten Interviewausschnitt, das aus einem Interview mit einem französischen Schüler aus der 3^{e} stammt, kann dies illustriert werden.
Der Schüler fasst funktionale Situationen so auf, dass die eine Variable durch die andere eindeutig festgelegt sein muss. Dadurch schließt er mögliche Auswahlantworten aus. Diese Beschränkung auf kausale Zusammenhänge und die Ablehnung von willkürlichen Zuordnungen kann auch bei der historischen Entwicklung des Funktionsbegriffes beobachtet werden und wurde als epistemologische Hürde identifiziert.

Durch diese Arbeit wird ein Beitrag zur Analyse der funktionalen Denkweise geleistet. Sie wird auf der Basis der vorliegenden Literatur neu definiert und an die in Deutschland, in Frankreich und in der internationalen Forschung benutzten Theorien angebunden. Mit den theoretisch entwickelten Analysewerkzeugen wird die Möglichkeit der Ausbildung einer funktionalen Denkweise in Deutschland und Frankreich analysiert und ihre tatsächliche Ausprägung mit Hilfe von quantitativen und qualitativen Analysen verglichen. Dadurch ergibt sich ein umfassendes Bild von der Entwicklung funktionalen Denkens in beiden Ländern.

10.3 Perspektiven

Mit dieser Arbeit wird die theoretische Verankerung der funktionalen Denkweise verdeutlicht. Außerdem werden deren Ausbildungsmöglichkeiten für Schüler der Sekundarstufe I aus Deutschland bzw. Bayern und Frankreich herausgestellt und miteinander verglichen. Manche Fragen bleiben jedoch offen, werden nur teilweise beantwortet, oder ergeben sich erst aus der vorliegenden Arbeit. Diese Fragestellungen werden in folgendem Abschnitt zusammengefasst. Außerdem wird gezeigt, wie durch weitere quantitative und qualitative Studien sowie Interventionsmaßnahmen dazu beitragen werden kann, die empirische Grundlage zur Veränderung des intendierten und des potentiellen Curriculums zu verbessern.

Bei der Analyse der Curricula beider Länder wird das intendierte, das potentielle und, mit gewissen Einschränkungen, das erreichte Curriculum betrachtet. Untersuchungen des implementierten Curriculums, also von Beobachtungen in den Klassenräumen, sind nicht in diese Arbeit aufgenommen worden. Von einer Studie des Funktionsunterrichts in beiden Ländern sind Aufschlüsse darüber zu erwarten, wie in dieser Arbeit identifizierte Besonderheiten der jeweiligen Lehrpläne in den Klassenzimmern tatsächlich von den Lehrern umgesetzt werden, und wie die Schüler diese dort aufnehmen. Beispielsweise kann geklärt werden, welche Rolle Relationen tatsächlich im Funktionsunterricht der bayerischen Realschule spielen, und in welchem Ausmaß nichtproportionale funktionale Zusammenhänge bis zur 3^{e} im französischen Unterricht vorkommen und analysiert werden. Dafür werden allerdings breit angelegte Klassenbeobachtungen benötigt.

Bei derartigen Unterrichtsanalysen könnte auch die Rolle der Funktionsdefinition in beiden Ländern eingehender untersucht werden. Der aktiven Beherrschung einer mathematisch korrekten Funktionsdefinition wird für die Ausbildung einer funktionalen Denkweise nur eine untergeordnete Bedeutung eingeräumt. Aus diesem Grund gehört die concept definition der Schüler nicht zu den zentralen Untersuchungsgegenständen dieser Arbeit. Dennoch erscheint deren Analyse vor dem Hintergrund der sich abzeichnenden, teilweise ziemlich eingeschränkten concept images der deutschen und französischen Schüler nun von gesteigerter Bedeutung. Untersuchungen haben gezeigt, dass Konflikte zwischen dem concept image und der concept definition die Ursache für Fehlvorstellungen der Schüler sein können und zu Schwierigkeiten beim Umgang mit funktionalen Situationen führen können (siehe Abschnitt 3.1.6). Dabei ist auch die Entwicklung der concept definition über die Sekundarstufe I hinaus von Interesse, da Funktionen in einigen der betrachteten Schulformen erst mit Abschluss des hier betrachteten Ausbildungsabschnittes definiert werden.
In diesem Zusammenhang könnte auch die Frage geklärt werden, wie sich die in allen untersuchten Lehrplänen vorgenommene Einführung von Funktionen per Definition auf die concept definitions auswirkt und ob sich die damit vermuteten Schwierigkeiten nachweisen lassen.

Offen ist auch die Frage, ob bzw. welche Folgen es hat, dass Funktionen in Frankreich zwar als Zuordnungen definiert werden, aber sofort im Anschluss, in der 2de, fast ausschließlich mit dem Kovariationsaspekt von Funktionen gearbeitet wird. Sind dadurch Einschränkungen in den concept images und concept definitions zu finden? Dies hängt auch von der weiteren

Nutzung der Kovariations- und der Zuordnungs-Grundvorstellung nach der Sekundarstufe I ab.
Aber auch die weitere Entwicklung der Variationsanalysen im französischen Curriculum erscheinen von Interesse. Wird weiterhin auf eine qualitative Betrachtung der Steigung verzichtet und insbesondere das Steigungsverhalten verschiedener Funktionstypen nicht miteinander verglichen, so sind auch davon Auswirkungen auf das concept image und auf die Anwendungsmöglichkeiten der Kovariations-Grundvorstellung zu erwarten.

Im Bezug auf die Kovariations-Grundvorstellung können auch Detailanalysen in der bayerischen Realschule zu interessanten Ergebnissen führen. Beispielsweise könnte anhand von Interviews versucht werden festzustellen, inwieweit sich Defizite in der Kovariations-Grundvorstellung tatsächlich negativ auf die Bearbeitung entsprechender Aufgaben auswirken bzw. inwieweit die Kovariations-Grundvorstellung von den Schülern eigenständig hergestellt werden kann.

In beiden Ländern und in allen Schulformen stellt sich außerdem nach den Analysen der potentiellen Curricula die Frage, ob die Orientierung der Funktionsunterrichts an der algebraischen Darstellung und deren Dominanz bei den untersuchten Funktionstypen Auswirkungen auf das concept image der Schüler hat. Dies ist auch deswegen von Bedeutung, da viele funktionale Situationen, mit denen die Schüler im Alltag umgehen müssen, eben keine einfache algebraische Darstellung haben. Auf diese Weise könnte überprüft werden, ob die Einschränkungen in der funktionalen Denkweise dann in Schwierigkeiten beim Umgang mit diesen Situationen resultieren.

In den Analysen des intendierten und des potentiellen Curriculums wird darauf hingewiesen, dass in Frankreich bis zur 3^{e} und in der bayerischen Hauptschule mit sehr wenigen verschiedenen Funktionstypen gearbeitet wird. Daraus ergeben sich Einschränkungen bei der Möglichkeit der Ausbildung der funktionalen Denkweise. Die allgemeine Durchführbarkeit einer früheren Einführung anderer Funktionstypen könnte insbesondere durch eine stärkere Einbeziehung unterschiedlicher Funktionstypen in einzelnen Hauptschulklassen überprüft werden. Hiervon wären auch Rückschlüsse auf die Möglichkeit einer früheren Einführung im französischen Curriculum zu erwarten.

Die soeben genannten Forschungsperspektiven lassen sich in zwei Gruppen zusammenfassen:

Die Ergebnisse dieser Arbeit können als Ausgangspunkt für feinere Analysen bzw. Analysen mit anderem Fokus aber gleichen Klassenstufen genutzt werden (etwa Studien zum implementierte curriculum oder zur concept definition in der Sekundarstufe I).

Andererseits kann die vorliegende Arbeit auf höhere Klassenstufen ausgedehnt werden, um die weitere Entwicklung der Inhalte, der identifizierten curricularen Eigenheiten und der Stärken bzw. der Schwächen von den Schüler zu analysieren (etwa Untersuchungen zur Entwicklung der Grundvorstellungsnutzung oder der concept definition in der Sekundarstufe II).

Literaturverzeichnis

Artikel

[1] Amra, N. (2003). La transposition didactique du concept de fonction: Comparaison entre les systèmes d'enseignement français et palestinien. Paris: Université Paris 7 – Denis Diderot.

[2] Andelfinger, B. (1985). Didaktischer Informationsdienst Mathematik – Thema: Arithmetik, Algebra und Funktionen; In Landesinstitut für Schule und Weiterbildung (Hrsg.), *Curriculum Heft 44* (S. 21-82, S. 125-126, S. 204-231). Soest.

[3] Angoff, W. H. (1993). Perspectives on differential item functioning methodology. In P. H. Holland, & H. Wainer (Hrsg.), *Differential item functioning* (S. 3-23). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

[4] Artigue, M. (1992). Functions from an algebraic and graphic point of view: cognitive difficulties and teaching practices. *The Concept of Function, MAA Notes, 25,* 108-132.

[5] Artigue, M. (1996). Réformes et contre-réformes dans l'enseignement de l'analyse au lycée (1902-1994). In B. Belhoste, H. Gispert, & N. Hulin (Hrsg.), *Les sciences au lycée. Un siècle de réformes des mathématiques et de la physique en France* (pp. 197-217). Paris: Vuibert, INRP.

[6] Baumert, J., Bos, W., & Lehman, R. (Hrsg.). (2000). TIMSS III – Dritte Internationale Mathematik- und Naturwissenschaftsstudie. Band 1 und 2. Opladen: Leske + Budrich.

[7] Belhoste, B. (1995). Les Sciences dans l'enseignement secondaire français, textes officiels (1789-1914). Paris: INRP et Economica.

[8] Bloch, I. (2003). Teaching functions in a graphic milieu: What forms of knowledge enable students to conjecture and prove? *Educational studies in mathematics, 52,* 3-28.

[9] Blum, W. (2002). On the role of "Grundvorstellungen" for reality-related proofs - examples and reflections. In M. A. Mariotti (Ed.), *CERME-3 – Proceedings of the Third Conference of the European Society for Research in Mathematics Education.* Università di Pisa.

[10] Blum, W., Neubrand, M., Ehmke, T., Senkbeil, M., Jordan, A., Ulfig, F., & Carstensen, C. H. (2004). Mathematische Kompetenz. In M. Prenzel, J. Baumert, W. Blum, R. Lehmann, D. Leutner, M. Neubrand, R. Pekrun, J. Rost, & U. Schiefele (Hrsg.), *PISA 2003. Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland – Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs* (S. 47-93). Münster: Waxmann.

[11] Bourny ,G., Fumel, S., Monnier, A.-L., & Rocher, T. (2004). Les élèves de 15 ans – Premiers résultats de l'évaluation internationale PISA 2003. *Note d'évaluation n° 04-12, décembre 2004*. Ministère de l'Éducation nationale, de l'Enseignement supérieur et de la Recherche, DEP.

[12] Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics, 23*, 247-285.

[13] Buck, R. (1970). Functions. In E.G. Begle (Hrsg.), *The sixty-ninth yearbook of the National Society for the Study of Education, Part I: Mathematics Education* (pp. 236-259). Chicago, Illinois: The University of Chicago Press.

[14] Cha, I. (1999). Mathematical and Pedagogical Discussions of the Function Concept. Journal of the Korea Society of Mathematical Education Series D: Research in Mathematical Education, 3(1), 35-56.

[15] Chauvat, G. (1998). Courbes et fonctions au collège. *Petit x, 51,* 23-44.

[16] Confrey, J., & Smith, E. (1991). A framework for functions: prototype, multiple reprensentations, and transformations; In R. Underhill, & C. Brown (Hrsg.), *Proceedings of the 13th Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 57-63). Blacksburg Virginia.

[17] Coppé, S., Dorier, J.-L., & Yavuz, I. (2006). Eléments d'analyse sur le programme de 2000 concernant l'enseignement des fonctions en seconde. *Petit x, 71,* 29-60.

[18] Draba, R.E. (1977). The Identification and Interpretation of Item Bias. *Research Memorandum No. 26*. Chicago: Statistical Laboratory, Department of Education, University of Chicago.

[19] Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1983). The function concept in college students: linearity, smoothness and periodicity. *Focus on learning problems in mathemati*cs*, 5(3) & 5(4),* 119-132.

[20] Dreyfus, T., & Eisenberg, T. (1990). On difficulties with diagrams: Theoretical issues. In G. Booker, P. Cobb, & T.N. de Mendicuti (Hrsg.), *Proceedings of the 14th International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (1, pp. 27-33). Oaxtepec, Mexico.

[21] Dubinsky, E., & Harel, G. (1992). The Nature of the Process Concept of Function – The Case of Function. *The Concept of Function, MAA Notes, 25,* 85-106.

[22] Dugdale, S. (1993). Functions and graphs – Perspectives on student thinking. In: T. Romberg, E. Fennema, & T. Carpenter (Hrsg.), *Integrating research on the graphical representation of functions* (S. 101-130). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

[23] Dupé, C., & Olivier, Y. (2005). Ce que l'évaluation PISA 2003 peut nous apprendre. *Bulletin de l'APMEP, n° 460, septembre, octobre 2005,* 626-644.

[24] Duval, R. (1988a). Ecarts sémantiques et cohérence mathématique: Introduction aux problèmes de congruence. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 1,* 7-25.

[25] Duval, R. (1988b). Graphiques et equations: L'articulation de deux registres. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 1,* 235-253.

[26] Duval, R. (1993). Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives, 5,* 37-65.

[27] Duval, R. (1996). «Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques ? ». *Recherche en Didactique des Mathématiques, 16(3),* 349-382.

[28] Duval, R. (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of mathematics. *Educational studies in mathematics, 61*, 103-131.

[29] Eisenberg, T. (1992). On the development of a sense for functions. *The Concept of Function, MAA Notes, 25,* 153-174.

[30] Eisenberg, T., & Dreyfus, T. (1986). On visual versus analytical thinking in Mathematics. Proceedings of the 10th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (S. 153-158). London.

[31] Even, R. (1990). Subject matter knowledge for teaching and the case of functions. *Educational studies in mathematics, 21*, 521-544.

[32] Even, R. (1993). Subject-matter knowledge: Prospective secondary teachers and the function concept. *Journal for research for research in mathematics education, 2,* 94-116.

[33] Even, R. (1998). Factors Involved in Linking Representations of Functions. *Journal of Mathematical Behavior*, *17 (1),* 105-121.

[34] Fimmel, E. (2000). Eine empirische Untersuchung zum Verständnis des Funktionsbegriffs bei Schülern in Deutschland und Russland. *Beiträge zum Mathematikunterricht 2000,* 189-192.

[35] Führer, L. (1995). Rezension zu Müller-Phillipp, S.: Der Funktionsbegriff im Mathematikunterricht. Eine Analyse für die Sekundarstufe I unter Berücksichtigung lernpsychologischer Erkenntnisse und der Einbeziehung des Computers als Lernhilfe. *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 27(4)*, 127-129.

[36] Furinghetti, F., & Somaglia, A. (1994). Functions in algebraic and graphical environments; In A. Antibi (Hrsg.), *Actes de la 46e rencontre CIEAEM* (S. 248-255). Toulouse.

[37] Gagatsis, A. (2000). Processi di traduzione ed il concetto di funzione. *Quaderni di Ricerca in Didattica*. *G.R.I.M, University of Palermo, Italia,* 1-24.

[38] Gagatsis, A., & Shiakalli, M. (2004). Ability to translate from one representation of the concept of function to another and mathematical problem solving. *Educational Psychology, 24 (5),* 645-657.

[39] Goldenberg, P. (1987). Believing is seeing: How preconceptions influence the perception of graphs. *Psychology of Mathematics Education – PME XI Proceedings of the eleventh international conference* (1, pp. 197-203). Montreal.

[40] Groupe « Lycée » - Irem de Clermond-Fd (1993). Introduction de la notion de fonction en seconde de lycée. *Repères – IREM, 10*, 47-57.

[41] Grugnetti, L., Maffini, A., & Marchini, C. (2001). Le concept de fonction dans l'école italienne; Usage de l'épistemologie et de l'histoire des mathématiques pour en clarifier le sens; In P. Radelet-de Grave (Hrsg.), *Histore et épistemologie dans l'éducation mathématique «De la maternelle à l'université»; Actes de L'Univ.d'été 99; Épistémologie et Histoire des Mathématiques* (1, pp. 421 – 443).

[42] Hausdorff, F. (1914) (Reprint 1965). *Grundzüge der Mengenlehre*. New York: Chelsea Publishing Company.

[43] Hischer, H. (2002). (2007, 14. Juni). Zur Geschichte des Funktionsbegriffs. *http://www.hischer.de/uds/forsch/preprints/hischer/Preprint54.pdf*.

[44] Hofe, R. vom (1995). *Grundvorstellungen mathematischer Inhalte*. Heidelberg, Berlin, Oxford: Spektrum Akademischer Verlag GmbH.

[45] Hofe, R. vom, Kleine, M., Wartha, S., Blum, W., Jordan, A., & Pekrun, R. (2004). How can the Development of “Mathematical Literacy” be measured and what Implications for Improving Class-room Practice can be expected? - First Results from the Longitudinal Research Programme PALMA (Project for the Analysis of Learning and Achievement in Mathematics). *Paper presented at ICME (International Conference for Mathematics Education) Kopenhagen*.

[46] Hofe, R. vom, Kleine, M., Blum, W., & Pekrun, R. (2005a). Zur Entwicklung mathematischer Grundbildung in der Sekundarstufe I – theoretische, empirische und diagnostische Aspekte. In M. Hasselhorn, H. Marx & W. Schneider (Hrsg.), *Jahrbuch für pädagogisch-psychologische Diagnostik. Test und Trends, Band 4* (S. 263-292). Göttignen: Hogrefe.

[47] Hofe, R. vom, Kleine, M., Wartha, S., Blum, W., & Pekrun, R. (2005b). On the role of „Grundvorstellungen“ fort he development of mathematical literacy – First results of the longitudinal Study PALMA. *Mediterranean Journal for the research in Mathematics Education, Vol. 4 (2),* 67-84.

[48] Hofe, R. vom, Kleine, M., Wartha, S., Blum, W., & Pekrun, R. (2005). On the role of „Grundvorstellungen“ fort he development of mathematical literacy – First results of the longitudinal Study PALMA. *Mediterranean Journal for the research in Mathematics Education, 4(2),* 67-84.

[49] Hofe, R. vom, Pekrun, R., Kleine, M., & Götz, T. (2002). Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik (PALMA): Konstruktion des Regensburger Mathematikleistungstests für 5.-10. Klassen. In M. Prenzel, & J. Doll (Hrsg.), *Bildungsqualität von Schule: Schulische und außerschulische Bedingungen mathematischer, naturwissenschaftlicher und überfachlicher Kompetenzen* (Zeitschrift für Pädagogik, 45. Beiheft, S. 83-100. Weinheim: Beltz.

[50] Ingrao, B. (1991). La notion de fonction à travers l’histoire. *Bulletin IREM de Clermont-Ferrand, 43-44,* 57-81.

[51] Janvier, C. (1983a). Teaching the concept of function. *Mathematical Education for Teaching, 4*, 48-60.

[52] Janvier, C. (1983b). Représentation et compréhension. Un exemple : Le concept de fonction. *Bulletin de l’association mathématique du Québec, 3*, 22-28.

[53] Janvier, C. (1987a). Translation processes in mathematics education. In C. Janvier (Hrsg.), *Problems of representation n the teaching and learning of mathematics* (pp. 27-32). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

[54] Janvier, C. (1987b). Representation and understanding: The notion of function as example. In C. Janvier (Hrsg.), *Problems of representation n the teaching and learning of mathematics* (pp. 67-71). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

[55] Janvier, C. (1998). The notion of chronicle as an epistemological obstacle to the concept of function. *Journal of mathematical behavior, 17(1),* 79-103.

[56] Kalchman, M., & Case, R. (1998). Teaching mathematical functions in primary and middle school: An approach based on neo-Piagetian theory. *Scientia Paedagogica Experimentalis, 35(1),* 7-54.

[57] Kaput, J. (1987a). Representation systems and mathematics; In C. Janvier (Hrsg.), *Problems of representation n the teaching and learning of mathematics* (pp. 19-26). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

[58] Kaput, J. (1987b). Towards a theory of symbol use in mathematics; In C. Janvier (Hrsg.), *Problems of representation n the teaching and learning of mathematics* (pp.159-195). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

[59] Kaput, J. (1989). Linking representations in the symbol systems of algebra. In S. Wagner, & C. Kieran (Hrsg.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 167-194). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

[60] Kaput, J. (1993). The urgent need for proleptic research in the representation of quantitative relationships. In T. Romberg, E. Fennema, & T. Carpenter (Hrsg.), *Integrating research on the graphical representation of functions* (pp. 279-312). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

[61] Kaune, C. (1995). Der Funktionsbegriff als ein Fundament für den gymnasialen Mathematikunterricht der Sekundarstufe I. In H.-G. Steiner, H.-J. Vollrath (Hrsg.), *Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld; Untersuchungen zum Mathematikunterricht – Neue problem- und praxisbezogene Forschungsansätze* (20, S. 66-76). Köln: Aulis Verlag Deubner & Co KG.

[62] Keeves, J. P., & Masters G. N. (1999). Introduction. In G. N. Masters, & J. P. Keeves, (Hrsg.), *Advances in Measurement in Educational Research and Assessment* (S. 1-19). Oxford: Pergamon.

[63] Keller, B. A., & Hirsch, C. R. (1998). Student preferences for representation of functions. *International journal of mathematical education in science and technology, 29(1),* 1-17.

[64] Kerslake, D. (1986). Graphs. In: H. Kathleen (Hrsg.), *Children's understanding of mathematics: 11-16* (pp. 120-136). London: J. Murray.

[65] Kleiner, I. (1989). Evolution of the Function Concept: A Brief Survey. *The College Mathematics Journal, 20(4),* 282-300.

[66] Klieme, E., & Baumert, J. (2001). Identifying national cultures of mathematics education: Analysis of cognitive demands and differential item functioning in TIMSS. *European Journal of Psychology of Education, 16(3),* 385-402.

[67] Knoche, N., & Lind, D. (2004a). Testtheoretische Modelle und Verfahren bei PISA-2000-Mathematik. In M. Neubrand (Hrsg.), *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland: Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA-2000* (S. 51-69). Wiesbaden: VS -Verlag für Sozialwissenschaften.

[68] Knoche, N., & Lind, D. (2004b). Eine Differentielle Itemanalyse zu den Faktoren Bildungsgang und Geschlecht. In M. Neubrand (Hrsg.), *Mathematische Kompetenzen von Schülerinnen und Schülern in Deutschland: Vertiefende Analysen im Rahmen von PISA-2000* (S. 73-86). Wiesbaden: VS -Verlag für Sozialwissenschaften.

[69] Krüger, K. (2000a). *Erziehung zum funktionalen Denken: zur Begriffsgeschichte eines didaktischen Prinzips*. Berlin: Logos Verlag.

[70] Krüger, K. (2000b). Kinematisch-funktionales Denken als Ziel des höheren Mathematikunterrichts – das Scheitern der Meraner Reform. *Mathematische Semesterberichte, 47*, 221-241.

[71] Leinhardt, G. Zaslavsky, O., & Stein M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: tasks, learning, and teaching. *Review of educational research, 60(1),* 1-64.

[72] Lengnink, K. (2002). Wie Jugendliche über Abhängigkeit reden: Anknüpfungspunkte für eine Einführung in den Funktionsbegriff. *Beiträge zum Mathematikunterricht*, 303-306.

[73] Lesh, R., Post, T., & Behr, M. (1987). Representations and translations among representations in mathematics learning and problem solving. In C. Janvier (Hrsg.), *Problems of representation n the teaching and learning of mathematics* (pp. 33-40). Hillsdale, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

[74] Luzin, N. (1930). The evolution of… Function: Part I and Part II; Translated by Abe Shenitzer. *American Mathematical Monthly* 1998, (Part I pp. 59-67, Part II pp. 263-270). (im Original erschienen 1930: *The Great Soviet Encyclopedia*, *59*, 314-334.)

[75] Malik, M. A. (1980). Historical and pedagogical aspects of the definition of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 11(4)*, 489-492.

[76] Malle, G. (ohne Jahr). Unveröffentlichte Manuskripte.

[77] Malle, G. (1996). Aus der Geschichte lernen. *Mathematik Lehren, 75,* 4-8.

[78] Markovits, Z. Eylon, B. S., & Bruckheimer M. (1986). Functions today and yesterday. *For the learning of mathematics, 6(2),* 18-24 & 28.

[79] Markovits, Z., Eylon, B. S., & Bruckheimer, M. (1989). Difficulties students have with the function concept. In A. F. Coxford, & A. P. Shulte (Hrsg.), *The Ideas of Algebra, K-12* (S. 43-60). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics: Yearbook 1988.

[80] Monk, G. S. (1988). Students' understanding of functions in calculus courses. *Humanistic Mathematics Network Newsletter, 2.*

[81] Monk, S. (1992). Students’ understanding of a function given by a physical model. *The Concept of Function, MAA Notes, 25,* 175-194.

[82] Müller-Philipp, S. (1992). *Der Funktionsbegriff im Mathematikunterricht*. Münster, New York: Waxmann.

[83] Nguyen B. K. (1982). Zur Entwicklung der funktionalen Denkweise im Mathematikunterricht. *Mathematik in der Schule, 20*; 139-147.

[84] Neubrand, M., Blum, W., Ehmke, T., Jordan, A., Senkbeil, M., Ulfig, F., & Carstensen, C. H. (2005). Mathematische Kompetenz im Ländervergleich. In M. Prenzel, J. Baumert, W. Blum, R. Lehmann, D. Leutner, M. Neubrand, R. Pekrun, J. Rost, & U. Schiefele (Hrsg.), *PISA 2003. Der zweite Vergleich der Länder in Deutschland – Was wissen und können Jugendliche?* (S. 51-84). Münster: Waxmann.

[85] Norman, A. (1992). Teachers' mathematical knowledge of the concept of function. *The Concept of Function, MAA Notes, 25*, 215-232.

[86] OECD (2003a). The PISA 2003 Assessment Framework – Mathematics, Reading, Science and Problem Solving Knowledge and Skills. Paris: OECD.

[87] OECD (2003b). Beispielitems aus dem Mathematiktest. Paris: OECD.

[88] OECD (2004a). Bildung auf einen Blick; OECD-Indikatoren 2004. Paris: OECD.

[89] OECD (2004b). Lernen für die Welt von morgen – erste Ergebnisse von PISA 2003. Paris: OECD.

[90] OECD (2004c). Apprendre aujourd'hui, réussir demain – Premiers résultats de PISA 2003. Paris: OECD.

[91] OECD (2005a). *PISA 2003 Technical Report.* Paris: OECD.

[92] OECD (2005b). PISA 2004 Data Analysis Manual, SPSS User. Paris: OECD.

[93] Pekrun, R., Hofe, R. vom, Blum, W., Götz, T., Wartha, S., & Jullien, S. (2006): Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik (PALMA) – Entwicklungsverläufe, Schülervoraussetzungen und Kontextbedingungen von Mathematikleistungen bei Schülerinnen und Schülern der Sekundarstufe I. In M. Pernzel, & L. Allolio-Näcke (Hrsg.), *Untersuchungen von Bildungsqualität von Schule. Abschlussbericht des DFG-Schwerpunktprogramms* (S. 21 – 52). Münster: Waxmann.

[94] Pihoué, D. (1996). *L'entrée dans le monde de pensée fonctionnel en classe de seconde*. Cahier de DIDIREM – DEA de didactique des discplines didactiques didactique des mathematiques. Paris: Uniersité Paris 7 – Denis Diderot.

[95] Prenzel, M., Baumert, J., Blum, W., Lehmann, R., Leutner, D., Neubrand, M., Pekrun, R., Rost, J., & Schiefele, U. (2004a). *PISA 2003: Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs Zusammenfassung*. Paris: OECD.

[96] Prenzel, M., Baumert, J., Blum, W., Lehmann, R., Leutner, D., Neubrand, M., Pekrun, R., Rost, J., & Schiefele, U. (2004b). *PISA 2003. Der Bildungsstand der Jugendlichen in Deutschland – Ergebnisse des zweiten internationalen Vergleichs*. Münster: Waxmann.

[97] Prenzel, M., Baumert, J., Blum, W., Lehmann, R., Leutner, D., Neubrand, M., Pekrun, R., Rost, J., & Schiefele, U. (2005). *PISA 2003. Der zweite Vergleich der Länder in Deutschland – Was wissen und können Jugendliche?.* Münster: Waxmann.

[98] René de Cortret, S. (1988). Une étude sur les représentations graphiques du mouvement comme moyen d'accéder au concept de fonction ou de variable dépendante. *Petit x, 17*, 5-27.

[99] Ricco, G. (1982). Les premières acquisitions de la notion de fonction linéaire chez l'enfant de 7 à 11 ans. *Educational studies in mathematics, 13,* 289-327.

[100] Rost, J. (1996). *Testtheorie Testkonstruktion*. Hans Huber: Bern.

[101] Rüthing, D. (1986). Einige historische Stationen zum Funktionsbegriff. *Der Mathematikunterricht 32(6),* 4-25.

[102] Ruiz Higueras, L., & Rodríguez Fernandez, J. L. (1996). The transformation of mathematical objects in the didactic system: The case of the notion of function. *Proceedings of the 20th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (4, S. 243-250). Valencia.

[103] Ryan, J., & Williams, J. (1998). The search for pattern: Student understanding of the table of values representation of function. In C. Kanes, M. Goos, & E. Warren (Hrsg.), *Teaching mathematics in new times: Proceedings of the 18th annual conference of the mathematics education research group of Australasia* (2, S. 492-499). Brisbane: Mathematics education research group of Australasia.

[104] Scheuneman, J. D., & Bleistein, C. A. (1999). Item Bias. In G. N. Masters, & J. P. Keeves (Hrsg.), *Advances in Measurement in Educational Research and Assessment* (S. 220-234). Oxford: Pergamon.

[105] Schmidt, G. (1990). Mittelstufe des Gymnasiums: Funktionen und Graphen. *PZ-Information 5/90*. Pädagogisches Zentrum Rheinland-Pfalz.

[106] Schmidt, W. H., Doris, J., Cogan, L. S., Barrier, E., Gonzalo, I., Moser, U., Shimizu, K., Sawada, T., Valverde, G. A., McKnight, C., Prawat, R. S., Wiley, D. E., Raizen, Senta A., Britton E. D., & Wolfe, R. G. (1996). *Characterizing Pedagogical Flow. An Investigation of Mathematics and Science Teaching in six Countries*. Dordrecht, Boston, London: Kluwer Academic Publishers.

[107] Schwarz, B., & Dreyfus, T. (1995). New actions upon old subjects: A new ontological perspective on functions. *Educational studies in mathematics (29),* 259-291.

[108] Schwingendorf, K., Hawks, J., & Beineke, J. (1992). Horizontal and vertical growth of the students' conception of function*. The Concept of Function, MAA Notes, 25,* 133-150.

[109] Seeger, F., Steinbring, H., & Sträßer, R. (1989). Die didaktische Transposition – Rezension von Yves Chevallard: La Transposition didactique – du savoir savant au savoir enseigné. *mathematica didactica, 12(2/3),* 157-177.

[110] Selden, A., & Selden, J. (1992). Research perspectives on conceptions of function summary and overview. *The Concept of Function, MAA Notes, 25,* 1-21.

[111] Sfard, A. (1987). The conceptions of mathematical notions: Operational and structural. *Proceedings of the 11th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (3),* (pp. 162-169). Montreal.

[112] Sfard, A. (1988). Operational vs. structural method of teaching mathematics – case study. *Proceedings of the 12th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 560-567). Vesprem Hungary.

[113] Sfard, A. (1989). Transition from operational to structural conception: the notion of function revisited. In G. Vergnaud, J. Rogalski, & M. Artigue (Hrsg.), *Proceedings of PME 13* (3, S. 151-158). Paris.

[114] Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational studies in mathematics, 22;*1-36.

[115] Sfard, A. (1992). Operational Origins of Mathematical Objects ant the Quandary of Reification – The Case of Function. *The Concept of Function, MAA Notes, 25,* 59-84.

[116] Sierpinska, A. (1992). Theoretical Perspectives for Development of the Function Concept. *The Concept of Function, MAA Notes, 25,* 25-58.

[117] Sims-Knight, J. E., & Kaput, J. (1983). Misconceptions of algebraic symbols: Representations and component processes. In H. Helm, & J. Novak (Hrsg.), *Proceedings of the international seminar: Misconceptions in science and mathematics* (S. 495-506). Ithaca, NY: Cornell University.

[118] Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics teaching, 77*, 20-26.

[119] Slavit, D. (1995). *A growth-oriented route to the reification of function*. Proceedings of the 17th Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.

[120] Slavit, D. (1997). An Alternate Route to the Reification of Function. *Educational Studies in Mathematics*, *33*, 259-281.

[121] Steiner, H.-G. (1969). Aus der Geschichte des Funktionsbegriffs. *Der Mathematikunterricht, 15(3),* 13-39.

[122] Stellmacher, H. (1986). Die nichtquantitative Beschreibung von Funktionen durch Graphen beim Einführungsunterricht. I: G. von Harten, H. N. Jahnke, T. Mormann, M. Otte, F. Seeger, H. Steinbring, & H. Stellmacher (Hrsg.), *IDM-Reihe Untersuchungen zum Mathematikunterricht Band 11; Funktionsbegriff und funktionales Denken* (S. 21-35). Köln: Aulis-Verlag Deubner&Co KG.

[123] Stoye, W. (1990). Befragungen zu Schülern zum Funktionsbegriff – Ergebnisse im Vergleich. *Mathematik in der Schule, Berlin 28, 11,* 766-777.

[124] Tall, D., & Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12,* 151-169.

[125] Tall, D., & Bakar, M. (1991), Students' mental prototypes for functions and graphs. Proceedings of the 15th conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (1), (pp. 104-111). Assisi.

[126] Tall, D., & Bakar M. (1992). Students' mental prototypes for functions and graphs. International Journal of mathematics education in science and technology, 23(1), 39-50.

(2007, 17. Juli) http://www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/pdfs/dot1992c-bakar-ijmest.pdf.

[127] Tall, D. (1996). Chapter 8: Funktions and Calculus. In A. J. Bishop (Hrsg.), *International Handbook of Mathematics Education* (S. 289-325). Kluwer Academic Publishers.

[128] Thomas, H. L. (1975). The concept of function. In M. F. Rosskopf (Hrsg.), *Children's mathematical concepts: Six Piagetian studies in mathematics education* (S. 145-172). New York: Teachers College Press.

[129] Thompson, P. W. (1994). Students, Functions, and the Undergraduate Curriculum. In E. Dubinsky, A. Schoenfeld, & J. Kaput (Hrsg.), *Research in Collegiate Mathematics Education, I, CBMS Issues in Mathematics Education* (4, S. 21–44). (2007, 17. Juli) *http://pat-thompson.net/PDFversions/1994StuFunctions.pdf*.

[130] Thorpe, J. A. (1989). Past research and current issues – Algebra: What should we teach and how should we teach it?. In S. Wagner, & C. Kieran (Hrsg.), *Research agenda for mathematics education – Research issues in the learning and teaching of Algebra* (4, S. 11-24). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

[131] Vergnaud, G. (1988). Multiplicative Structures. In H. Hiebert, & M. Behr (Hrsg.), *Number concepts and operations in the middle grades* (S. 141-161). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics, Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum.

[132] Vergnaud, G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques, 10(2.3),* 133-170.

[133] Vergnaud, G. (1996). The theory of conceptual fields; In L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin, & B. Greer (Hrsg.), *Theories of mathematical learning* (S. 219-239). Mahwah, NJ: Erlbaum.

[134] Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of mathematical education in science and technology, 14(3),* 293-305.

[135] Vinner, S. (1989). The avoidance of visual considerations in calculus students. *Focus on learning problems in mathematics, 11(2),* 149-156.

[136] Vinner, S. (1992). The function concept as a prototype for problems in mathematics learning. *The Concept of Function, MAA Notes, 25,* 195-214.

[137] Vinner, S., & Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for research in mathematics education, 20(4),* 356-366.

[138] Vollrath, H.-J. (1978). Schülerversuche zum Funktionsbegriff. *Der Mathematikunterricht, 24(4),* 90-101.

[139] Vollrath, H.-J. (1986a). Search Strategies as indicators of functional thinking. Educational Studies in Mathematics, 17, 387-400. (2007, 17. Juli) http://www.didaktik.mathematik.uni-wuerzburg.de/history/vollrath/papers/043.pdf.

[140] Vollrath, H.-J. (1986b). Zur Entwicklung des Funktionalen Denkens. In H.-G. Steiner (Hrsg.), Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld; Untersuchungen zum Mathematikunterricht – Grundfragen der Entwicklung mathematischer Fähigkeiten, (13, S. 59-68). Köln: Aulis Verlag Deubner & Co KG.

[141] Vollrath, H.-J. (1989). Funktionales Denken. *Journal für Mathematikdidaktik, 10,* 3-37.

[142] Wang, W.-C. (2000). The Simultaneous Factorial Analysis of Differential Item Functioning. *Methods of Psychological Research Online, Vol. 5,* 57-75.

[143] Wartha, S. (2007). *Längsschnittliche Untersuchungen zur Entwicklung des Bruchzahlbegriffs*. Hildesheim: Franzbecker.

[144] Weigand, H.-G. (1988). Zur Bedeutung der Darstellungsform für das Entdecken von Funktionseigenschaften. *Journal für Mathematik-Didaktik, 9,* 287-325.

[145] Wu, M. L., Adams, J. A., & Wilson, M., R. (1998). *ACER ConQuest: Generalised item response modelling software manual*. Melbourne: ACER.

[146] Youschkevitch, A. P. (1976). The concept of function up to the middle of the 19th century. *Archive for history of exact sciences, 16,* 36-85. (Traduction française de Bellemin J.-M. (1981). Le concept de function jusqu'au milieu du XIXe siècle; "Fragments d'histoire des mathématiques". *Brochure A.P.M.E.P., 41*, 7-68.)

[147] Zehetmeier, S. (2001). *Der Funktionsbegriff im Mathematikunterricht*. Unveröffentlichte Zulassungsarbeit, Universität Regensburg.

[148] Zumbo, B. D. (1999). *A Handbook on the Theory and Methods of Differential Item Functioning (DIF): Logistic Regression Modeling as a Unitary Framework for Binary and Likert-type (Ordinal) Item Scores*. Ottawa ON: Directorate of Human Resources Research and Evaluation, Department of National Defence.

Lehrpläne:

[149] Bildungsstandards Hauptschulabschluss (2004). (2005, Januar 27). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Hauptschulabschluss (Jahrgangsstufe 9); Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 15.10.2004. *http://www.kmk.org/schul/home1.htm.*

[150] Bildungsstandards Realschulabschluss (2003). (2005, Januar 27). Bildungsstandards im Fach Mathematik für den Mittleren Schulabschluss (Jahrgangsstufe 10); Beschluss der Kultusministerkonferenz vom 04.12.2003. *http://www.kmk.org/schul/home1.htm*.

[151] Lehrplan Bayern Gymnasium G9 (1989). (2004, Oktober 9). Fachlehrplan für Mathematik, gültig ab 01.08.1989. *http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp*.

[152] Lehrplan Bayern Gymnasium Klasse 5 (2004). (2006, Dezember 12). Mathematik Jgst. 5 (G8), gültig ab 19.07.2004. *http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp*.

[153] Lehrplan Bayern Gymnasium Klasse 6 (2004). (2006, Dezember 12). Mathematik Jgst. 6 (G8), gültig ab 19.07.2004. *http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp*.

[154] Lehrplan Bayern Gymnasium Klasse 7 (2004). (2006, Dezember 12). Mathematik Jgst. 7 (G8), gültig ab 19.07.2004. *http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp*.

[155] Lehrplan Bayern Gymnasium Klasse 8 (2006). (2006, Dezember 12). Mathematik Jgst. 8 (G8), gültig ab 15.03.2006. *http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp*.

[156] Lehrplan Bayern Gymnasium Klasse 9 (o.J.). (2006, Dezember 12). Mathematik Jgst. 9 (G8). *http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp*.

[157] Lehrplan Bayern Gymnasium Klasse 10 (o.J.). (2006, Dezember 12). Mathematik Jgst. 10 (G8). *http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp*.

[158] Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse 5 (1997). (2006, Dezember 14). Lehrplan für die bayerische Hauptschule - Jahrgangsstufe 5, gültig ab 29.10.1997. *http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp*.

[159] Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse 5 (2004). (2006, Dezember 12). Lehrplan für die bayerische Hauptschule, Kapitel III-Teil I Jahrgangsstufe 5, gültig ab 07.07.2004. *http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp*.

[160] Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse 6 (1997). (2006, Dezember 17). Lehrplan für die bayerische Hauptschule - Jahrgangsstufe 6, gültig ab 29.10.1997. http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp.

[161] Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse 6 (2004). (2006, Dezember 12). Lehrplan für die bayerische Hauptschule, Kapitel III-Teil I Jahrgangsstufe 6, gültig ab 07.07.2004. *http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp*.

[162] Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse 7 (1997). (2006, Dezember 17). Lehrplan für die bayerische Hauptschule - Jahrgangsstufe 8, gültig ab 29.10.1997. *http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp*.

[163] Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse 7 (2004). (2006, Dezember 12). Lehrplan für die bayerische Hauptschule, Kapitel III-Teil I Jahrgangsstufe 7, gültig ab 07.07.2004. *http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp*.

[164] Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse M7 (2004). (2006, Dezember 13). Lehrplan für die bayerische Hauptschule, Kapitel III-Teil II Jahrgangsstufe M7, gültig ab 07.07.2004. *http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp*.

[165] Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse 8 (1997). (2006, Dezember 17). Lehrplan für die bayerische Hauptschule - Jahrgangsstufe 8, gültig ab 29.10.1997. *http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp*

[166] Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse 8 (2004). (2006, Dezember 12). Lehrplan für die bayerische Hauptschule, Kapitel III-Teil I Jahrgangsstufe 8, gültig ab 07.07.2004. *http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp*.

[167] Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse M8 (2004). (2006, Dezember 13). Lehrplan für die bayerische Hauptschule, Kapitel III-Teil II Jahrgangsstufe M8, gültig ab 07.07.2004. *http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp*.

[168] Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse 9 (1997). (2006, Dezember 17). Lehrplan für die bayerische Hauptschule - Jahrgangsstufe 9, gültig ab 29.10.1997. *http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp*.

[169] Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse 9 (2004). (2006, Dezember 12). Lehrplan für die bayerische Hauptschule, Kapitel III-Teil I Jahrgangsstufe 9, gültig ab 07.07.2004. *http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp*.

[170] Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse M9 (2004). (2006, Dezember 13). Lehrplan für die bayerische Hauptschule, Kapitel III-Teil II Jahrgangsstufe M9, gültig ab 07.07.2004. *http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp*.

[171] Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse 10 (1997). (2006, Dezember 17). Lehrplan für die bayerische Hauptschule - Jahrgangsstufe 10, gültig ab 29.10.1997. *http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp*.

[172] Lehrplan Bayern Hauptschule Klasse M10 (2004). (2006, Dezember 13). Lehrplan für die bayerische Hauptschule, Kapitel III-Teil II Jahrgangsstufe M10, gültig ab 07.07.2004. *http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp*.

[173] Lehrplan Bayern Realschule R4 (1993). (2006, Dezember 16). Ebene: 4 Fachlehrpäne aller Pflichtfächer und aller Wahlpflichtfächer nach Fächern in einer Datei, gültig ab 08.07.1993. *http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp*.

[174] Lehrplan Bayern Realschule Klasse 5 (2000). (2004, Oktober 9). Mathematik Jgst. 5, gültig ab 01.08.2000. *http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp*.

[175] Lehrplan Bayern Realschule Klasse 6 (2000). (2004, Oktober 9). Mathematik Jgst. 6, gültig ab 01.08.2000. *http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp*.

[176] Lehrplan Bayern Realschule Klasse 7 (2003). (2004, Oktober 9). Mathematik Jgst. 7, gültig ab 01.08.2003. *http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp*.

[177] Lehrplan Bayern Realschule Klasse 8 (2000). (2004, Oktober 9). Mathematik Jgst. 8, gültig ab 01.08.2000. *http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp*.

[178] Lehrplan Bayern Realschule Klasse 9 (2003). (2004, Oktober 9). Mathematik Jgst. 9, gültig ab 01.08.2003. *http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp*.

[179] Lehrplan Bayern Realschule Klasse 10 (2003). (2004, Oktober 9). Mathematik Jgst. 10, gültig ab 01.08.2003. *http://www.isb.bayern.de/isb/index.asp*.

[180] Programme France (1902). (2006, April 5). Arrêtés du 31 mai 1902, 27 et 28 juillet 1905, 26 juillet 1909 et 15 novembre 1912. *http://membres.lycos.fr/sauvezlesmaths/Textes/IVoltaire/prg1902.htm*.

[181] Programme France (1923). (2006, April 5). Instructions officielles, Arrêtés du 23 février 1923 et du 3 juin 1925. *http://membres.lycos.fr/sauvezlesmaths/Textes/IVoltaire/prg1902.htm*.

[182] Programme France (1945). (2006, April 5). Instructions officielles de 1945. *http://membres.lycos.fr/sauvezlesmaths/Textes/IVoltaire/prg1945.htm* .

[183] Programme France (1960). Arrêtés du 31 juillet 1958, 20 juillet 1960, 23 juin 1962 et du 26 octobre 1964; circulaire du 20 août 1965.

[184] Programme France (1969). Arrêtés du 26 juillet 1968, 29 juillet 1968 et 22 juillet 1971; Institut national de recherche et de documentation pédagogiques; 2e édition, Brochure n°59 Pg; Instructions particulières du 28 février 1969, 6 février 1970 et 22 novembre 1971.

[185] Programme France (1977). Arrêtés du 17 mars 1977, 16 novembre 1978; Instructions du 29 avril 1977, 16 novembre 1978.

[186] Programme France (1985). Arrêtés du 14 novembre 1985 et 25 avril 1990.

[187] Programme France 2de (2001). (2005, Januar 25). Arrêté du 10 juillet 2001; Fixant le programme de la classe de seconde. BO hors série n° 2 du 30 août 2001 - Volume 7. *http://www.cndp.fr/accueil.htm*.

[188] Programme France 2de Document d'accompagnement (2000). (2006, Dezember 16). Concernant le programme de seconde paru au BO hors-série n°6 du 12 août et applicable à la rentrée 2000. *http://www.cndp.fr/accueil.htm*.

[189] Programme France 3^{e} (1998). (2006, Dezember 16). Arrêté du 15 septembre 1998; Programmes des classes de troisième des collèges; B.O. hors série n° 10 du 15 octobre 1998; applicable à la rentrée 1999. *http://www.cndp.fr/accueil.htm*.

[190] Programme France 5^{e} et 4^{e} (1997). (2006, Dezember 16). Arrêté du 10 janvier 1997; Programme du cycle central; B.O. hors série n° 1 du 13 février 1997; J.O. du 21 janvier 1997; Arrêté du 15 septembre 1998; applicable à la rentrée 1997 en classe de cinquième; applicable à la rentrée 1998. *http://www.cndp.fr/accueil.htm*.

[191] Programme France 5^{e} et 4^{e} (2005). (2006, Januar 22). Arrêté du 25 juillet 2005; Programme de l'enseignement des mathématiques en classes de cinquième et de quatrième; B.O. hors série n° 5 du 25 août 2005 volume 2; J.O. du 5 août 2005; applicable à la rentrée 2006 en

classe de cinquième; applicable à la rentrée 2007 en classe de quatrième. *http://www.cndp.fr/accueil.htm*.

[192] Programme France 6e (1995). (2006, Dezember 16). Arrêté du 22 novembre 1995; Programme du cycle d'adaptation; applicable à la rentrée 1996. *http://www.cndp.fr/accueil.htm*.

[193] Programme France 6e (2004). (2006, Dezember 17). Arrêté du 6 juillet 2004; Programme de l'enseignement des mathématiques en classe de sixième du collège; B.O. hors série n° 5 du 9 septembre 2004 volume 1; J.O. du 17 juillet 2004; applicable à la rentrée 2005. *http://www.cndp.fr/accueil.htm*.

[194] Programme France CM2 (2002). (2006, Februar 18). Programmes d'enseignement de l'école primaire; B.O. hors série n° 1 du 14 février 2002; applicable à la rentrée 2004 en CM2. *http://www.cndp.fr/accueil.htm*.

[195] Programme France CM2 Document d'application (2002). (2007, Januar 30). Les nouveaux programmes de l'école primaire; Mathématiques; Document d'applicaton; applicable à la rentrée 2004. *http://www.cndp.fr/accueil.htm*.

[196] Programme France CM2 Accompagnement Articulation (2002). (2005, Februar 19). Les nouveaux programmes de l'école primaire; Mathématiques; Document d'accompagnement; Articulation école collège; applicable à la rentrée 2004. *http://www.cndp.fr/accueil.htm*.

[197] Programme France Collège Projet (o.J.). (2004, Oktober 7). La rénovation des programmes du collège; Consultation sur les projets proposés par le groupe d'experts; Mathématiques. *http://eduscol.education.fr/D0048/LLPPRC01.htm*.

[198] Programme France école primaire (1995). Arrêté du 22 février 1995; Programmes d'enseignement de l'école primaire; applicable à la rentrée 1997 en CM2.

Lehrbücher

[199] Antibi, A., Barra, R. & Morin, J. (Hrsg.) (2004). *Transmath 2de, Programme 2000*. Paris: Nathan.

[200] Brissiaud, R. (Hrsg.). (2000a). *J'apprends les maths, manuel CM2* (Aufl. 2004). Paris: Retz.

[201] Brissiaud, R. (Hrsg.). (2000b). *J'apprends les maths, fichier d'activités CM2* (Aufl. 2004). Paris: Retz.

[202] Chapiron, G., Mante, M., Mulet-Marquis, R. & Pérotin, C. (2001). *Collection Triangle, Mathématiques 5^{e}, Programme 1997* (2. Aufl.). Paris: Hatier.

[203] Chapiron, G., Mante, M., Mulet-Marquis, R. & Pérotin, C. (2002). *Collection Triangle, Mathématiques 4^{e},* (2. Aufl.). Paris: Hatier.

[204] Chapiron, G., Mante, M., Mulet-Marquis, R. & Pérotin, C. (2003). *Collection Triangle, Mathématiques 3^{e}* (2. Aufl.). Paris: Hatier.

[205] Chapiron, G., Mante, M., Mulet-Marquis, R. & Pérotin, C. (2005). *Collection Triangle, Mathématiques 6^{e}, Programme 2005*. Paris: Hatier.

[206] Charnay, C., Combier, G. & Dussuc, M.-P. (Hrsg.). (2004a). *Cap maths CM2*. Paris: Hatier.

[207] Charnay, C., Combier, G. & Dussuc, M.-P. (Hrsg.). (2004b). *Le Dico.maths, répertoire des mathématiques CM2*. Paris: Hatier.

[208] Delord, R. & Vinrich, G. (Hrsg.) (2000a). *Collection Cinq sur Cinq, Maths 6^{e}* (2. Aufl.). Paris: Hachette Éducation.

[209] Delord, R. & Vinrich, G. (Hrsg.) (2000b). *Collection Cinq sur Cinq, Maths 5^{e}* (2. Aufl.). Paris: Hachette Éducation.

[210] Delord, R. & Vinrich, G. (Hrsg.) (2002). *Collection Cinq sur Cinq, Maths 4^{e}* (2. Aufl.). Paris: Hachette Éducation.

[211] Delord, R. & Vinrich, G. (Hrsg.) (2003). *Collection Cinq sur Cinq, Maths 3^{e}* (2. Aufl.). Paris: Hachette Éducation.

[212] Feuerlein, R., Titze, H. & Walter, H. (1992a). *Mathematik 7, Algebra* (2. Aufl. 1999). München: Bayerischer Schulbuch-Verlag.

[213] Feuerlein, R., Titze, H. & Walter, H. (1992b). *Mathematik 8, Algebra* (2. Aufl. 2000). München: Bayerischer Schulbuch-Verlag.

[214] Feuerlein, R., Titze, H. & Walter, H. (1992c). *Mathematik 9, Algebra* (2. Aufl. 2001). München: Bayerischer Schulbuch-Verlag.

[215] Feuerlein, R., Titze, H. & Walter, H. (1992d). *Mathematik 10, Algebra* (3. Aufl. 2002). München: Bayerischer Schulbuch-Verlag.

[216] Habler, E., Kappl, S., Kiermair, X., Lippert, H., Püls, H. & Sobotta, C. (1995a). *Mathematik für Realschulen. 8. Jahrgangsstufe Wahlpflichtfächergruppe I.* Frankfurt am Main: Moritz Diesterweg & Co.

[217] Habler, E., Kappl, S., Kiermair, X., Lippert, H., Püls, H. & Sobotta, C. (1995b). *Mathematik für Realschulen. 8. Jahrgangsstufe Wahlpflichtfächergruppe II/III.* Frankfurt am Main: Moritz Diesterweg & Co.

[218] Habler, E., Kappl, S., Kiermair, X., Lippert, H., Püls, H., Sobotta, C. & Steger, M. (1996a). *Mathematik für Realschulen. 9. Jahrgangsstufe Wahlpflichtfächergruppe I.* Frankfurt am Main: Moritz Diesterweg & Co.

[219] Habler, E., Kappl, S., Kiermair, X., Lippert, H., Püls, H., Sobotta, C. & Steger, M. (1996b). *Mathematik für Realschulen. 9. Jahrgangsstufe Wahlpflichtfächergruppe II/III.* Frankfurt am Main: Moritz Diesterweg & Co.

[220] Habler, E., Kappl, S., Kiermair, X., Lippert, H., Püls, H., Sobotta, C. & Steger, M. (1997a). *Mathematik für Realschulen 10. Jahrgangsstufe Wahlpflichtfächergruppe I.* Frankfurt am Main: Moritz Diesterweg & Co.

[221] Habler, E., Kappl, S., Kiermair, X., Lippert, H., Püls, H., Sobotta, C. & Steger, M. (1997b). *Mathematik für Realschulen. 10. Jahrgangsstufe Wahlpflichtfächergruppe II/III.* Frankfurt am Main: Moritz Diesterweg & Co.

[222] Habler, E., Kappl, S., Kiermair, X., Lippert, H., Püls, H., Sobotta, C., Steger, M. & Sulzenbacher, M. (2001a). *Mathematik für Realschulen. 5. Jahrgangsstufe.* Frankfurt am Main: Moritz Diesterweg & Co.

[223] Habler, E., Kappl, S., Kiermair, X., Lippert, H., Püls, H., Sobotta, C, Steger, M. & Sulzenbacher, M. (2001b). *Mathematik für Realschulen. 6. Jahrgangsstufe.* Frankfurt am Main: Moritz Diesterweg & Co.

[224] Habler, E., Kappl, S., Kiermair, X., Lippert, H., Püls, H., Sobotta, C., Steger, M. & Sulzenbacher, M. (2002). *Mathematik für Realschulen. 7. Jahrgangsstufe Wahlpflichtfächergruppe II/III.* Frankfurt am Main: Moritz Diesterweg & Co.

[225] Habler, E., Kappl, S., Lippert, H., Sobotta, C. (1994). *Mathematik für Realschulen. 7. Jahrgangsstufe.* Frankfurt am Main: Moritz Diesterweg & Co.

[226] Kratz, J. (1993a). *Mathematik 7, Geometrie* (1. Aufl. 1993). München: Bayerischer Schulbuch-Verlag.

[227] Kratz, J. (1993b). *Mathematik 8, Geometrie* (1. Aufl. 1993). München: Bayerischer Schulbuch-Verlag.

[228] Kratz, J. (1993c). *Mathematik 9, Geometrie* (1. Aufl. 1993). München: Bayerischer Schulbuch-Verlag.

[229] Kratz, J., Schweiger, K. & Wörle, K. (1994). *Mathematik 10, Geometrie* (1. Aufl. 1994). München: Bayerischer Schulbuch-Verlag.

[230] Kunesch, E. & Rieck, B. (1995). *Mathematik 6, Algebra/Geometrie* (2. Aufl. 1999). München: Bayerischer Schulbuch-Verlag.

[231] Misset, L., Turner, J. & Lotz, É. (2004). *Déclic 2^de^ Mathématiques*. Paris: Hachette Éducation.

[232] Rieck, B. (1994). *Mathematik 5, Algebra/Geometrie* (3. Aufl. 1999). München: Bayerischer Schulbuch-Verlag.

[233] Rinkens, H.-D. & Wynands, A. (Hrsg.). (1997). *Mathe aktiv 7 für bayerische Hauptschulen*. Hannover: Schroedel.

[234] Rinkens, H.-D. & Wynands, A. (Hrsg.). (1998). *Mathe aktiv 6 für bayerische Hauptschulen*. Hannover: Schroedel.

[235] Rinkens, H.-D. & Wynands, A. (Hrsg.). (2001a). *Mathe aktiv 5 für bayerische Hauptschulen*. Hannover: Schroedel.

[236] Rinkens, H.-D. & Wynands, A. (Hrsg.). (2001b). *Mathe aktiv 8 für bayerische Hauptschulen*. Hannover: Schroedel.

[237] Rinkens, H.-D. & Wynands, A. (Hrsg.). (2001c). *Mathe aktiv 9 für bayerische Hauptschulen*. Hannover: Schroedel.

[238] Schmitt, H., Wohlfahrt, P., u.a. (1989). *Mathematik Buch 8, Ausgabe GN, Algebra/Geometrie* (3. Aufl. 1989). München: Bayerischer Schulbuch-Verlag.

[239] Vogel, G.-H., Vollath, E. & Haubner, K. (Hrsg.). (2002). *Formel 10, Mathematik für die Hauptschule.* Bamberg: C.C. Buchner.

Résumé par chapitres en français

Bei der vorliegenden Arbeit handelt es sich um eine Dissertation, die im Cotutelle Verfahren an der Universität Regensburg und der Université Paris 7 – Denis Diderot durchgeführt wurde. Da die Arbeit auf Deutsch verfasst ist wird auf den folgenden Seiten eine französische Zusammenfassung der einzelnen Kapitel angeboten.

Cette thèse a été faite dans le cadre d'une cotutelle entre l'université Paris 7 – Denis Diderot et l'Universität Regensburg. Ce chapitre propose des résumés par chapitres en français pour faciliter l'accès aux contenus aux lecteurs français.

Introduction

Actuellement un client allemand doit prendre la décision suivante lors de la signature d'un nouveau contrat de téléphonie mobile. Doit-il se décider pour un nouveau tarif forfaitaire que les compagnies de téléphone proposent dans leurs publicités malgré un prix fixe assez élevé ? Ou vaut-il mieux garder un contrat classique avec un prix fixe modéré et des tarifs dépendant du temps des communications effectuées ? Il existe aussi toujours la possibilité de prendre une carte sans abonnement, mais avec des prix à la minute très élevés.
Pour pouvoir répondre de manière fondée, il est nécessaire de comprendre qu'il s'agit d'un problème dans lequel deux grandeurs dépendent l'une de l'autre. Le critère important pour prendre une décision est le prix qui dépend de la durée des communications. Un prix est associé à chaque durée et il varie de manière différente avec la durée selon l'offre choisie. Dans ce premier exemple il s'agit d'accroissement linéaire. Lors de placement d'argent ou de prise de crédit, il est nécessaire d'avoir développé une compréhension des accroissements non-linéaires pour pouvoir comprendre la situation et la juger correctement.

Ces deux exemples montrent la diversité des situations fonctionnelles qu'on rencontre dans la vie quotidienne et les décisions qui doivent être prises. La capacité de gérer des situations fonctionnelles et de prendre des décisions fondées est une condition nécessaire pour être un citoyen constructif, impliqué et réfléchi.

Mais les résultats d'études comme PISA ou PALMA montrent que beaucoup d'élèves allemands ont des difficultés avec les problèmes concernant des situations fonctionnelles et que leurs scores restent en dessous des scores des élèves venant d'autres pays.

Cette divergence entre l'importance primordiale du contenu et les faibles résultats des élèves allemands constitue le point de départ de ce travail. Des questions se posent sur les capacités et les idées réellement requises ainsi que sur leur mise en pratique et sur leur soutien dans les curricula.

Les analyses des difficultés typiques mènent à la question de savoir quels changements dans l'enseignement peuvent aider à faire diminuer ou disparaître ces problèmes. Ce travail traite des approches en France et en Allemagne. Ces deux grands pays européens travaillent avec des concepts différents et l'échange entre les communautés de chercheurs ne s'est pas encore largement développé. On peut donc s'attendre à des impulsions positives pour les deux pays en comparant les deux approches. Dans le cadre de ce travail seront comparées les théories et manières d'agir concernant le travail sur les situations fonctionnelles pour en extraire les points forts et les points faibles et finalement proposer des changements.

L'objet de recherche est décrit en détail dans le premier chapitre. La *pensée fonctionnelle* y est définie et elle y est associée à des idées et des capacités nécessaires pour savoir traiter les situations fonctionnelles.

Les deux chapitres suivants se centrent sur un travail de théorie précédant les analyses comparatives. Le cadre théorique de la pensée fonctionnelle y est défini et les outils d'analyse utilisés dans la suite y sont développés.

Le second chapitre retrace le développement historique de la notion de fonction. Le but est de montrer à quelles difficultés ce développement s'est trouvé confronté et comment celles-ci ont été surmontées. Un poids important est donné dans la définition de pensée fonctionnelle aux facteurs décisifs qui ont permis les avances substantielles.

Les concepts théoriques utilisés en France, en Allemagne et dans la recherche internationale sont traités dans le troisième chapitre. Ce chapitre a pour but de définir clairement les bases théoriques de la pensée fonctionnelle et de construire un cadre théorique pour les analyses des chapitres suivants. L'orientation binationale de cette thèse fait que le troisième but de ce chapitre est d'unir les concepts théoriques utilisés par la communauté de chercheurs des deux pays pour ainsi participer à l'amélioration de l'échange entre les différentes traditions de recherche.

Un grand nombre de travaux de recherche existent déjà sur l'apprentissage des fonctions et sur le travail sur des situations fonctionnelles. Le quatrième chapitre propose un aperçu des résultats de ces recherches. Ils seront présentés de telle manière qu'on puisse les interpréter avec le cadre théorique développé dans le troisième chapitre et les utiliser pour améliorer les instruments d'analyse. L'utilisation des points forts et des points faibles déjà connus facilite leur identification lors des analyses menées et aide à trouver les raisons de leur apparition ainsi que des propositions de changements.

Les questions de recherche concernant la comparaison des curricula peuvent être formulées de manière précise dans le cinquième chapitre à la suite de ce travail théorique et de la définition claire de la pensée fonctionnelle.

Les deux chapitres suivants sont dédiés à la comparaison des programmes et des livres de classe. Le but est d'éclaircir dans quelle mesure les élèves des deux pays sont aidés dans le développement de la pensée fonctionnelle.

Les deux pays avec leurs systèmes d'enseignement respectifs sont comparés au début du sixième chapitre pour assurer une comparabilité des résultats attendus. Après un court aperçu du développement historique de l'enseignement des fonctions, les programmes actuels de la France et de l'Allemagne (en prenant l'exemple de la Bavière) sont analysés. Tous les niveaux du CM2 à la 2de (ce qui correspond à la Sekundarstufe I en Allemagne) et en Bavière tous les différents types d'école sont pris en compte.

L’analyse concernant la possibilité des élèves de développer la pensée fonctionnelle se poursuit dans le septième chapitre avec la comparaison des livres de classe. Des comparaisons détaillées du curriculum potentiel montrent comment les auteurs mettent en pratique les programmes et quels contenus, capacités et idées concernant la pensée fonctionnelle sont exigés.

Il est spécialement intéressant se pencher sur les contenus où l’approche n’est pas la même dans les deux pays. C’est de ces différences que peuvent venir les impulsions pour les changements possibles et elles doivent donc être suivies très attentivement.

Les deux chapitres suivants servent à essayer d’identifier en pratique les points forts et les points faibles reconnus lors des analyses précédentes. Deux approches différentes ont été choisies pour étudier comment les élèves travaillent avec la pensée fonctionnelle et quels problèmes surgissent lors de ce travail.

Des analyses quantitatives sont faites dans le huitième chapitre et amènent à démontrer certaines relations avec les résultats des deux chapitres précédents. Dans la première partie sont présentés les résultats de la sous échelle *variations et relations* de PISA 2003. Des analyses de fonctionnement différentiel de problèmes essayent identifier les points forts et les points faibles des deux pays. Dans la seconde partie les résultats de l’étude longitudinale bavaroise PALMA permettent en regardant une sous échelle de voir le développement de la pensée fonctionnelle en Bavière.

Les analyses qualitatives du neuvième chapitre documentent certains points forts et points faibles identifiés dans le sixième et le septième chapitre. Une étude d’interviews réalisée en France et en Allemagne montre grâce à des séquences d’interviews l’effet qu’ont certaines parties spécifiques de la pensée fonctionnelles dans des situations concrètes. Cela permet une compréhension détaillée de certaines réponses d’élèves et forme la base des propositions de changements faites par la suite.

Ces changements sont le contenu de la première partie du dixième chapitre. Sur la base des résultats de ce travail des propositions sont faites pour essayer d’éviter les points faibles des deux pays d’une part et pour chercher à profiter des points forts d’autre part.
Finalement un résumé de ce travail met en avant les résultats et ouvre des perspectives pour des recherches futures.

La pensée fonctionnelle

Il est facile d'associer plusieurs idées et concepts à la *pensée fonctionnelle*. En regardant de près on remarque cependant que sa compréhension intuitive reste souvent vague et que chaque personne y associe des contenus différents. Une définition claire doit donc en être donnée pour pouvoir l'utiliser de manière précise dans ce travail.

Le concept de *pensée fonctionnelle* (*funktionales Denken* en allemand) a été utilisé pour la première fois en 1905 dans le cadre des réformes de Meran et en devient le fil conducteur . La notion de pensée fonctionnelle y englobe les contenus suivants :

1) La définition de la notion de fonction
2) Les représentations graphiques
3) L'introduction au calcul différentiel et intégral
4) Les applications
5) « Le principe du mouvement » venant de la « nouvelle géométrie »

C'est en particulier l'aspect de variation de fonction qui y trouve une place importante (Krüger, 2000b, S. 222).
Ces réformes ne sont pas mises en pratique dans toute leur ampleur. Dans les programmes de Prusse de 1925 la pensée fonctionnelle ne désigne plus qu'une introduction fondée de la notion de fonction (Krüger, 2000b, S. 234). Cela permet une réorientation de la pensée fonctionnelle.

En 1932 le mathématicien Ernst Breslich reprend la notion et lui donne les contenus suivants (cité d'après Cha, 1999, S. 43) :

1) Recognizing how a change in one of the related variables affects the values of the others,

2) Recognizing the character of the relationships between variables,

3) Determining the nature of the relationships, and

4) Expressing relationships in algebraic symbols.

Il s'agit donc d'une compréhension de la relation entre deux variables et de la capacité d'exprimer cette relation dans la représentation algébrique.

Le didacticien des mathématiques Hans-Joachim Vollrath reprend la notion de *funktionales Denken* plusieurs années plus tard et la définit de manière précise :

> To learn about functions and to be successful in using functions to solve problems requires a mental ability which can be characterized as follows:
>
> 1) Dependences between variables can be stated, postulated, produced and reproduced.
>
> 2) Assumptions about the dependence can be made, can be tested, and if necessary can be revised
>
> The mental activities described in 1) are fundamental for working with functions ….
> The activities in 2) are typical for "mathematical thinking"…. This ability can be called functional thinking…. (Vollrath, 1986a, S. 1)

Une grande importance est accordée à l'aspect de variation. Dans la suite l'auteur précise cette définition en mettant d'avantage l'accent sur la capacité de travailler sur des situations fonctionnelles dans la vie quotidienne. D'autre part le rôle des représentations et des passages d'une représentation à une autre est renforcé.

D'autres auteurs reprennent aussi la notion et y ajoutent certaines caractéristiques, comme de reconnaître « la fonction en soi » ; de plus un nouveau renforcement de l'importance est donné aux représentations et aux passages entre elles.
L'étude PISA 2003 de l'OCDE reprend aussi l'idée mais sans la nommer ainsi. La définition de la sous échelle *variations et relations* englobe plusieurs de ses caractéristiques essentielles.

> *Les variations et les relations* – Ce concept a trait aux manifestations mathématiques de l'évolution et aux relations fonctionnelles et de dépendance entre variables. […]. Elles sont représentées de nombreuses manières différentes (tableaux et représentations symboliques, algébriques, graphiques et géométriques). Comme les modes de représentation peuvent servir des objectifs différents et avoir des propriétés spécifiques, il est souvent essentiel que les élèves passent d'un mode à l'autre lorsqu'ils s'attaquent à des problèmes relevant de cette catégorie. (OECD, 2004c, S. 41)

L'ensemble des ces travaux a influencé la définition utilisée dans ce travail :

La pensée fonctionnelle désigne la manière typique de penser lors du travail sur des dépendances fonctionnelles.

Elle se traduit entre autre par les compétences suivantes :

1) Les relations fonctionnelles entre des grandeurs peuvent être détectées, décrites, produites et reproduites dans toutes les représentations usuelles.
2) Des hypothèses sur la nature de la relation, spécialement sur l'influence de changements dans une variable, peuvent être faites, testées et révisées, si besoin est.

Le premier point contient la reconnaissance de dépendances fonctionnelles dans toutes ses représentations mathématiques ainsi que dans la réalité. Les passages entre toutes les représentations usuelles (donc entre le tableau de valeurs, la représentation algébrique, la représentation graphique ainsi que les descriptions proches de la réalité) sont utilisés lors de la résolution de problèmes ou pour des besoins de représentation. Le caractère unique des fonctions ainsi que leur aspect de covariation, mentionné dans le second point, sont connus.

En choisissant de parler de *dépendance fonctionnelle* et pas de *fonction*, on a pu éviter la restriction à l'aspect purement mathématique et l'accent a été mis sur l'application à la réalité. Il n'est pas exigé de pouvoir utiliser les fonctions comme des objets pour avoir une pensée fonctionnelle. Cette vision implique une connaissance plus approfondie des fonctions. Il y a cependant dans plusieurs problèmes une utilisation implicite de la fonction en tant qu'objet, ce qui fait qu'une certaine compréhension de l'objet est nécessaire pour pouvoir développer la pensée fonctionnelle. (Voir chapitre 3)

Plusieurs notions et concepts utilisés dans le choix de cette définition de la pensée fonctionnelle proviennent de la recherche actuelle et se recoupent avec d'autres notions. Ces liens et les choix de la définition sont expliqués dans les chapitres trois et quatre de ce travail.

Résumé historique

Le développement de la définition de la notion de fonction est un processus qui a pris plusieurs siècles. La définition actuelle venant de la théorie des ensembles n'était pas encore connue quand les fonctions sont apparues pour la première fois dans les classes françaises et allemandes au début du vingtième siècle. C'est seulement dans les années 70, dans le cadre des nouvelles mathématiques, qu'elle allait faire son entrée dans les classes (Voir chapitre 6).

Plusieurs idées que les élèves actuels ont des fonctions peuvent être retrouvées dans le développement historique de la notion de fonction. Ce chapitre résume ce développement en regardant spécialement l'importance donnée aux différentes représentations. Pour une description plus détaillée le lecteur est renvoyé à d'autres articles sur ce sujet (par exemple Kleiner, 1989; Rüthing, 1986; Youschkevitch, 1976).

Le développement historique de la notion de fonction peut être divisé en deux parties.
La notion de fonction n'est utilisée qu'implicitement pendant la première période, qui dure jusqu'au dix-huitième siècle, et les représentations de fonctions ne sont pas encore toutes reliées à cette notion.
La seconde période commence dans la première moitié du dix-huitième siècle. Une première définition de la notion de fonction est donnée à ce moment là, mais elle est encore soumise à de nombreux changements, raffinements et précisions dans les siècles suivants.

Les premières utilisations de relations fonctionnelles peuvent être trouvées chez les Babyloniens en 2000 avant Jésus Christ. Des tableaux étaient utilisés pour faciliter certains calculs.

Au 14ième siècle Nicole Oresme (1323-1382) étudie les courbes et l'aspect de variations des relations fonctionnelles. Bien qu'il n'introduise pas de définition de la notion de fonction, cette utilisation d'une nouvelle représentation et des variations marque un pas important sur le chemin du développement de cette notion.

Au 17ième siècle Pierre de Fermat (1601-1665) et René Descartes (1596-1650) développent indépendamment l'un de l'autre l'écriture algébrique sur la base de travaux de François Viète (1540-1603). A partir du 17ième siècle les représentations usuelles d'aujourd'hui sont connues et reliées entre elles et permettent ainsi une accélération du développement de la notion de fonction.

Gottfried Leibniz (1646-1716) utilise le premier 1673 le mot *fonction* et développe ce concept avec Johann Bernoulli (1667-1748) qui en donne une première définition dans une lettre en 1718 :

> On appelle fonction d'une grandeur variable, une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes (d'après Youschkevitch, 1976)

Il s'agit donc d'une expression algébrique qui permet de déterminer une grandeur en en connaissant une autre. L'expression algébrique est mise en avant et plusieurs points, comme la signification exacte de « composée de quelque manière », sont à clarifier. Cela est le point de départ d'un processus de précision de la notion de fonction qui va durer deux siècles.

D’une part la notion va être restreinte en enlevant les fonctions non uniques et d’autre part élargie en admettant des fonctions sans représentation algébrique.

Leonhard Euler (1707-1783), Jean-Baptiste Fourier (1768-1830), Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) et Hermann Hankel (1839-1873) participent entre autres à ce développement qui mène finalement à la définition en utilisant les termes de la théorie des ensembles donnée par Felix Hausdorff (1862-1942) en 1914.

Ce résumé montre que l’utilisation de la représentation algébrique et des passages entre les différentes représentations a permis de faire avancer rapidement le développement de la notion de fonction. La première définition de la notion de fonction reste encore assez proche de la représentation algébrique, mais il est clair que le détachement de la notion de fonction de ses représentations a permis au fil des siècles d’arriver à une définition très précise.

Date	Découvreur	Découverte, innovation	Image des fonctions
2000 avant. J. C.	Babyloniens	Tableau	Règle de calcul, discret
14ième siècle	Oresme	Graphique	Aspect de variation
17ième siècle	Fermat Descartes	Formule	Expression algébrique Formule avec de opérations mathématiques simples Pas forcément unique Pas de définition
1718	Bernoulli	Expression algébrique Première définition	Expression algébrique de grandeurs variables Pas forcément unique
1748	Euler	Expression analytique	Expression algébrique de grandeurs variables Pas forcément unique Les fonctions constantes ne sont pas admises
1755	Euler	Covariation Courbe tracée à main levée	Dépendance quelconque entre des grandeurs Plus forcément une expression analytique Implicitement : Le graphique est ascendant et n'a pas d'angles
1870	Hankel Définition de Dirichlet	Association unique Covariation	Dépendance quelconque Plus forcément continue ou représentable par une formule ou un graphique
1914	Hausdorff	Association unique entre ensembles	Relation unique à droite. Définition venant de la théorie des ensembles Domaine de définition et domaine de valeurs N'est pas forcément représentable comme graphique ou comme formule Covariation et dépendance ne sont plus citées explicitement

Tabelle 13: Résumé

Cadre théorique

Ce chapitre a trois buts principaux. Le premier est de faire ressortir clairement les bases théoriques des choix faits lors de la définition de pensée fonctionnelle. Le second est de développer les instruments qui vont être utilisés dans les analyses des chapitres suivants. Et le troisième est finalement de mettre en évidence les concepts théoriques utilisés en France, en Allemagne ainsi que dans la recherche internationale et d'essayer de créer des liens entre ceux-ci.

Au début l'analyse des travaux de Duval, Lesh et de Kaput concerne les représentations d'idées mathématiques et les passages entre elles. Ensuite les champs conceptuels de Vergnaud donnent un socle théorique à la pensée fonctionnelle et les Grundvorstellungen de vom Hofe ainsi que les Grundkenntnisse nouvellement définies permettent de la connecter à des idées et à des savoirs. A la fin d'autres concepts étroitement liés à la pensée fonctionnelle sont présentés, comme par exemple l'action concept, le process concept et l'object concept de Dubinsky ou le concept image de Vinner. Ils sont reliés au cadre de ce travail de telle manière qu'ils puissent être utilisés lors des analyses des chapitres suivants.

La seconde et la troisième partie de ce chapitre traitent en détail des différentes représentations des relations fonctionnelles, des passages entre elles et de la définition de la notion de fonction. Cette compréhension précise est nécessaire pour pouvoir faire les analyses des chapitres suivants.

Base théorique

Approche sémiotique : Les registres sémiotiques de Duval

La définition de la pensée fonctionnelle reprend plusieurs aspects importants des travaux de Raymond Duval, qui fait de la recherche en sémiotiques et spécialement sur le passage entre différentes représentations d'un objet mathématique.

D'après Duval il est nécessaire de connaître plusieurs représentations d'un même objet mathématique et de pouvoir effectuer des passages entre ces représentations pour être réellement capable de le cerner.

> … (I)l est essentiel, dans l'activité mathématique, soit de pouvoir mobiliser plusieurs registres de représentation sémiotiques …, soit de pouvoir choisir un registre plutôt que l'autre. Et, indépendamment de toute commodité de traitement, *ce recours à plusieurs registres semble même une condition nécessaire pour que les objets mathématiques ne soient pas confondus avec leurs représentations et qu'ils puissent aussi être reconnus dans chacune de leurs représentations.* (Duval, 1993, S. 40)

Cette idée a été reprise lors de la définition de la pensée fonctionnelle en insistant sur l'importance du fait de pouvoir utiliser toutes les représentations usuelles et d'effectuer les passages entres elles.

Raymond Duval travaille sur les *registres de représentations sémiotiques* (en abrégé : registres). Les registres principalement utilisés lors du travail avec les fonctions sont :

1. Le registre algébrique
2. Le registre graphique
3. Le registre des tableaux
4. Le registre du langage parlé

Le registre du langage parlé est un registre très complexe et ne peut pas être pris en compte dans toute sa profondeur dans ce travail. Les descriptions verbales des relations fonctionnelles qui apparaissent en cours sont souvent déjà des concentrations et des abstractions des descriptions verbales utilisées dans la vie quotidienne. De plus elles sont dans beaucoup de cas accompagnées d'images, ce qui est aussi le cas dans la vie quotidienne.

En accord avec Duval, d'autres auteurs ayant des approches différentes, comme Richard Lesh et al. et James Kaput, donnent un poids important aux représentations dans les différents registres et aux passages entre ceux-ci lors de l'étude de la pensée fonctionnelle. Tous voient ici la clef de la compréhension d'une idée mathématique.

Approche psychologique : Les champs conceptuels de Vergnaud

Avec la théorie des *champs conceptuels* Gérard Vergnaud a créé un outil d'analyse pour le développement des compétences mathématiques, basé sur des idées psychologiques.

Le champ conceptuel des situations fonctionnelles est constitué de toutes les situations dans lesquelles des dépendances fonctionnelles sont représentées. Les concepts qui sont reliés à ce champ sont nombreux : naturellement le concept de fonction, mais aussi les concepts des opérations sur des nombres, d'équation, de relation, de variation, de variable, d'inconnue, de dérivée, d'intégrale, … .

Mais il est également possible de définir un champ conceptuel plus restreint concernant les fonctions. On peut, par exemple, regarder le champ conceptuel des relations fonctionnelles simples, qui est contenu dans le champ conceptuel des situations fonctionnelles. Ce champ est défini de telle manière qu'il est créé par les situations dans lesquelles apparaissent seulement certains types de fonctions (comme les fonctions affines, les polynômes de bas degré et les fonctions exponentielles) et certains concepts simples (donc, par exemple, ni le concept de dérivée ni celui d'intégrale).

Le mode de pensée nécessaire pour pouvoir maîtriser ce champ conceptuel se recoupe en grande partie avec la pensée fonctionnelle. La définition de pensée fonctionnelle ne contient pas de restrictions concernant les fonctions. La restriction du champ conceptuel a été faite parce que la pensée fonctionnelle requiert la connaissance d'un certain nombre de types de fonctions mais pas de toutes. Il s'agit donc d'un champ conceptuel minimal, dont les situations demandent une pensée fonctionnelle pour pouvoir être traitées.
Du point de vue du présent travail la question se pose de savoir comment ce champ conceptuel minimal est utilisé dans les classes en France et en Allemagne.

Approche constructiviste : Grundvorstellungen de vom Hofe et Grundkenntnisse

Avec le concept des *Grundvorstellungen* Rudolf vom Hofe propose un outil, avec lequel on peut aussi bien donner des buts normatifs pour des contenus mathématiques spécifiques qu'analyser de manière descriptive des solutions d'élèves.

Les Grundvorstellungen forment le lien entre l'individu, le contenu mathématique et son application dans la réalité, ce qui les rend indispensables pour tout passage entre des représentations. Elles ne sont pas stables dans le temps et se développent, interagissent ou doivent être reformulées pendant le processus d'apprentissage.
Un élargissement du concept de Grundvorstellungen est de remplacer l'application dans la réalité par une représentation dans un registre quelconque. Cela permet d'utiliser les Grundvorstellungen pour expliquer tout type de passages entre deux registres. Pour les différencier des Grundvorstellungen initiales ce type de Grundvorstellung est appelé *Grundvorstellung secondaire*.

Les Grundvorstellungen concernant les fonctions peuvent être divisées en deux groupes. Le premier groupe est constitué de Grundvorstellungen concernant des aspects de la pensée fonctionnelle. Le second groupe consiste en celles qui résultent des différentes représentations de fonctions.
Grundvorstellungen concernant des aspects de la pensée fonctionnelle :

1. Grundvorstellung d'association
   Une variable est associée à une autre
2. Grundvorstellung de covariation
   Une variable varie en fonction d'une autre
3. Grundvorstellung d'objet
   Une fonction est un objet avec lequel on peut travailler

Grundvorstellungen en relation avec les différentes représentations

4. Grundvorstellung d'une relation fonctionnelle en tant que formule
5. Grundvorstellung d'une relation fonctionnelle en tant que courbe
6. Grundvorstellung d'une relation fonctionnelle en tant que tableau
7. Grundvorstellung d'une relation fonctionnelle en tant que paire ordonnée

Lors des passages concrets entre une représentation dans un registre et une représentation dans un autre les Grundvorstellungen doivent être utilisées dans des situations constituées de certains concepts et objets. Pour faire ceci, il est nécessaire d'utiliser des connaissances spécifiques sur les propriétés des objets et des concepts en relation avec une Grundvorstellung. Ces connaissances sont appelées *Grundkenntnisse* pour marquer leur relation étroite avec les Grundvorstellungen. Ce sont donc des connaissances sur les effets des propriétés d'un objet ou d'un concept mathématique lors du passage entre deux représentations. Des exemples de Grundkenntnisse sont

1. Le signe de a dans la représentation algébrique $f(x)=ax+b$ indique si la représentation graphique de la fonction affine monte ou descend (lu de gauche à droite).

(Il s'agit d'une connaissance utile pour le passage entre la représentation algébrique et la représentation graphique. Elle peut être vue comme une concrétisation de la Grundvorstellung de covariation et de la Grundvorstellung d'une relation fonctionnelle en tant que courbe lors du travail sur les fonctions affines.)

2. La représentation graphique d'une fonction affine est une droite
   (Connaissance utile pour le passage venant de la représentation graphique ou allant vers elle. Concrétisation de la Grundvorstellung d'une relation fonctionnelle en tant que courbe lors du travail sur les fonctions affines)
3. Une des caractéristiques des fonctions affines est qu'un changement dans une variable fait toujours changer l'autre variable de la même manière. (Les accroissements sont constants. $f(x+n)-f(x)=f(n)-f(0)$)
   (Connaissance utile lors du passage venant de la réalité ou allant vers elle. Concrétisation de la Grundvorstellung de covariation lors du travail sur les fonctions affines)

Les changements de registres demandés par Duval sont implicitement contenus dans le concept des Grundvorstellungen sans y être détaillés. Celui-ci se concentre sur les passages concrets et sur les idées nécessaires pour les réaliser.
Les Grundkenntnisse identifiées pour certains changements de registres ont aussi été identifiées par Duval. Il n'explique cependant pas comment ces connaissances sont activées. L'activation des connaissances est faite par les Grundvorstellungen. Les registres de Duval, les Grundvorstellungen et les Grundkenntnisse se complètent donc.

Vergnaud identifie des relations de base pour classifier les situations et les relie aux intuitive meanings de Fischbein. Cela rappelle fortement l'aspect normatif des Grundvorstellungen. Selon la théorie de vom Hofe les situations sont utilisées pour comprendre les relations de base correspondantes. Ce processus est appelé la création de Grundvorstellungen. Cette relation entre relation de base et situations n'est pas relevée par Vergnaud. On peut cependant poser la question de savoir si ce ne sont pas les relations de base/Grundvorstellungen qui permettent aux élèves de classer les situations dans une catégorie de situations et d'activer ainsi des schèmes ? Mais ceci équivaut à dire que ce sont les relations de base qui activent les schèmes.
Les Grundkenntnisse se recoupent en grande partie avec les théorèmes-en-acte de Vergnaud. Tous deux permettent l'utilisation des théorèmes mathématiques dans des situations concrètes. Mais l'accent est mis sur différents aspects dans les deux cas.

La pensée fonctionnelle contient la reconnaissance de situations fonctionnelles et les passages entre les différentes représentations. Ceci représente aussi deux des points centraux du concept des Grundvorstellungen. Une bonne base de Grundvorstellungen est indispensable pour pouvoir développer la pensée fonctionnelle.
Le développement de Grundvorstellungen et de Grundkenntnisse est fortement influencé par les situations sur lesquelles travaillent les élèves. Les analyses des programmes et spécialement des livres de classe des chapitres 6 et 7 permettent de voir quelles Grundvorstellungen y sont renforcées. Les analyses des interviews et des résultats de PISA

montrent par contre quelles Grundvorstellungen ont effectivement été développées par les élèves.

Autres théories utilisées

Les théories d'Ed Dubinsky et d'Ana Sfard permettent de montrer que la pensée fonctionnelle englobe le concept d'action et le concept de processus des fonctions. Par contre le concept d'objet ou la réification montrent les limites de celles-ci.

Les travaux de Shlomo Vinner s'avèrent d'une grande utilité lors des analyses faites dans les chapitres suivants. Il définit le *concept image* et le *concept definition*, qui permettent une description précise de ce que les élèves associent avec des concepts mathématiques comme les fonctions. On peut déjà identifier des restrictions possibles des concepts images lors des analyses des livres de classe. Plus tard ces restrictions peuvent être documentées par exemple avec des extraits d'interviews menés avec les élèves.

Anna Sierpinska choisit une approche différente qui permet d'utiliser l'analyse historique du développement des fonctions en y repérant les obstacles épistémologiques. Ces obstacles aident à cerner plus facilement les difficultés actuelles des élèves et à les comprendre.

Les représentations et les passages entre elles

La première partie du cadre théorique et la définition de la pensée fonctionnelle montrent clairement l'importance qui est donnée dans ce travail aux représentations dans différents registres et aux passages entre ceux-ci.

Le schéma suivant présente un cercle de modélisation comme on en trouve en grand nombre dans les articles de recherche sur la modélisation (Lesh et al, 1987, S. 36 ; Blum, 2002; vom Hofe et al., 2004) (GV sont les Grundvorstellungen et GK les Grundkenntnisse) :

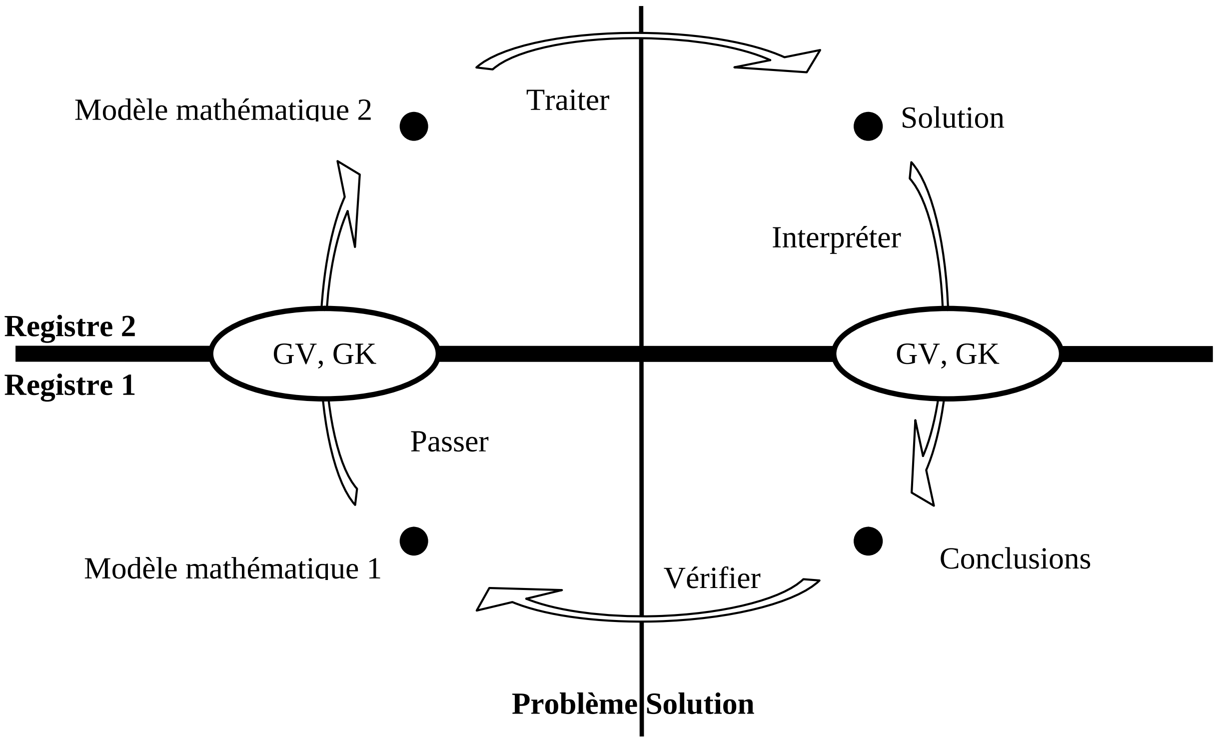


Abbildung 56: Cercle de modélisation

Ce cercle s'utilise lors de la résolution d'un problème donné dans un registre, pour la solution duquel il faut faire des analyses dans un autre registre.
Si le problème est donné dans le registre 1, il faut tout d'abord passer avec l'aide des Grundvorstellungen et des Grundkenntnisse dans le registre deux et y reformuler un second modèle mathématique du problème de départ. Le problème peut ensuite être traité à l'intérieur du second registre et une solution peut être trouvée. Cette solution doit ensuite être interprétée dans le registre de départ et il faut vérifier si la solution obtenue correspond aux exigences du problème initial.
Le cercle de modélisation ne doit pas être utilisé comme un modèle rigide, maie être ajusté aux problèmes étudiés. Un second tour du cercle entier peut s'avérer utile si la solution trouvée ne correspond pas aux besoins du problème. Ou bien seuls certains passages sont inversés et répétés, par exemple si le second modèle mathématique n'est pas adapté aux besoins.

Le cercle de modélisation permet de mieux comprendre le processus de résolution de problèmes quand il y a deux registres en jeu, ce qui va être utilisé lors des analyses des solutions des élèves.

Les représentations de fonctions dans les différents registres sont analysées en détail dans la suite de ce chapitre. Chaque représentation met l'accent sur une propriété différente, favorise une Grundvorstellung ou un concept de fonctions et a certains désavantages, qui peuvent créer des difficultés. Le tableau suivant résume les résultats :

	Formule	Graphique	Tableau	Langage
Nature de la variation	Implicite	Explicite	Explicite (si ordonné)	Possible
Règle de correspondance	Explicite	Implicite	Implicite	Possible
Display / Action – Notation (Kaput)	Action	Display	Display	Display
Grundvorstellungen dominantes (vom Hofe)	Association	Covariation, Object	Association, Covariation	Plutôt Association, Covariation
Action / Processus / Object (Dubinsky)	Action, Processus	Processus, Object	Processus	Plutôt Processus
Structural / Operational (Sfard)	Structural, Operational	Structural	Operational	Plutôt Operational
Limitations	Pas utilisable pour toutes les fonctions	Sont des approximations et incomplets	Seulement un choix de certaines paires d'origine/image	D'autres registres sont souvent utilisés en plus

Tabelle 14: Résumé des caractéristiques des représentations

Mais il n’est pas suffisant de pouvoir traiter toutes les représentations de manière isolée. Les passages entre elles sont indispensables pour pouvoir développer une idée de ce qui reste invariant lors du passage entre deux registres et qui fait donc partie du concept de fonction lui-même. Claude Janvier représente cette connexion entre les représentations par un iceberg en forme d’étoile. Les différentes représentations, dont seulement une est visible à la fois, sont reliées par le concept lui-même.

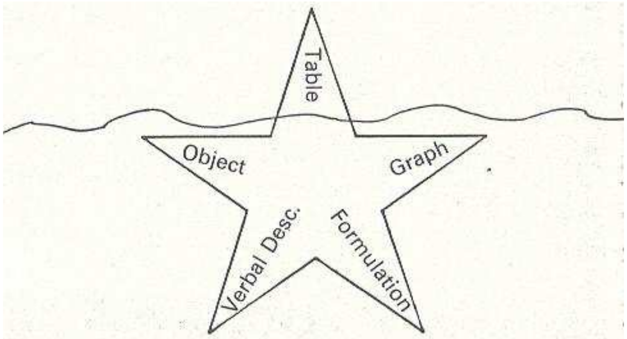


Abbildung 57: Le concept de fonction en forme d'iceberg

La définition de la notion de fonction

Les auteurs des livres de classe peuvent influencer l’image que les élèves ont des fonctions en en choisissant une définition plutôt qu’une autre. Et le moment auquel la définition est donnée peut également jouer un rôle important dans l’apprentissage des fonctions. Les points de vue de plusieurs auteurs à ce sujet sont discutés dans cette partie.

Il a été montré dans les analyses du développement historique de la notion de fonction, que l’aspect de covariation a été réduit peu à peu jusqu’à sa disparition complète dans la définition issue de la théorie des ensembles. L’aspect d’association est devenu dominant.
Beaucoup d’auteurs ont travaillé sur ces deux aspects en leur donnant des noms différents qui mettent l’accent sur certains points (par exemple Schwingendorf et al., 1992, S. 139 ; Selden & Selden, 1992, S. 2 ; Janvier, 1983b, S. 24). Comme dans la plupart des ouvrages de ces auteurs, ce travail défend la conviction que les deux aspects devraient apparaître lors de la définition de la notion de fonction et pas majoritairement celui de l’association, comme c’est le cas actuellement dans de nombreux pays.

La définition venant de la théorie des ensembles est critiquée par beaucoup d’auteurs pour un grand nombre de raisons. Elle ne semble pas adaptée pour être enseignée comme première définition et pas nécessaire pour les élèves dont il est question dans ce travail.

Ce travail défend la conviction que la première approche de la définition de la notion de fonction ne doit pas être en même temps le premier contact avec les relations fonctionnelles. Il est préférable de travailler un certain temps sans définition précise pour que les élèves aient la possibilité de former leur propre concept image. Le concept de pensée fonctionnelle a été sciemment défini de telle façon qu’il ne parle pas de fonctions mais de relations fonctionnelles.

Les analyses des chapitres suivants vont montrer quelles définitions ont été choisies en France et en Allemagne et si ces choix ont des répercussions sur les performances des élèves.

Recherches sur l’apprentissage des fonctions

Ce chapitre donne un aperçu des nombreuses études existantes sur la compréhension de fonctions. Cette classification va pouvoir être utilisée pour identifier les difficultés et ainsi les repérer plus facilement lors des analyses.

La première partie de ce chapitre décrit certaines parties importantes des concepts images qu’ont les élèves, qui ont été trouvés dans de nombreux travaux de recherche à ce sujet. Cela englobe aussi les concepts de fonctions comme action, processus et objet. De plus certains concepts definitions des élèves sont thématisées.
La seconde partie de ce chapitre donne un aperçu général des capacités qu’ont les élèves de passer d’une représentation dans un registre à une représentation dans un autre registre.
Des articles de recherche sur les obstacles de recherche sont finalement présentés ainsi que des propositions d’autres auteurs, qui ont pour but d’améliorer l’enseignement des fonctions.

La liste suivante récapitule de manière très abrégée les difficultés que les élèves peuvent rencontrer en travaillant sur les fonctions :

- Parties problématiques des concepts images
    - Les fonctions doivent être données par une seule règle.
      Les fonctions données avec deux règles différentes sur deux intervalles ne sont pas acceptées tout comme les fonctions comportant des exceptions sur certains points isolés.
    - La courbe d’une fonction doit être « raisonnable ».
      Par exemple sans angles ni trous. Les fonctions affines occupent une place de référence dominante.
    - Pour chaque *y* du domaine de valeurs, il y a exactement un *x* du domaine de définition.
      Il s’agit donc d’un changement du sens de l’unicité.
    - Des propriétés qui n’ont rien à voir avec les fonctions sont associées à ce concept.
      Par exemple : « Les mathématiciens acceptent une certaine relation en tant que fonction en lui donnant un signe spécial, donc c’est une fonction ».
    - Les concepts de pré fonctions et d’actions sont majoritaires chez les élèves. Le concept de processus se trouve bien moins souvent.
    - La vision « point par point » (pointwise) des fonctions se manifeste plus souvent que la vision « à travers le temps » (across time ou global).
      Cette distinction est étroitement liée à la distinction entre association et covariation.
      On entend par la vision « point par point » un travail avec des paires de nombres comme il est souvent fait lors du travail avec les tableaux ou bien quand on considère certains points isolés des courbes. On parle d’une vision « à travers le temps » dès que plusieurs paires de nombres sont étudiées en même temps, par exemple pour déterminer la nature de la variation.

- Concepts definitions problématiques
    - Fonctions en tant que règle
      Les correspondances sans règle fixe ne sont pas acceptées.
    - Fonctions en tant que formule
      Une fonction doit avoir une représentation dans le registre algébrique. Elle peut même être confondue avec cette représentation.
    - Fonctions en tant que courbe
      Une fonction doit avoir une représentation dans le registre graphique
    - Fonctions en tant que relation de dépendance mutuelle
      Deux variables dépendent l'une de l'autre.
- Le phénomène de compartmentalization peut être trouvé chez beaucoup d'élèves.
  On entend par *compartmentalization* le phénomène qui conduit un élève à défendre, sans s'en rendre compte, deux connaissances qui se contredisent. La compartmentalization peut se manifester entre autres quand il y a contradiction entre le concept image et le concept definition. L'élève répond aux questions concernant la définition en utilisant son concept definition et se réfère à son concept image lors de la résolution de problèmes concernant des fonctions.
- Les domaines de définitions et de valeurs sont souvent négligés ou posent des problèmes.
  Quand les élèves donnent une définition de la notion de fonction, ils omettent souvent de parler du domaine de définition. Des questionnaires qui traitent du domaine de définition et du domaine de valeurs montrent que ces notions restent très floues et sont mal utilisées.
- Les passages entre les différentes représentations des fonctions sont très difficiles pour une grande partie des élèves.
  Différents résultats de recherche montrent que tous les passages posent des problèmes. Le type de difficulté dépend naturellement aussi des registres entre lesquels le passage doit s'effectuer.
- Les représentations graphiques sont vues de manière iconique (iconic view).
  Une fonction est perçue de manière iconique quand la forme de la courbe est associée à l'aspect visuel de la situation réelle.
  L'exemple le plus connu vient certainement de Claude Janvier qui montre à ses élèves une courbe représentant la vitesse d'une voiture de course en dépendance du chemin parcouru. Certains élèves pensent que le circuit a neuf tournants parce qu'ils comptent les « tournants » de la représentation graphique.
  Quand les élèves doivent relier un des sept circuits proposés à la courbe de vitesse, le circuit G est souvent choisi à cause de sa ressemblance avec la courbe de vitesse. (Janvier, 1983b, S. 26, 27)

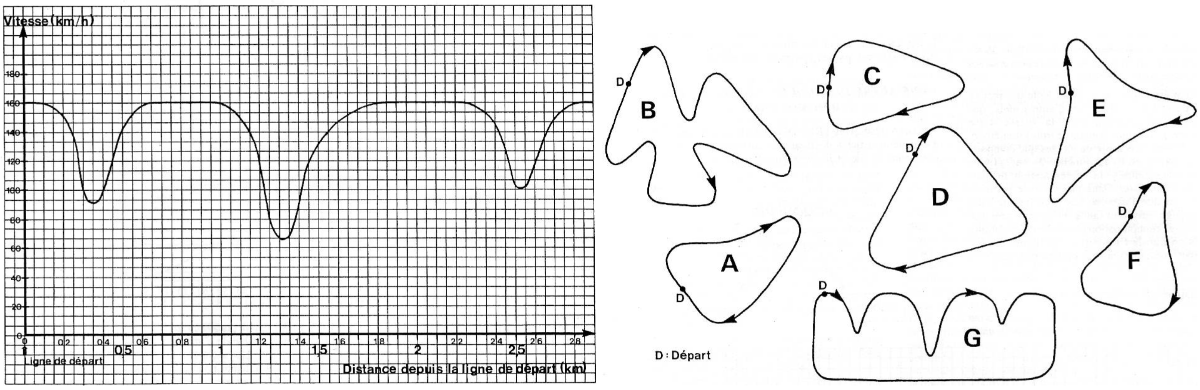


Abbildung 58:

Vitesse de la voiture de course à chaque endroit du circuit (second tour)

Choix de circuits

Des problèmes avec la représentation graphique venant d’une vision iconique sont signalés dans plusieurs articles de recherche.

- Les fonctions dépendant du temps créent un obstacle épistémologique
  Les fonctions dépendant directement ou indirectement du temps sont très majoritaires dans l’enseignement scolaire. Cela mène certains élèves à identifier, spécialement lors du travail avec le registre graphique, un changement dans une variable dépendant du temps, même s’il n’y en a pas.
  D’autres obstacles épistémologiques, comme la domination des fonctions affines, sont également identifiés.

Plusieurs études citées dans ce chapitre sont réalisées avec des personnes bien plus âgées que la tranche d’âge prise en compte dans ce travail. Mais les problèmes relevés facilitent le travail d’analyse des chapitres suivants en aidant à les identifier. De plus, on peut rechercher dans les programmes et les livres de classe s’il est possible de trouver des raisons pour les difficultés constatées plus tard.

Les propositions d’amélioration de l’enseignement des fonctions sont présentées en trois groupes :
Le premier groupe se centre sur le travail sur les situations issues de la vie quotidienne. (Plusieurs auteurs exposent des possibilités pour fortifier la connexion entre l’enseignement des fonctions et les situations réelles)
Le second groupe veut changer l’orientation générale de l’enseignement des fonctions (par exemple utiliser de manière renforcée tous les registres et les passages entre ceux-ci, réduire le poids et le temps passé sur les fonctions affines, ou assurer l’utilisation de la Grundvorstellung d’association et de la Grundvorstellung de covariation par (pour) le choix des types de relations fonctionnelles étudiés)
Le troisième groupe montre comment l’utilisation des ordinateurs peut changer l’enseignement des fonctions. Ce point est traité de manière très raccourcie, puisque ce domaine de la recherche change très rapidement avec le progrès technologique et est devenu un domaine de recherche indépendant. Le développement d’un très grand nombre de programmes dans les dernières décennies a permis d’avoir des logiciels qui peuvent être employés de manière très diverse.

Questions de recherche et méthodologie

Les questions de recherche peuvent être formulées de manière précise à la suite de la définition de la pensée fonctionnelle et de la fixation du cadre théorique.

Le domaine de recherche du présent travail est le développement de la pensée fonctionnelle des élèves du CM2 à la 2^{de} en France et en Allemagne. Les questions de recherche sont divisées en deux groupes.
Tout d'abord les questions concernant les programmes et les livres de classe, donc ce que les élèves devraient apprendre dans le domaine de la pensée fonctionnelle entre le CM2 et la 2^{de}. Ensuite les questions qui s'intéressent aux performances des élèves des deux pays, c'est-à-dire aux capacités de mise en pratique de la pensée fonctionnelle quand il s'agit de résoudre des problèmes.

Questions concernant la comparaison des programmes et des livres de classe

De quelle manière les curricula souhaité et potentiel soutiennent et aident le développement de la pensée fonctionnelle en France et en Allemagne?

Cette question générale peut être précisée par plusieurs questions en utilisant le travail théorique fait dans le troisième chapitre. Il est ainsi possible de tenir compte de toutes les facettes de la pensée fonctionnelle. Ces questions s'intéressent par exemple aux premiers travaux consacrés à la pensée fonctionnelle, aux contenus concernant la pensée fonctionnelle étudiés dans les deux pays, aux registres utilisés et aux Grundvorstellungen. Il sera également possible de développer des attentes concernant les points faibles et les points forts des élèves en prenant en compte les résultats du quatrième chapitre.

Questions concernant les analyses comparatives des performances des élèves des deux pays

Dans quelle mesure les élèves français et allemands développent-ils la pensée fonctionnelle et sont-ils capables de l'appliquer ?

Cette question générale peut également être divisée en une série de questions. Il s'agit d'abord de connaître les performances des élèves, pour ensuite essayer de les expliquer par les résultats de la première question en utilisant le travail théorique fait dans le troisième chapitre.

Pour répondre à ces questions le curriculum de chaque pays va être considéré à trois niveaux. Les deux premiers niveaux sont les programmes et les manuels, qui vont être analysés pour répondre à la première question. En Allemagne ces analyses vont se concentrer sur l'Etat fédéral de Bavière en y regardant les trois filières différentes.
Après cela les performances des élèves français et allemands dans PISA 2003 et celle des élèves bavarois dans PALMA seront étudiées pour essayer de les comparer et de retracer le développement de la pensée fonctionnelle. Ces performances peuvent aussi être analysées grâce à des interviews réalisées dans les deux pays. Cela sera fait dans le neuvième chapitre, où des points forts et des points faibles identifiés auparavant seront illustrés par des extraits d'interviews.

Analyse et comparaison du curriculum souhaité

Comparaison des deux pays

Les systèmes scolaires des deux pays sont présentés au début de ce chapitre.

Une des grandes différences entre les deux systèmes scolaires est que l’âge jusqu’auquel les élèves restent tous dans la même institution scolaire est bien plus élevé en France (14 à 15 ans) qu’en Allemagne (dix ans). La branche la plus haute du système scolaire s’appelle Gymnasium, celle du milieu Realschule et la plus basse Hauptschule. C’est cette séparation très rapide qui est considérée comme une des raisons pour la grande largeur des performances des élèves allemands dans PISA 2003.

Le niveau scolaire des élèves de quinze ans a été saisi pour PISA 2003 :

Classe	7 (5^{e})	8 (4^{e})	9 (3^{e})	10 (2de)	11 (1^{e})
Partie des élèves allemands	1,7%	15%	60%	23,3%	0,1%
Partie des élèves français	0,2%	5,4%	34,9%	57,3%	2,2%

Une des raisons pour le retard des élèves allemands est certainement l’âge de scolarisation, qui est en moyenne un peu plus précoce en France qu’en Allemagne (en Allemagne il dépend de l’Etat fédéral).

Il est donc nécessaire d’analyser les programmes et les livres de classe de les trois types d’écoles allemandes. Il faut également toujours se référer au type d’établissement scolaire lors des analyses des performances des élèves.
D’autre part les comparaisons entre la France et l’Allemagne doivent tenir compte du fait que les élèves français sont allés en moyenne un peu plus de temps à l’école que les élèves allemands.

Les programmes bavarois

Les programmes bavarois analysés dans ce travail se situent dans le contexte historique de l’éloignement de la théorie des ensembles pour aller vers une utilisation plus importante de problèmes venant de la vie quotidienne.

L’ordre d’introduction des contenus ne change pas entre les différents types d’établissements scolaires. La notion de fonction est introduite avec les fonctions affines après que les élèves aient travaillé un certain temps avec la proportionnalité et la proportionnalité inverse (*f(x)=1/x)*. Ensuite s’ajoutent les fonctions carrées et les fonctions racines carrées et puis, à la fin de la période analysée, les fonctions puissances, exponentielles, logarithmes et les fonctions trigonométriques. Mais le temps d’introduction des fonctions varie fortement et il faut tenir compte du fait que les élèves de la Hauptschule, qui quittent leur école après la neuvième classe (3^{e}), ne voient même pas les fonctions affines (cela change avec les nouveaux programmes). A la fin de leur scolarité en dixième (2de), les élèves de la Realschule ne connaissent pas non plus toutes les fonctions citées plus haut.
La définition de la notion de fonction est seulement étudiée par les élèves de la Hauptschule qui veulent continuer leur formation scolaire après la neuvième. Les fonctions y sont

introduites en tant qu'associations tout comme au Gymnasium. Par contre, à la Realschule, la définition par les relations continue à être enseignée comme à l'époque des mathématiques modernes.
L'utilisation des registres de représentation dépend également du type d'établissement scolaire. Le rôle des applications est toujours grand, bien qu'il diminue dans les dernières classes de la Realschule. Les programmes mentionnent l'utilisation de tous les registres usuels, mis à part le registre des tableaux qui n'apparaît pas dans les programmes du Gymnasium. Le registre algébrique paraît jouer un rôle très important partout, rejoint par le registre graphique à la Realschule et au Gymnasium. La plupart des passages entre les registres mathématiques s'effectuent entre eux deux, bien que l'importance de tous les passages soit soulignée dans tous les programmes.
En ce qui concerne les Grundvorstellungen on peut voir que la Grundvorstellung association paraît être nettement plus souvent utilisée que la Grundvorstellung de covariation qui se renforce seulement dans les dernières classes de la Realschule et du Gymnasium.
Il est possible que le franchissement de l'obstacle épistémologique de la fixation linéaire puisse être facilité en étudiant les fonctions de proportionnalité inverse avant de définir les fonctions. Mais l'étude assez longue de fonctions affine au Gymnasium risque de restreindre le concept image des élèves.

Les programmes français

Les programmes français se situent dans un contexte historique dans lequel il n'y pas eu de grands changements en ce qui concerne l'ordre d'introduction des différents types de fonctions depuis 1977. En France il est de tradition dans les programmes d'étudier les variations et d'introduire relativement tard des relations non linéaires. L'approche par les ensembles habituelle dans les années 70 a de nouveau complètement disparu des programmes.
Les programmes français du CM2 à la 2de prévoient que les élèves doivent connaître la définition des fonctions et certaines fonctions de référence à la fin de cette période. Ils doivent être capables de traiter des situations fonctionnelles provenant de différents domaines et d'utiliser les différents registres ainsi que les passages entre ceux-ci.
Il est possible de retrouver des traces de la Grundvorstellung d'association et de celle de covariation dans les programmes. La Grundvorstellung de covariation paraît cependant être plus fortement utilisée, bien que les fonctions soient définies en tant que règle de correspondance en 2de. L'objet fonction n'est pas encore utilisé et on ne peut pas identifier de travaux menant à celui-ci, comme le fait de regrouper certaines fonctions en comparant certaines caractéristiques.
On remarque que le développement qui abouti à la définition des fonctions dure explicitement trois, voire quatre ans, pendant lesquels les élèves voient seulement des fonctions proportionnelles et affines, et que toute définition est explicitement exclue. Certains exemples de relations non fonctionnelles sont donnés, mais on ne peut pas reconnaître une préparation à une notion de fonction qui unirait plusieurs relations fonctionnelles connues.
L'utilisation de la Grundvorstellung de covariation s'intensifie après la définition des fonctions. Le nombre de fonctions connues reste par contre relativement faible. En 2de on voit apparaître le premières fonctions non linéaires avec $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$. Les livres de classe pourront éclaircir dans quelle mesure ces fonctions sont utilisées avec des paramètres. Seules

parmi les fonctions trigonométriques les fonctions sinus et cosinus sont étudiées, et les fonctions exponentielles et logarithmes manquent complètement.
Le long travail concernant les situations proportionnelles et les fonctions affines, qui dure jusqu'en 2de, peut mener à une plus grande difficulté à franchir l'obstacle épistémologique de la fixation linéaire.

Comparaison des programmes

Les programmes allemands (en prenant l'exemple de la Bavière) et français ont été analysés dans ce chapitre. Plusieurs points communs s'en détachent rapidement, mais des analyses plus détaillées montrent aussi que les auteurs des programmes ont mis l'accent à différents endroits.

Les programmes des deux pays s'orientent d'après ce que les élèves doivent apprendre (input oriented curriculum). Ceux de France sont bien plus détaillés que ceux d'Allemagne. Ils contiennent plus de directives concernant le travail en classe et aussi des interdictions concernant certains contenus.
D'une part les programmes courts bavarois laissent plus de liberté aux auteurs des livres de classe et aux professeurs, mais ces libertés peuvent s'avérer difficiles voire problématiques, s'il manque des précisions sur certains détails ou des possibilités de relier les contenus à d'autres matières. Les nombreux détails des programmes français peuvent peut être expliqués par le fait que, contrairement à l'usage allemand, les livres de classe ne doivent pas être autorisés par l'Etat avant de pouvoir être utilisés en classe. Les programmes sont donc une des dernières possibilités pour l'Etat français d'influencer le curriculum.

On peut identifier plusieurs similarités concernant le déroulement général du travail sur les fonctions. Les deux pays commencent tôt avec l'étude de la proportionnalité et tous les registres de représentations sont utilisés. La notion de fonction est introduite lors du travail sur les fonctions affines après plusieurs années passées sur la proportionnalité. Les élèves peuvent ensuite commencer à s'initier aux fonctions de référence en se penchant sur les fonctions carrées. Les deux pays accordent beaucoup d'importance au travail avec tous les registres de représentation et spécialement aux applications. La Grundvorstellung d'objet ne fait pas partie des programmes des deux pays.

Mais il existe plusieurs différences concernant le choix des contenus et de leur développement.
En France beaucoup de temps est passé exclusivement sur les proportionnalités et les fonctions affines, ces dernières arrivant en 3^{e}. Les relations fonctionnelles non linéaires sont seulement étudiées en détail en 2de, après l'introduction générale de la notion de fonction.
En Bavière, par contre, on commence relativement tôt à travailler sur les relations fonctionnelles non linéaires. Les relations de proportionnalité inverse sont introduites en même temps que la proportionnalité en 6^{e} au Gymnasium et un an après la proportionnalité en 4^{e} à la Hauptschule.
Si on regarde seulement les types de fonctions connus en 3^{e} on constate que les élèves de la Hauptschule bavaroise n'ont pas étudié les fonctions affines, mais qu'ils connaissent les relations de proportionnalité inverse, inconnues de leurs collègues français de cet âge. A ce moment-là les élèves de la Realschule et du Gymnasium connaissent déjà la définition de la

notion de fonction, et en partie les fonctions carrées et les fonctions de racines carrées.
On peut également constater des différences à la fin de la période analysée. Les élèves qui sont encore dans une école bavaroise connaissent tous au moins des exemples de fonctions exponentielles et logarithmes. Une partie des élèves de la Realschule et ceux du Gymnasium les ont étudiées de façon plus précise et ont aussi travaillé sur les fonctions puissances, les fonctions inverses et les fonctions trigonométriques. Seules les fonctions sinus et cosinus ainsi que certains cas spéciaux des fonctions puissance sont prévus en France à ce niveau là.
On étudie donc bien moins de types de fonctions en France, où le programme prévoit une introduction plus tardive de moins de types de fonctions. Certains types de fonctions, comme les fonctions exponentielles, auxquelles on accorde de plus en plus d'importance en Allemagne, n'apparaissent pas.
Le programmes français par contre prévoient un travail intensif sur les variations et donc avec la Grundvorstellung de covariation. D'autre part le registre algébrique n'est introduit que très doucement et n'est pas tout de suite relié au concept de fonction.

L'analyse de programmes futurs montre que les contenus ne changent que très peu et que, par conséquent, les différences subsistent, malgré la coopération internationale croissante.

Prenant en considération ces résultats, on peut poser les questions suivantes :

Ne renforce-t-on pas la fixation linéaire en France en laissant travailler les élèves pendant plusieurs années exclusivement sur la proportionnalité ?
Ne peut-on pas étudier plus de types de fonctions en France, comme on le fait en Allemagne ?
La définition de la notion de fonction utilisée en France s'appuyant sur la Grundvorstellung d'association ne pose-t-elle pas de problèmes si on travaille après majoritairement avec la Grundvorstellung de covariation ?

Ces questions peuvent aussi être posées autrement :

Est-ce qu'en Allemagne on n'introduit pas trop tôt beaucoup de types de fonctions, alors que les élèves ne sont pas encore capables de les assimiler ?
Les élèves allemands n'ont-ils pas une Grundvorstellug de covariation sous développée étant donné qu'ils étudient bien moins les variations que leurs collègues français ?

Ce travail va tenter de répondre à ces questions

Le chapitre se termine avec une présentation des contenus étudiés dans les deux pays sous forme de tableau.

	Bavière – Hauptschule	**Bavière – Realschule** Wahlpflichtfächergruppe 1	**Bavière – Realschule** Wahlpflichtfächergruppe 2/3	**Bavière – Gymnasium**	**France**
Davor - Avant	- Représenter des chiffres arrondis par de colonnes - Extraire des informations de tableaux, d'images et de diagrammes - Échelles simples				- Utiliser et réaliser des tableaux, des diagrammes et des graphiques - Première approche de la **Proportionnalité** (pourcentages, échelles, changements d'unité simples)
5. – CM2	- Interpréter et réaliser des diagrammes - Equations simples - Échelles	- Mesurer des grandeurs dans des applications et les représenter - Règle de trois pour préparer la proportionnalité et les associations - Échelles		- Dans des problèmes d'application: Repérer et travailler sur des dépendances données verbalement - Échelles	
6. – 6e	- Extraire des informations de tableaux et de diagrammes et les traiter mathématiquement - Construction d'expressions algébriques	- **Proportionnalité** dans des problèmes d'application - Facteur de proportionnalité - Utilisation de tableaux, diagrammes et ordinateurs - Pourcentages - Tableaux de valeurs numérique et graphique concernant des relations algébriques simples. domaine de définition		- **Proportionnalité** et **Proportionnalité inverse** (***f(x)=1/x***) - Travail avec les graphiques - Passage venant de la représentation algébrique ou allant vers elle - Pourcentages et intérêts	- Proportionnalité - Exemples non proportionnels - Registres de représentation - Passage venant de la réalité ou allant vers elle - Utilisation de „**en fonction de**, **est fonction de**" - PAS de définition de la notion de fonction
7. – 5e	- Étudier des associations, les représenter (tableaux, diagrammes, système de coordonnées cartésiennes) - **Associations proportionnelles** dans toutes ses représentations - Passage venant de l'expression algébrique ou allant vers elle - Pourcentages et applications	- Proportionnalité et **Proportionnalité inverse** - Travail avec la réalité et la représentation algébrique - Tableaux, diagrammes et graphiques pour représenter - Pourcentages et intérêts - Tableaux de valeurs numériques et graphiques pour des expressions algébriques		- Poser des expressions algébriques, les traiter et les interpréter - Résoudre des équations linéaires	- Approfondissement de la proportionnalité, facteur de proportionnalité - Travail avec les registres de représentation. Spécialement les tableaux. Pas de connexion entre la proportionnalité et la représentation algébrique - Passage venant des tableaux ou allant vers eux - PAS de définition de la notion de fonction

8. – 4e	- Reconnaître des relations dans la vie courante - Proportionnalité et **associations de proportionnalité inverse** - Lire, réaliser et interpréter des diagrammes	- Les **fonctions** en tant que relations - Travail avec tous les registres - Les **fonctions affines** se développent à partir de la proportionnalité - Droites parallèles aux axes - Relation inverse et **fonction inverse** - **Fonctions de la proportionnalité inverse** avec asymptotes - Influence des paramètres des expressions algébriques respectives - Expressions algébriques: L'insertion d'une valeur dans une variable donne une valeur - Expressions quadratiques et extrema	- Expressions algébriques: L'insertion d'une valeur dans une variable donne une valeur - Expressions algébriques et extrema	- **Fonctions** en tant que règle d'association - **Fonctions affines** - Significations graphiques des coefficients - Fonctions affines par intervalles et fonction valeur absolue - Représentation algébrique en tant que représentation centrale - Résoudre un système de 2 équations linéaires à 2 inconnues graphiquement et algébriquement	- Proportionnalité: représentation graphique discrète - Contre-exemples - Passage venant de la réalité ou allant vers elle - Utilisation renforcée de la GV de covariation - PAS de définition de la notion de fonction
9. – 3e	- Problèmes d'applications pour des relations proportionnelles et inversement proportionnelles. Tableurs, illustration - Dépendance fonctionnelle entre l'aire et la largeur d'un carré. - Pourcentages, intérêts et facteurs de croissance	- **Fonctions carrées**, problèmes d'extrema, représentations algébriques des paraboles - **Fonctions racine carrée** en tant que fonctions inverse - Aires : relation fonctionnelle et extrema - GV de covariation avec les représentations graphiques - Résoudre un système de 2 équations linéaires à 2 inconnues graphiquement et algébriquement - Equations quadratiques	- Les **fonctions** en tant que relations - Travail avec tous les registres - Les **fonctions affines** se développent à partir de la proportionnalité - Droites parallèles aux axes - Aires : relation fonctionnelle et extrema - Résoudre un système de 2 équations linéaires à 2 inconnues graphiquement et algébriquement	- **Fonctions carrées** - Problèmes d'extrema - Passage entre la représentation algébrique et la représentation graphique - **Fonctions racine carrée** en tant que fonctions inverse - Equations quadratiques	- **Notion de fonction dans des exemples** en tant qu'association, mais PAS de définition formelle - **Fonctions** proportionnelles et **affines:** $x \mapsto ax+b$ avec a et b fixés - Sa représentation dans tous les registres et passages entre ceux-ci - Pas de représentation algébrique générale - Résoudre un système de 2 équations linéaires à 2 inconnues graphiquement et algébriquement

10. – 2de	- La **notion de fonction** en tant qu'association - **Fonctions affines** dans toutes leurs représentations - **Fonctions carrées** dans toutes leurs représentations (travail sur expression algébrique) - Résoudre des systèmes d'équations linéaires et d'équations quadratiques graphiquement et algébriquement - Problèmes d'applications concernant la croissance à pourcentage fixe - Fonctions trigonométriques dans des triangles	- **Fonctions puissances** et leur réversibilité - **Fonctions exponentielles et logarithmes** - Travail avec leurs représentations graphiques - Passage entre les représentations algébriques et graphiques lors de variations de paramètres - **Fonctions trigonométriques** en géométrie avec leurs représentations graphiques	- **Fonctions carrées**, problèmes d'extrema, représentations algébriques des paraboles - **Fonctions de la proportionnalité inverse** avec asymptotes - **Exemples de fonctions exponentielles**, définition représentation graphique - Seulement les **représentations graphiques des fonctions trigonométriques** - Equations quadratiques	- **Fonctions puissances** et leur réversibilité - Classification en types : paraboles et hyperboles de degré n - **Fonctions exponentielles et logarithmes** - Travail avec leurs représentations graphiques - Circonférence et aire d'un cercle - Formules pour calculer les volumes - **Fonctions trigonométriques** en géométrie avec leurs représentations graphiques - Fonctions *y = a*sin (bx+c)* - Passage entre la représentation algébrique et la représentation graphique - GV de covariation lors d'analyses de valeurs limites	- Notion générale de **fonction**. - Fonctions à une variable réelle, exemples de fonctions discrètes et de fonctions à deux variables. Contre-exemples - Tous les registres de représentation, spécialement le registre graphique - Notation *f(x)* et *f* avec passage à l'objet - **Tableaux de variations**, Analyses des extrema soutiennent la GV de covariation - **Fonctions de référence :** $x \mapsto x^2$, $x \mapsto \frac{1}{x}$, $x \mapsto \sin x$ et $x \mapsto \cos x$, avec leurs représentations graphiques et leurs variations - $x \mapsto \sqrt{x}$, $x \mapsto x^3$ $x \mapsto \lvert x \rvert$ sont découverts dans des problèmes - Résoudre des équations graphiquement

Analyse et comparaison du curriculum potentiel

Le dernier chapitre a pu répondre aux questions portant sur le développement général de l'enseignement des fonctions. Pour pouvoir faire des analyses plus précises de certains points fondamentaux de la pensée fonctionnelle, comme l'utilisation des différents registres et des Grundvorstellungen ou des concept images que les élèves peuvent développer, il est indispensable de regarder certains livres de classe utilisés dans les deux pays. Il sera également possible de vérifier dans quelle mesure les choix des programmes sont repris par les auteurs des manuels.
Ce chapitre contient des analyses de deux séries de livres de classe pour la France et d'une série par type d'école en Bavière.

Les livres de classe bavarois

Les manuels scolaires bavarois restent très proches des programmes. La suite des chapitres des livres reflète la suite des sous points des programmes. Tous les manuels regroupent les contenus en différents chapitres autour des différents concepts mathématiques. Il n'y a pas de division par heure de classe ou de structure des contenus en forme de spirale.
Plus le niveau du type d'école est élevé, plus il y a d'explications et d'exemples. Un élève du Gymnasium a donc la possibilité de comprendre et d'apprendre seul les contenus, alors qu'un élève de la Hauptschule ne pourra pas le faire.
Aucun livre allemand analysé pour ce travail ne contenait des indications pour les élèves sur la manière de l'utiliser, ou des explications pour les professeurs sur le choix et le développement des contenus.

La suite des différents types de fonctions ne change pas d'un type d'école à un autre. Les fonctions proportionnelles, les fonctions de la proportionnalité inverse et les fonctions affines sont introduites dans la Hauptschule. Les élèves qui veulent poursuivre leur parcours scolaire voient en plus les fonctions carrées et exponentielles. Ceux qui vont à une Realschule étudient de surcroît les fonctions racine carrée et, selon de la branche choisie à la Realschule, les fonctions puissances, exponentielles et logarithmes. Seuls les élèves du Gymnasium travaillent en détail sur les fonctions trigonométriques.
Il s'agit donc toujours de la même suite de contenus et plus le niveau d'école est élevé, plus les types de fonctions sont variés.

Les fonctions sont définies dans la dixième classe (2de) de la Hauptschule, à un moment où la plupart des élèves ont déjà quitté cette école. De plus on peut s'attendre à une confusion entre la représentation dans le registre algébrique et la notion de fonction. La représentation apparaît en même temps que la première utilisation du mot fonction. A cela s'ajoute que les fonctions ne sont jamais définies.
A la Realschule les fonctions sont définies en tant que relations spéciales. Ici aussi on peut s'attendre à des difficultés, car cette définition n'est plus jamais utilisée, sauf lors de l'introduction des fonctions inverses. Le vocabulaire venant de la théorie des ensembles est, par contre, utilisé souvent, par exemple en insistant sur le domaine de définition. Plus tard les fonctions sont définies en utilisant leurs représentations algébriques, ce qui peut ici aussi entraîner une confusion entre la représentation et la notion.

Les fonctions sont définies au Gymnasium avant tout travail sur des fonctions concrètes. Elles sont d'abord montrées comme des *black box* et puis définies en tant qu'association unique. Lors de la définition plusieurs types de fonctions différentes sont présentés et tous les registres de représentation sont utilisés. Les auteurs veulent apparemment éviter tout concept image trop restreint et toute confusion entre l'objet et sa représentation. Mais toutes les fonctions montrées sont des relations entre des nombres, et l'écriture choisie pour noter les fonctions elles-mêmes ainsi que pour les différencier de leurs représentations ressemble fort à l'écriture algébrique ($x \mapsto f(x)$).
Les élèves qui sont dans la dixième classe de la Hauptschule (2[de]) peuvent faire connaissance de la notion de fonction en tant que notion réunissant toutes les associations qu'ils connaissent déjà, bien que la notion n'y soit jamais clairement définie. Mais on peut quand même remarquer que la notion de fonction ne peut pas être construite par les élèves bavarois eux-mêmes comme notion unissant des associations qu'ils connaissent déjà. Elle est définie avant et les élèves doivent y associer les fonctions qu'ils apprennent après. Cela peut mener à des problèmes entre le concept image et le concept definition.
Il est aussi important de noter que les élèves de toutes les écoles étudient seulement, mises à part quelques exceptions, des fonctions continues qui sont définies par une seule formule sur tout leur domaine de définition.

Tous les registres de représentation sont utilisés dans les trois différentes écoles. Le registre graphique n'est utilisé qu'à partir de la septième classe (5[e]) à la Hauptschule et le registre algébrique n'y est pas utilisé pour représenter de manière générale les fonctions jusqu'à la dixième classe (2[de]).
Les représentations algébriques et graphiques sont très utilisées dans la Realschule et le Gymnasium, tout comme le passage entre elles. Le registre des tableaux est la plupart du temps un registre de soutien pour faciliter certains passages. Les applications se concentrent à la Hauptschule et au Gymnasium, tandis que leur importance diminue beaucoup dans les classes élevées de la Realschule.

Un bilan partagé peut être tiré concernant l'utilisation des Grundvorstellungen. La Realschule utilise beaucoup la Grundvorstellung d'association lors de la définition des fonctions par la théorie des ensembles. La Grundvorstellung de covariation y est utilisée bien moins souvent. A la Realschule et au Gymnasium certains nouveaux types de fonctions sont introduits en déplaçant dans le système de coordonnées cartésiennes la représentation graphique d'une fonction connue. Dans ce cas-là les élèves travaillent là plutôt avec l'objet *courbe*, bien qu'il s'agisse au fond du déplacement de l'objet *fonction*. On ne peut donc pas parler de Grundvorstellung d'objet. Celle-ci peut par contre être utilisée lorsque différents types de fonctions sont regroupés en classes, ce qui est aussi fait. A part cela, il n'y a pas d'utilisation importante de la Grundvorstellung d'objet dans les écoles bavaroises aux niveaux analysés dans ce travail.

Étant donné le nombre limité de fonctions qu'ils voient, on peut s'attendre chez les élèves de la Hauptschule à un concept image restreint et contenant plusieurs idées fausses. Cela vaut aussi pour une partie des élèves de la Realschule. Seuls certains élèves d'une branche mathématique de la Realschule et ceux du Gymnasium ont une bonne base pour développer la pensée fonctionnelle.

Les élèves bavarois peuvent donc développer une compréhension très différente des fonctions en dépendance du type d'école à laquelle ils vont. Certains ne connaissent pas du tout de définition de la notion de fonction, d'autres une définition venant de la théorie des ensembles et les derniers une définition en tant qu'association. De plus ils connaissent un nombre très différent de types de fonctions. Il existe donc des différences fondamentales, et dans certains cas, des lacunes importantes.

Les livres de classe français

Les manuels scolaires français analysés ici se divisent en trois parties. Tout d'abord les livres de l'école primaire, ensuite ceux du collège et finalement ceux du lycée.
Les livres du CM2 sont très différents des autres. Ils sont partagés en séances et non en chapitres et ils ne contiennent pas d'explications.
Les livres du collège et du lycée se ressemblent dans leur manière de présenter les contenus. Après une partie de cours comportant des problèmes résolus de manière exemplaire, les problèmes deviennent de plus en plus complexes et se réfèrent souvent aux problèmes résolus. De plus, les solutions de certains problèmes sont données à la fin du livre, ce qui permet un travail autonome des élèves.
Tous les manuels contiennent des explications concernant leur structure et leur utilisation ainsi qu'une référence aux programmes.

Les manuels scolaires confirment les résultats de l'analyse des programmes. En France le travail sur les proportionnalités et les fonctions affines s'étire sur plusieurs années. La proportionnalité est vue à partir du CM2 et continue à être étudiée jusqu'en 3^{e}, où les fonctions affines viennent s'y ajouter. Les élèves doivent identifier les situations proportionnelles et celles qui ne le sont pas. Une fois la situation identifiée, ils continuent à travailler seulement sur les situations proportionnelles. Le contraste proportionnalité-non-proportionnalité ne se reflète donc pas dans les problèmes que les élèves étudient de manière précise.
Ce n'est qu'en 2de que des dépendances non linéaires sont analysées avec les fonctions carrées, les fonctions de la proportionnalité inverse et les fonctions cosinus et sinus. Ces dernières sont aussi vues avant, mais seulement dans le cadre de la géométrie et sans en utiliser l'aspect fonctionnel.
Dans les deux livres analysés, les problèmes proposés après la définition de la notion de fonction contiennent des fonctions définies par leur représentation graphique et dont la représentation algébrique est inconnue des élèves.

En 3^{e} on voit apparaître pour la première fois le mot *fonction* dans un des livres, et cela en même temps que l'introduction de l'écriture algébrique, ce qui peut mener à un mélange entre la notion mathématique et sa représentation. Ce n'est qu'en 2de qu'on trouve des explications claires de la notion de fonction; elle est définie en tant qu'association entre des nombres réels. C'est à ce moment-là qu'il est aussi question pour la première fois de domaine de définition, car les fonctions sont définies sur des intervalles de nombres réels.

Au début ce sont essentiellement le registre graphique et le registre des tableaux qui sont utilisés pour représenter des dépendances fonctionnelles. Le registre algébrique est développé en parallèle à l'étude de la proportionnalité. Mais ce n'est qu'en 4^{e} voire en 3^{e} qu'il est utilisé

pour représenter des dépendances fonctionnelles.
En 3^{e} les élèves peuvent travailler avec des fonctions proportionnelles et affines dans toutes leurs représentations et réaliser tous les passages entre celles-ci. Le passage central est celui entre le registre algébrique et le registre graphique.
On trouve bien moins de changements de registre après le passage au lycée en 2^{de} et le registre des tableaux n’est plus utilisé. Les travaux impliquant des situations réelles et les passages venant de la réalité ou allant vers elle sont fréquents jusqu’en 4^{e} mais diminuent fortement après. En 2^{de} on ne trouve pratiquement plus de liens avec des situations réelles dans les livres de classe.

La Grundvorstellung d’association et celle de covariation sont utilisées. Lors de l’introduction de la proportionnalité il y a une certaine préférence pour la Grundvorstellung de covariation qui disparaît ensuite. Comme les situations proportionnelles ne sont souvent pas vues comme des situations fonctionnelles, on ne peut pas parler de l’utilisation de Grundvorstellungen concernant la pensée fonctionnelle. Les Grundvorstellungen ne jouent pas non plus un grand rôle lors de la définition de fonctions affines, car l’apprentissage de la capacité de passer d’une représentation à une autre y occupe une place centrale.
La définition de la notion de fonction en 2^{de} se réfère à la Grundvorstellung d’association. Mais le travail avec les tableaux de variation et donc la Grundvorstellung de covariation commence immédiatement après cette définition. La direction de variation des fonctions y est analysée en détail, mais le type de variation n’est pratiquement pas pris en compte. Il n’existe par exemple pas de comparaison entre le type de variation d’une fonction linéaire et d’une fonction carrée pour mettre en avant la différence fondamentale de variation.
Les associations ne jouent pas en grand rôle dans les problèmes posés. On peut donc poser la question de savoir si cette différence entre la définition en tant qu’association et l’utilisation des fonctions pour décrire des variations ne crée pas des problèmes.
L’utilisation de la Grundvorstellung d’objet ne peut être trouvée dans aucun des livres.

Étant donné que les fonctions sont seulement définies en 3^{e} voire en 2^{de}, le concept d’action, de processus ou d’objet ne peut pas être utilisé auparavant. On peut identifier un concept d’action dans certains problèmes préliminaires mais la plupart des problèmes travaillent avec un concept de processus. Le concept d’objet n’apparaît pas.

On ne peut pas constater de fortes divergences entre les programmes et les livres de classe, bien qu’il n’y ait pas de validation officielle des livres par l’État. Mais plusieurs contenus sont répétés ou introduits plus tôt que prévu dans les programmes.

Le concept image des élèves français peut contenir certaines restrictions. Pendant cinq ans ils ne voient que les dépendances proportionnelles et affines, ce qui peut favoriser le développement d’une fixation linéaire.
La définition qui est donnée de la notion de fonction restreint les dépendances fonctionnelles aux associations entre des intervalles de nombres réels, et la plupart des courbes qui sont étudiées par la suite sont continues. D’autres exemples sont donnés mais rarement, ce qui peut également mener à une restriction du concept image.
Les élèves français résolvent beaucoup de problèmes dans lesquels ils doivent identifier des relations fonctionnelles et certains types de fonctions dans des situations réelles ou dans

d’autres représentations. On peut donc s'attendre chez les élèves français à une bonne capacité à reconnaître les dépendances fonctionnelles.

Comparaison des livres de classe

De grandes différences entre les manuels scolaires français et allemands sont visibles dès qu’on compare leur structure.
Les livres bavarois s’orientent de très près sur les programmes, ce qui se reflète même dans la suite des chapitres. En France, par contre, la structure est plus indépendante, bien que les programmes soient imprimés à l’intérieur des manuels. De plus les livres français fournissent des explications sur la manière dont ils doivent être utilisés. Une partie comprenant le cours ainsi que des exercices résolus permettent un travail autonome des élèves. Les livres bavarois, spécialement ceux de la Hauptschule et de la Realschule, ont plus le caractère d’une collection de problèmes à résoudre.

Dans les deux pays le registre algébrique est le fil conducteur pour l’introduction de nouveaux types de dépendances fonctionnelles.
Le travail sur les associations proportionnelles et les fonctions affines se prolonge bien plus en France qu’en Allemagne. Les autres types de fonctions ne sont vus qu’à partir de la 2^{de}.
Les élèves de la neuvième classe (3^{e}) de la Hauptschule connaissent un plus grand nombre de types de fonctions que les élèves de 3^{e} en France, où par exemple les fonctions de la proportionnalité inverse n’ont pas encore été étudiées.
Cela vaut aussi pour la 2^{de} où les élèves français voient les fonctions carrées, les fonctions de la proportionnalité inverse et les fonctions cosinus et sinus. Les élèves bavarois qui n’ont pas encore quitté le système scolaire en connaissent plus, comme par exemple les fonctions exponentielles. Ceux qui vont au Gymnasium travaillent en plus sur les fonctions puissances simples, les fonctions racine carrée et toutes les fonctions trigonométriques.

Les moments auxquels la notion de fonction est définie dans les deux pays sont très différents. En France elle est définie en 2^{de} en tant qu’association. En Bavière, par contre, il existe de très grandes différences entre les différents types d’écoles. A la Hauptschule on travaille sur les fonctions sans jamais les définir, ce qui correspond à l’usage de la 3^{e} en France. A la Realschule et au Gymnasium les fonctions sont définies dans la huitième ou la neuvième classe (4^{e} ou 3^{e}) en tant que relations spéciales ou associations. La plupart des élèves allemands travaillent donc bien plus tôt avec la notion de fonction que les élèves français.
La notion de fonction n’est introduite ni en France ni en Allemagne en tant que notion unifiant les concepts de plusieurs dépendances fonctionnelles étudiées auparavant. Elle est définie rapidement à la suite de l’utilisation des fonctions affines. Les deux pays s’exposent ainsi au risque que les élèves développent un concept definition indépendante de leur concept image. Ce risque est probablement le plus grand à la Realschule bavaroise, où le travail sur les relations n’est pas prolongé après la définition des fonctions.

Il existe plusieurs parallèles entre l’enseignement des deux pays, concernant l’utilisation des registres et des passages entre ceux-ci. Tous les registres sont introduits et utilisés, mais le rôle du registre des tableaux diminue souvent dans les niveaux élevés. Les registres centraux sont le registre algébrique et le registre graphique et beaucoup de problèmes traitent du passage entre eux. Cependant le rôle des passages entre les registres diminue en 2^{de} en France.

Les deux pays associent étroitement la définition de la notion de fonction et les représentations algébriques, ce qui peut mener à une confusion entre l’idée mathématique et sa représentation.
L’influence des applications diminue dans les niveaux élevés en France et à la Realschule, mais elle reste forte à la Hauptschule et au Gymnasium. En France on propose souvent des applications venant de la géométrie.

Les deux pays travaillent avec la Grundvorstellung d’association et de covariation. La Grundvorstellung d’association est mise en avant lors de la définition de la notion. La Grundvorstellung de covariation peut être retrouvée dans un grand nombre de problèmes proposés par tous les manuels analysés, mis à part ceux de la Realschule où elle est bien moins présente. L’utilisation est spécialement forte en France, où la variation est déjà étudiée avec la proportionnalité. Elle devient le point central de la plupart des problèmes en 2de. On doit cependant remarquer que seule la direction de la variation est le sujet d’études, le type de variation n’étant pas pris en considération.
L’utilisation de la Grundvorstellung d’objet peut être identifiée de manière très primitive dans les livres de classe bavarois. En France elle n’est pas encore utilisée.

A la fin de la période étudiée, les élèves français connaissent donc moins de types de fonction que les élèves allemands qui n’ont pas quitté l’école après la neuvième (3^{e}). Cela peut mener à des restrictions du concept image, tout comme l’étude très longue des dépendances linéaires. On peut s’attendre à des concepts images restreints de la même manière de la part des élèves de la Hauptschule, et, à un degré moins élevé, également de la part des élèves des branches basses de la Realschule.
La très grande majorité des fonctions vues dans les deux pays sont des associations continues entre des nombres réels. Cela va également influencer le concept image des élèves.
Les concepts images des élèves concernant les fonctions seront donc très différents d’un pays à l’autre et entre les différentes écoles. Comme la scolarité obligatoire s’arrête pour beaucoup d’élèves avec la fin de la période analysée dans ce travail, on peut constater qu’il ne faut pas s’attendre à une compréhension commune de toute la population concernant les dépendances fonctionnelles.

Une autre particularité des livres de classe français influence probablement le travail des élèves. L’utilisation de problèmes résolus de manière exemplaire, auxquels les élèves sont renvoyés lors du travail avec d’autres problèmes, peut mener à des automatismes sans compréhension réelle du contenu. Les élèves sont amenés à relier un problème à un problème type pour s’engager dans une suite d’automatismes menant à la solution. Les problèmes atypiques, qui ne correspondent pas aux schémas connus, causent plus de difficultés dans ce cas-là.
Ce centrage sur les techniques à utiliser pour résoudre certains problèmes peut probablement être expliqué par leur grande importance dans la recherche française en didactique des mathématiques (par exemple dans les travaux d'Yves Chevallard).
Le présent travail se concentre sur le développement de la pensée fonctionnelle et n'analyse pas en détail les techniques utilisées dans les deux pays. Les Grundvorstellungen et Grundkenntnisse sont de grande importance pour pouvoir utiliser les techniques de manière réfléchie et efficiente, permettant ainsi d’activer ces techniques. Cette connexion relie les

techniques à la pensée fonctionnelle et à son cadre théorique, et ouvre ainsi la voie pour des recherches plus détaillées.

Les analyses de ce chapitre montrent que la majorité des élèves français et allemands n'ont pas la possibilité de développer la pensée fonctionnelle dans toute sa largeur à la fin de la période prise en considération. En France les élèves connaissent peu de types de fonctions et ils n'ont pas comparé les différents types de variation. Les élèves de la Hauptschule et des branches basses de la Realschule connaissent aussi relativement peu de types de fonctions. Seuls les élèves de la branche mathématique de la Realschule et ceux du Gymnasium ont un grand nombre de types de fonctions à leur disposition. Ils ont aussi travaillé avec tous les registres de représentation et savent effectuer les passages entre ceux-ci, ce qui fait qu'ils ont les meilleures bases pour développer la pensée fonctionnelle à la fin de la dixième (2^{de}).

Les questions posées à la fin du sixième chapitre peuvent être reposées maintenant, car les analyses du curriculum potentiel confirment les résultats des analyses du curriculum souhaité. Les chapitres suivants vont tenter de répondre à ces questions.

Analyses quantitatives

Les chapitres précédents ont analysé ce que les élèves devraient apprendre jusqu'à la 2de concernant la pensée fonctionnelle dans chaque système scolaire. Il s'agit maintenant d'essayer de montrer ce que les élèves en retiennent et s'ils sont capables d'utiliser leurs savoirs.

Il est difficile de donner une image exacte du curriculum atteint concernant la pensée fonctionnelle en France et en Allemagne. Les études PISA 2003 et PALMA vont être utilisées dans ce travail pour avoir d'une part un point de repère au niveau international avec PISA 2003 et d'autre part une image du développement durant plusieurs années avec PALMA.

PISA 2003

PISA 2003 (Programme for International Student Assessment) est une très grande étude représentative de comparaison internationale, à laquelle ont participé la France et l'Allemagne. Elle est financée par l'OCDE et analyse les performances des élèves à l'âge de 15 ans. 4.000 élèves français et 4.660 élèves allemands y ont participé en 2003.
PISA 2003 mesure, entre autre, les performances des élèves dans le domaine de *mathematical literacy*. En Allemagne cette étude a été étendue de manière à obtenir des données représentatives sur les différents Etats fédéraux.
La première partie de ce chapitre utilise cette sous échelle pour comparer le curriculum atteint par les élèves français et allemands peu de temps avant la fin de la période analysée.

Les problèmes de PISA 2003 sont associés à plusieurs sous échelles. L'une d'entre elles, la sous échelle *variations et relations*, a une définition très proche de la définition de la pensée fonctionnelle. Une bonne résolution des problèmes associés à cette sous échelle nécessite beaucoup de capacités directement reliées à la pensée fonctionnelle. Les applications y jouent un rôle largement dominant et il n'y a pas de problèmes purement mathématiques. Seules les fonctions affines apparaissent comme type concret de fonction. Une analyse plus détaillée des problèmes de la sous échelle montre qu'elle reproduit une partie centrale de la pensée fonctionnelle sans, pour autant, pouvoir la reproduire dans toute sa largeur.
Les types de problèmes et les contenus utilisés ne sont pas complètement nouveaux pour les élèves de France et de Bavière, mais il ne s'agit pas non plus de problèmes typiques présentés dans les manuels scolaires. Ceci peut constituer une difficulté spéciale pour les élèves français, qui sont davantage habitués à travailler sur des problèmes standards.

Les élèves français obtiennent de meilleurs résultats sur la sous échelle *variations et relations* que les élèves allemands. A l'intérieur de l'Allemagne ce sont les élèves bavarois qui obtiennent les meilleurs résultats avec un score qui est même meilleur que le score des élèves français.
Les analyses des résultats français ramènent ce point fort des élèves de ce pays au travail détaillé sur la proportionnalité et à l'utilisation de la représentation graphique (Bourny et al., 2004, S. 3). Cela correspond également aux résultats des analyses des chapitres précédents.
Le très bon score des élèves bavarois doit être considéré dans le contexte de leur bonne

performance générale. En Bavière la sous échelle *variations et relations* ne constitue pas un point fort des élèves comme c'est le cas pour les élèves français.

Differential item functioning

Pour ajouter de la précision aux analyses du niveau des échelles on peut aussi se pencher sur les résultats au niveau des items. Ce travail identifie à l'aide d'analyses spécifiques certains items qui se détachent du reste de ceux-ci lors des analyses binationales.

Les analyses de differential item functioning (en abrégé DIF) se basent sur l'hypothèse que les différents systèmes d'enseignement ne se différencient pas seulement en ce qui concerne leur effectivité générale, mais produisent aussi des points forts et des points faibles pour les élèves (Klieme & Baumert, 2001, S. 386). John Keeves et Geoffrey Masters notent au sujet des items qui révèlent ce genre de points forts ou faibles :

> The detection of this type of biased items provides information of value in education, because the existence of bias reflects either differences in the learning experiences involved for providing a correct response to the item, or deficiencies in the construction of an item so that it would favour on particular group to the disadvantage of the other group. (Keeves & Masters, 1999, S. 12)

Un *item fonctionnant de manière différentielle* est un item qui produit dans deux populations une différence de probabilité de résolution qui ne peut pas être expliquée par les différentes performances des deux populations en ce qui concerne la variable analysée. Il est important de bien faire la différence entre l'item *impact*, c'est-à-dire une différence dans la probabilité de résolution d'un item causé par une différence de performance dans la variable analysée, et le DIF, où les différentes performances subsistent bien que la différence de la variable mesurée soit contrôlée.

Dans ce chapitre des analyses de DIF sont faites avec les items de la sous échelle *variations et relations* pour détecter les points forts et les points faibles des deux pays. Ces analyses sont faites avec l'aide du modèle uni paramétrique de Rasch, qui est aussi utilisé pour l'évaluation de PISA et PALMA.

Les résultats montrent qu'aucun item n'a un effet beaucoup plus grand que le seuil minimum permettant de pour pouvoir parler d'un effet substantiel. Cela montre qu'aucun item ne favorise fortement les élèves d'un pays.

Il y a tout de même deux items qui ont un effet substantiel et quatre autres items dont la taille de l'effet se sépare nettement de la taille de l'effet du groupe des items restants. Les deux items à effet substantiel indiquent des points forts des élèves français, tout comme deux des quatre items ayant un effet moins grand. Les deux items restant révèlent des points forts des élèves allemands.

L'analyse du contenu des items qui ont été identifiés montre que ces effets peuvent être expliqués par des spécificités des programmes des deux pays.
Dans le premier des deux items à effet substantiel montrant un point fort des élèves français, il s'agit de reconnaître une relation affine simple dans un texte et de l'évaluer ensuite pour un certain nombre. Une explication pour ce point fort français serait que cet item peut être résolu

sans compréhension réelle de la situation, en ignorant le contexte et en effectuant le calcul demandé. Dans les livres de classe français on peut trouver ce genre de problèmes. Cette explication est soutenue par le fait que l'item suivant appartenant au même problème ne montre plus d'effet. Cet item demande la représentation algébrique de la fonction affine qui a été utilisée auparavant.

Le second item à effet substantiel requiert un travail qualitatif avec la représentation graphique. Il s'agit de reconnaître des parties et des points importants de la courbe pour la retracer dans un autre système de coordonnées cartésiennes. Les élèves de 2^{de} peuvent directement utiliser ce qu'ils ont appris lors du travail avec les tableaux de variation. Les élèves allemands par contre n'ont pratiquement pas vu ce genre de problèmes, ce qui peut expliquer l'effet substantiel de cet item.

Les deux autres items qui révèlent des points forts français sont des items traitant de l'étude de variation. Cette constatation d'un point fort renvoie directement aux analyses des programmes et des manuels scolaires, où il a été constaté que la Grundvorstellung de covariation est largement utilisée en France, spécialement à partir de la 2^{de}.
Le premier item à effet faible indiquant un point fort allemand utilise également la Grundvorstellung de covariation, mais en reliant la variation à des situations réelles. La plupart des problèmes de variation des livres de classe français se cantonnent dans le domaine purement mathématique.
Le second item à effet positif pour les élèves allemands demande d'utiliser une fonction à quatre variables, donnée dans sa représentation algébrique, et de l'évaluer pour certaines données que les élèves doivent extraire d'un tableau. Ce type de fonction n'apparaît pas dans les livres de classe français, ce qui renvoie de nouveau à l'explication des problèmes exemplaires utilisés en France créant de difficultés lors de l'apparition de problèmes à type inconnu.

Il est intéressant de remarquer qu'il n'y a pas d'avantage pour un des pays si on considère les types de fonctions utilisés dans les problèmes. Les relations proportionnelles et affines ne constituent pas des points forts français, bien qu'elles aient été étudiées bien plus longtemps qu'en Allemagne.

Quelques attentes des chapitres précédents ont pu être confirmées par les analyses de DIF. Les effets d'autres différences n'ont par contre pas pu être observés.

PALMA

Le caractère transversal de l'étude PISA 2003 permet de comparer les performances des élèves français et allemands mais il rend impossible toute analyse de développement. Ce développement peut être retracé grâce à l'étude longitudinale PALMA.
PALMA (Projekt zur Analyse der Leistungsentwicklung in Mathematik ; Projet pour l'analyse du développement des performances en mathématiques) est une étude représentative longitudinale faite en Bavière, qui montre le développement des performances en mathématiques de la cinquième (CM2) à la dixième (2^{de}). Elle est financée par la DFG (Deutsche Forschungsgemeinschaft). 2.000 à 2.500 élèves sont évalués chaque année et 1.318 d'entre eux y ont participé tous les ans depuis six ans.

Les données ont été recueillies jusqu'à la neuvième (3[e]), ce qui permet de retracer le développement en Bavière sur quasiment la totalité de la période analysée dans ce travail.

Les problèmes posées par PALMA s'orientent sur le concept de *mathematical literacy* développé pour PISA. Ils se centrent donc autour de l'application des mathématiques dans des situations réelles.
Une sous échelle concernant la pensée fonctionnelle est analysée dans la seconde partie de ce chapitre.
Cette sous échelle est constituée de 177 items concernant des points centraux de la pensée fonctionnelle, comme par exemple le travail avec les différents registres de représentation, les passages entre ceux-ci ou les situations proportionnelles. Ces items ont souvent un lien direct avec une situation réelle, mais à la différence de PISA certains items restent dans un cadre purement mathématique.

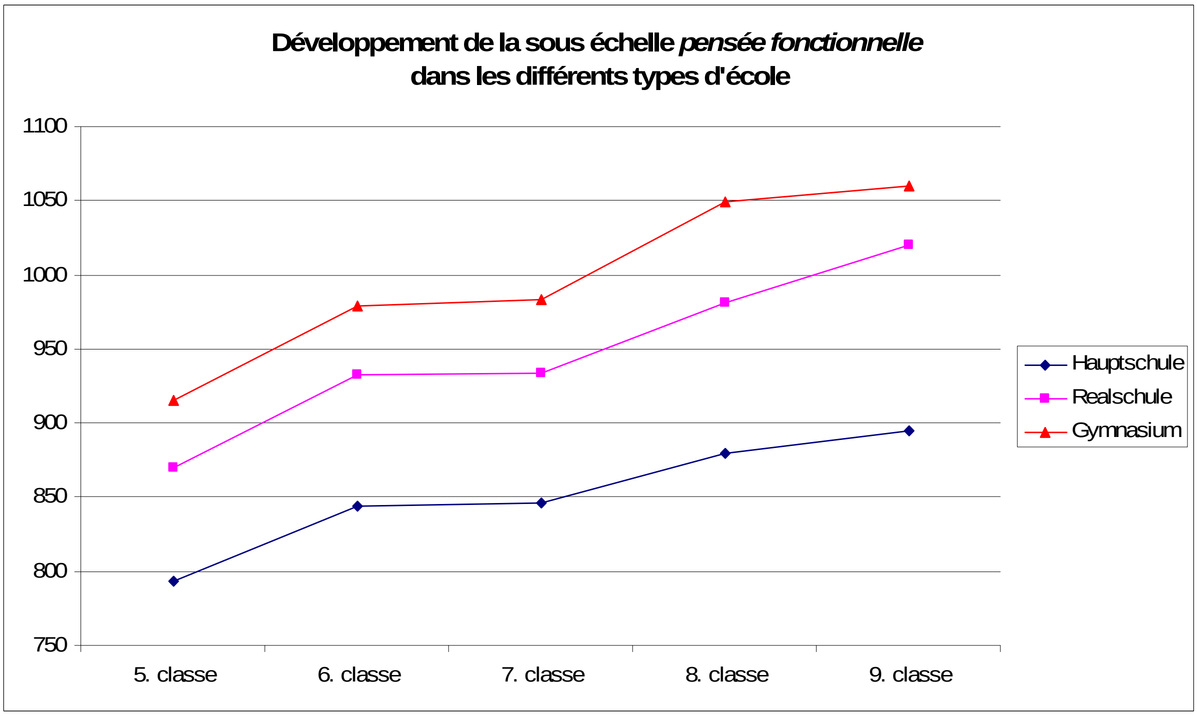


Abbildung 59: Développement de la sous échelle *pensée fonctionnelle*

Le graphique montre le développement de la performance moyenne des élèves ayant participé chaque année à l'évaluation de PALMA. Les donnés sont normées de telle manière que la moyenne de la neuvième classe soit de 1009 points et l'écart type correspondant de 99 points. Les écarts types pour toutes les classes et tous les types d'écoles sont indiqués dans le second graphique.

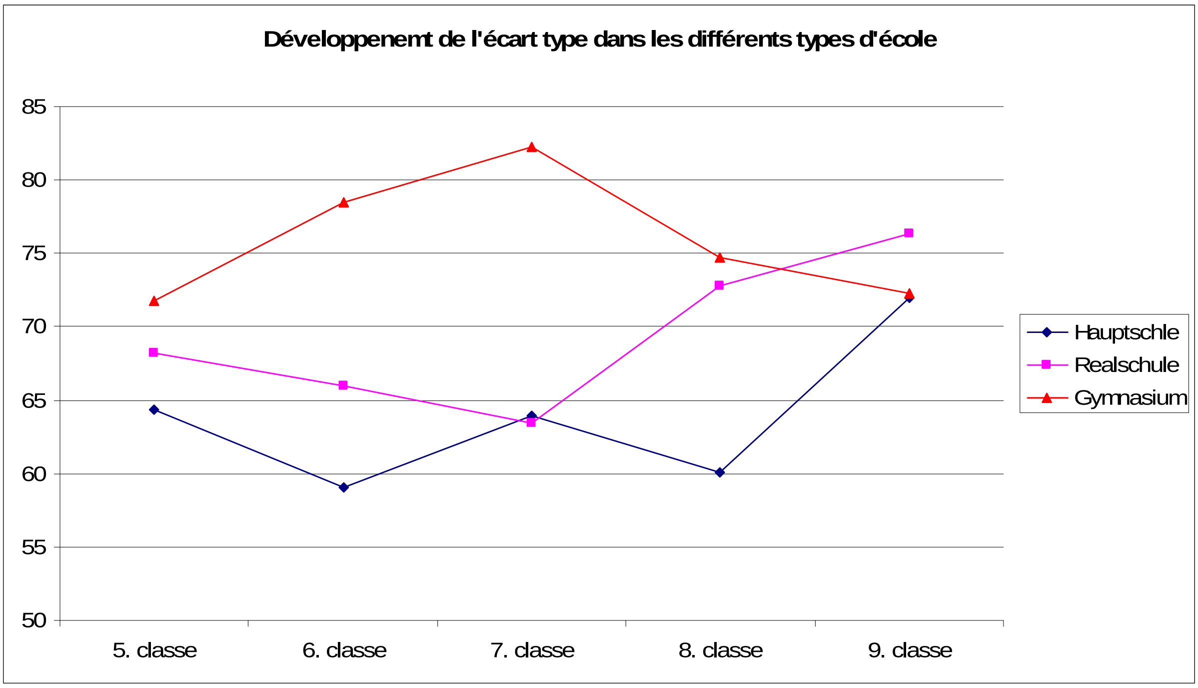


Abbildung 60: Développement de l'écart type de la sous échelle *pensée fonctionnelle*

Les graphiques montrent qu'il n'y pas de développement continu de la pensée fonctionnelle. Les performances moyennes augmentent de manière différente entre les années consécutives. En cinquième (CM2) les élèves de la Hauptschule ont déjà un grand retard sur les performances des élèves de la Realschule et du Gymnasium. Cet écart s'agrandit encore plus au cours des années suivantes. L'écart entre les performances des élèves de la Realschule et ceux du Gymnasium, par contre, reste relativement stable.

La taille des accroissements et les variations de l'écart type peuvent être ramenées dans beaucoup de cas à des raisons venant des programmes et des manuels scolaires. La continuité du développement de la pensée fonctionnelle est donc influencée en grande partie par les contenus étudiés en classe et par le temps passé avec ceux-ci. Une autre répartition pourrait par conséquent probablement mener à une croissance plus continue de la pensée fonctionnelle.

Analyses qualitatives

Il est difficile de repérer les modes de pensée et les raisons exactes de certaines difficultés dans des études réalisées à grande échelle avec des questionnaires. Ce genre d'informations peut être recueilli de manière plus précise en utilisant des interviews, où il est possible de réagir de manière flexible aux réponses des élèves et où on peut essayer de relier les difficultés à des déficits concernant les Grundvorstellungen et le concept image.

L'étude PALMA est accompagnée de plusieurs séries d'interviews. Chaque année, depuis 2003, 36 élèves venant de trois écoles différentes sont interviewés individuellement pendant 30 minutes.
En 2005 les interviews ont été réalisées dans des huitièmes classes (4^{e}) de trois Realschule. La grande majorité des problèmes posés vient du test écrit de PALMA, avec quelques légères adaptations. Les huit problèmes posés en 2005 étaient centrés autour de la pensée fonctionnelle.
En 2006 une étude parallèle d'interviews a pu être réalisée à Paris dans le cadre d'une année d'études financée par le DAAD (Deutscher Akademischer Austauschdienst). Douze élèves de 3^{e} venant de deux collèges différents de la région parisienne ont été interviewés individuellement pendant 30 minutes. Les problèmes posés étaient les mêmes que ceux des interviews allemands de 2005.

Ces interviews réalisées dans les deux pays permettent d'illustrer certains déficits et points forts concernant la pensée fonctionnelle identifiés dans les chapitres précédents. Le nombre limité d'interview et leur caractère non représentatif ne permettent pas de comparaisons quantitatives entre les deux pays. Il est cependant possible de formuler des hypothèses sur les raisons de certaines difficultés et de les relier aux résultats des analyses des programmes et des manuels scolaires.

Vision iconique

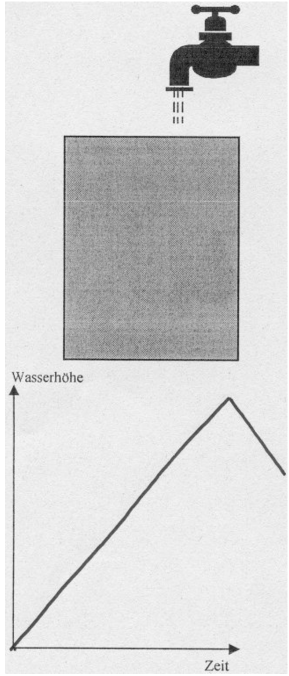
La vision iconique de la représentation graphique des dépendances fonctionnelles a été identifiée dans le chapitre 4 comme raison possible de difficultés lors du travail avec le registre graphique. Les analyses du curriculum potentiel des deux pays n'ont pas pu révéler de problèmes spéciaux visant à éviter ces problèmes. Les premiers extraits d'interviews montrent que les problèmes liés à la vision iconique apparaissent effectivement dans les interviews en France et en Allemagne.

L'élève allemande avec laquelle la première interview a été réalisée arrive à résoudre rapidement les cinq premiers problèmes posés, et montre qu'elle est capable de travailler de manière réfléchie en mathématiques.
Le problème *récipients*, dans lequel les élèves doivent tracer une courbe qui représente la hauteur de l'eau dans un récipient en dépendance du temps, lui cause cependant des difficultés.

Tout d'abord elle inscrit sans problèmes une droite croissante et peut bien expliquer son choix :

Intervieweur : Tu peux m'expliquer pourquoi c'est une droite ?

Elève : Parce que le récipient, il reste, c'est une sorte de carré et il reste de la même taille avec toujours le même diamètre et pour celui-là, là il y a une autre forme et ça monte de manière différente. Ca dépend de la forme.



L'intervieweur élargit ensuite la situation de telle manière que le problème ne ressemble plus aux types de problèmes trouvés habituellement dans les livres de classe.

I Tu peux me dire comment la courbe continue quand le récipient est plein ?

E Oui, ça déborde. C'est fini

I Oui, comment ça pourrait …

E Oui, ça coule de nouveau vers le bas.

I Tu peux l'inscrire ?

E Comme ça, vers le bas

I Et pourquoi ça coule vers le bas ?

E Parce que ça déborde sur le coté et coule comme ça

La question inhabituelle fait adopter une vision iconique à l'élève. La courbe qui a été inscrite de manière complètement correcte auparavant est complétée par l'eau qui descend au bord du récipient.
Le problème contient deux autres récipients qui ont des formes plus compliquées. L'élève inscrit à chaque fois une courbe qui descend vers le bas à la fin quand on lui demande ce qui se passe quand le vase est plein.

Cette interview montre que la vision iconique ne peut pas seulement être retrouvée lors de la lecture ou du travail avec la représentation graphique, mais qu'elle est aussi utilisée par certains élèves lors de l'inscription active d'une courbe.
L'élève trouve la bonne solution à presque tous les problèmes posés et laisse entrevoir qu'elle a toujours bien compris les situations sur lesquelles elle travaille. La vision iconique n'est donc pas un problème apparaissant uniquement chez des élèves qui ont des problèmes pour travailler avec les situations fonctionnelles.

La vision iconique peut aussi être retrouvée dans un extrait d'interview avec une élève française. Il s'agit donc effectivement d'une difficulté existant dans les deux pays.

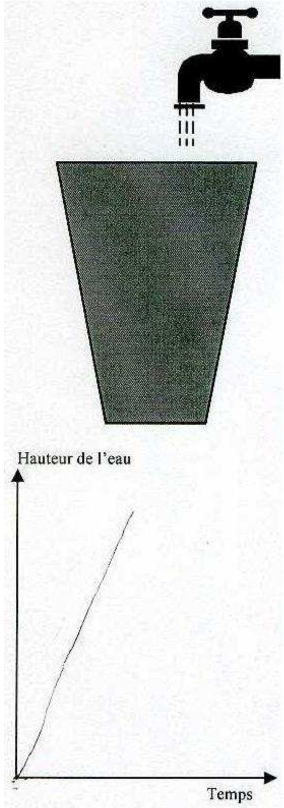
Fixation linéaire

Selon les analyses des curricula souhaités et potentiels l'approche française a comme spécificité de consacrer beaucoup de temps à étudier uniquement les dépendances linéaires. L'hypothèse d'une restriction possible du concept image des élèves a été avancée. Deux extraits d'interviews montrent comment cette restriction affecte le travail avec les dépendances fonctionnelles.

Une élève de 3^{e} interviewée en France, trouve les bonnes solutions aux quatre premiers problèmes posés, bien qu'elle se sente déjà irritée par l'aspect inhabituel d'une courbe représentant une fonction de proportionnalité inverse.

Lorsqu'elle arrive aux problèmes des récipients, elle comprend rapidement, que la courbe du récipient qui a des parois perpendiculaires au sol, est une fonction linéaire.

Les deux autres récipients la perturbent car elle cherche à y reconnaître des situations linéaires tout en se rendant compte qu'il y a une erreur quelque part.



I Donc c'est une, c'est une droite un peu plus raide que dans le premier.

E Un peu plus raide parce que, comment dire, c'est toujours proportionnel

I Mhm

E Mais, euh, c'est pas rectangle, donc ça se, il y aura pas. Ah, non. Comment dire, comme, comment dire … je sais pas en fait

I Qu'est-ce qui te gêne ?

E Ce qui me gêne, en fait c'est, c'est que, euh, comme il a plutôt tendance à être, pas conique mais plus fin en bas

I Mhm

E C'est, comment dire, …, non je sais pas

I Donc tu cherches comment faire influer que c'est plus étroit en bas qu'en haut, non ? Enfin comment le montrer dans le, dans la courbe

E Voilà. Euh

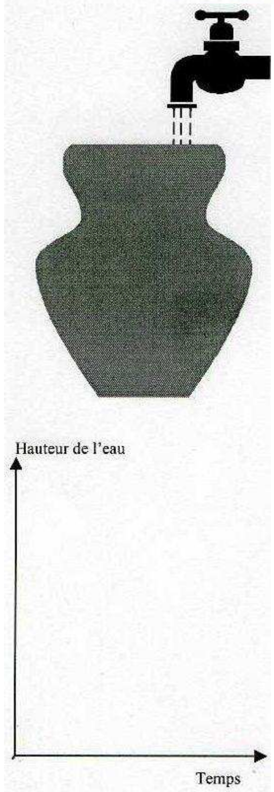
I Donc tu penses que ça devrait se voir dans la courbe ? Que c'est plus fin en bas qu'en haut.

E Non, non.

I Non ?

E Euh, en fait je sais plus, non je sais pas

L'élève essaye de reconnaître une situation proportionnelle tout en voyant que le récipient devient plus large vers le haut. Elle donne l'impression de vouloir faire influer cela sur l'aspect de la courbe sans, pour autant, savoir comment le faire.



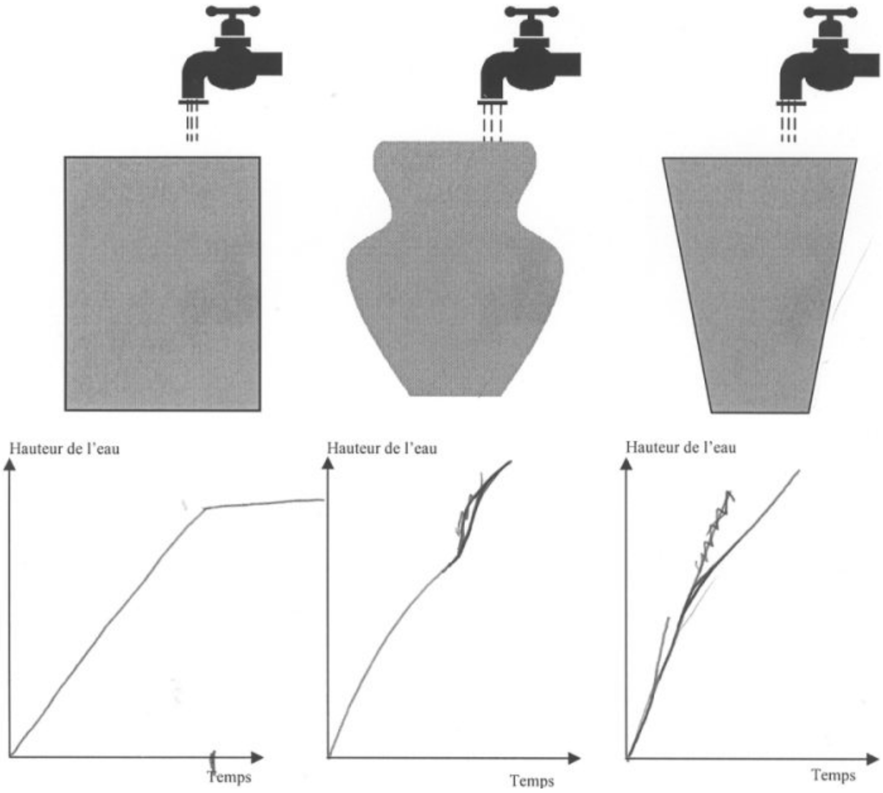
Le troisième récipient la perturbe encore plus. Elle reconnaît bien que la forme devrait avoir de l'influence sur l'aspect de la courbe, mais elle n'a pas les moyens pour l'exprimer. Malgré sa bonne compréhension de la situation, elle est incapable d'utiliser d'autres dépendances fonctionnelles, car le curriculum français ne prévoit pas l'utilisation d'autres types de fonctions avant la 2^{de}.

Un extrait très court d'une autre interview montre aussi que les aspects inhabituels perturbent fortement les élèves français. (Cet extrait n'a peut être consulté dans la partie allemande du présent travail).

Grundvorstellung de covariation

L'extrait d'interview suivant montre comment une bonne utilisation de Grundvorstellungen peut aider à surmonter des déficits présents dans d'autres domaines. Dans le cas présenté, une élève française arrive à surmonter les déficits qu'elle a concernant les relations non linéaires en utilisant la Grundvorstellung de covariation.

L'élève française montre déjà lors de l'utilisation des premiers problèmes de l'interview qu'elle se sert souvent d'une Grundvorstellung de covariation bien développée.



Quand elle arrive au problème des récipients elle inscrit une droite pour le premier récipient et constate :

E Ben, elle augmente normalement.

Elle répond rapidement et de manière correcte à la question concernant la suite de la courbe après le remplissage total du récipient :

E Ben, elle reste pareille.

Quand elle veut tracer la courbe du troisième récipient elle constate immédiatement que la courbe doit être plus raide car le récipient est moins large en bas. Ensuite elle trace une droite assez raide. La largeur changeante du récipient la perturbe cependant. En réfléchissant, elle constate que la rapidité à laquelle l'eau monte doit diminuer. D'abord elle trace deux droites reliées par un angle. Après une question de l'intervieweur qui veut savoir comment comprendre cet angle, elle répond :

E Non ça tourne […] tout le temps.

I D'accord. Très bien.

E Parce que le vase il est tout le temps comme ça. Donc ça tourne tout le temps.

Puis, elle trace correctement la courbe du récipient du milieu en utilisant les idées qu'elle vient de développer.

Cette élève a donc pu tracer des courbes correctes en utilisant sa Grundvorstellung de covariation. Pourtant elle a montré dans d'autres problèmes qu'elle n'a pas l'habitude de travailler sur des situations non linéaires et que ces relations n'occupent pas une grande place dans son concept image. Elle a donc pu combler ce déficit de concept image par une bonne Grundvorstellung de covariation. D'autres élèves, comme celle citée plus haut, n'ont pas pu franchir ce pas.

Causalité

Le dernier extrait d'interview illustre le problème suivant: certains élèves s'attendent à avoir la possibilité de faire des prévisions lors de l'utilisation de dépendances fonctionnelles. Cette difficulté peut avoir son origine dans l'utilisation des mots *dépendance* et *Abhängigkeit*. Certains élèves refusent par exemple de voir une dépendance fonctionnelle dans le cours d'une action tracé en fonction du temps, car le cours d'une action n'est pas prévisible.

Cet extrait d'interview réalisée avec un élève de 3e, illustre ce problème. Il a des difficultés avec la plupart des problèmes posés dans l'interview et refuse d'associer la relation *Age d'un homme* → *Taille de celui-ci* à la courbe représentant une fonction linéaire.

E [...] La taille d'un homme varie en fonction des individus. Alors on peut pas savoir. Par exemple, il y a un homme, il peut être grand à, à 15 ans, alors qu'un autre à 15 ans il est plus petit.

I [...]Pourquoi ça peut, pourquoi ça peut pas aller avec un homme ?

E Parce que la taille, elle varie. C'est pas la même par, des, par rapport à deux hommes.

L'élève refuse ce choix parce que la courbe ne peut pas être valable pour toutes les personnes. Cela indique déjà la causalité que l'élève attend implicitement.
Comme l'intervieweur remarque qu'il pourrait aussi s'agir du graphique pour une personne précise, l'élève tente d'expliquer plus clairement ses idées :

I Oui mais ça c'est la courbe d'un homme. [...]Par exemple le mien [...] Ca peut être possible ou pas ?

S [...] Ben non. Comme, on sait, on sait pas comment il va grandir l'homme. [...] On sait pas s'il va être grand. Dès la naissance on sait pas s'il va être grand ou petit.

I D'accord, donc ce qui te gêne c'est

S que c'est, c'est, que enfin, par exemple à cet age là, ici

I Ouais

S Ici on peut pas dire que ici on sera à cette hauteur là, qu'on fera cette taille là

I D'accord. Donc parce que c'est pas prévisible.

S Voilà

La taille d'une personne à un certain âge ne peut pas être prédite par une formule. L'élève n'accepte pas cette relation arbitraire, qui n'est pas prévisible. Le développement historique retracé dans le second chapitre a montré qu'il s'agit d'un obstacle épistémologique connu. Il est aussi important de remarquer que les mots *dépendance* et *Abhängigkeit* peuvent impliquer dans les deux langues une certaine causalité, qui peut être une des origines de cette difficulté.

Propositions de changements et perspectives

Plusieurs propositions de changements des curricula de France et d'Allemagne sont faites dans ce chapitre. Les perspectives ouvertes par ce travail et de nouvelles questions de recherche, closent ce travail.

Propositions de changements

Ce travail a permis de développer une série de points qui peuvent mener à des difficultés sur le chemin du développement de la pensée fonctionnelle. Il est possible d'en déduire des propositions de changements des curricula respectifs pour que les difficultés n'apparaissent plus ou seulement de manière atténuée.

Les propositions sont présentées de manière raccourcie dans la liste suivante

Propositions concernant les deux pays :

- Utilisation d'un plus grand nombre de problèmes qui préparent à des difficultés connues, comme la vision iconique de la représentation graphique.
- Introduction de la notion de fonction en tant que notion réunissant les relations fonctionnelles étudiées jusque là. Une introduction au début du travail avec les fonctions peut engendrer des problèmes.

Propositions concernant l'Allemagne – la Bavière

Hauptschule:

- Etude de plus de types de fonctions, même si ceux-ci ne sont pas vus en détail
- Utilisation de la représentation algébrique avant la dixième (2de)
- Introduction de la notion de fonction en neuvième (3^{e})

Realschule:

- Arrêt de l'utilisation de l'approche par la théorie des ensembles
- Utilisation plus intensive de situations réelles
- Utilisation renforcée de la Grundvorstellung de covariation et analyse de variations
- Dans les branches non-mathématiques: travail sur plus de types de fonctions

Gymnasium:

- Introduction de la notion de fonction de manière moins compacte pour permettre un développement plus harmonieux du concept image et du concept definition

France

- Avancement de l'étude des fonctions non linéaires

- Utilisation plus intensive de situations réelles dans les classes élevées
- Étude qualitative de la nature de la variation des dépendances fonctionnelles et pas seulement de la direction de la variation

Certaines de ces propositions ont déjà été prises en compte dans les nouveaux programmes, mais la plupart n'ont pas encore été mises en pratique. Du point de vue de ce travail, il y a donc encore plusieurs mesures à prendre pour soutenir de manière optimale les élèves dans leur développement de la pensée fonctionnelle-

Perspectives

Ce travail précise le cadre théorique de la pensée fonctionnelle et il compare la possibilité de son développement pour les élèves du CM2 à la 2^de^ en France et en Allemagne. Certaines questions restent pourtant ouvertes, n'ayant pas pu être approfondies ou (s'étant) posées au cours de cette thèse. Ces questions sont résumées dans cette section. De plus, il est démontré comment la base de données concernant d'éventuels changements des curricula souhaité et potentiel peut être améliorée en faisant d'autres études quantitatives et qualitatives, ainsi que des interventions dans des salles de classes.

L'analyse faite dans ce travail des curricula des deux pays, inclut le curriculum souhaité, le curriculum potentiel et, avec certaines restrictions, le curriculum atteint. Les observations des cours concernant les fonctions n'ont pas été retenues. Elles peuvent cependant montrer, comment les spécificités des programmes de chaque pays sont mises en pratique par les professeurs et comment les élèves les acceptent. Il est par exemple possible d'avoir plus d'informations sur le rôle des relations à la Realschule bavaroise ainsi que sur les exemples de situations non linéaires donnés jusqu'en 3^e^ dans les classes françaises. Pour arriver à de bons résultats, il est nécessaire de faire des observations dans un grand nombre de classes.

Il est aussi possible d'analyser plus en détail le rôle de la définition de la notion de fonction lors des observations de classes. La définition de pensée fonctionnelle n'accorde pas de grande importance à l'utilisation active de la définition de la notion de fonction. C'est pour cela que le concept definition ne fait pas partie des objectifs de recherche centraux de ce travail. L'analyse des concepts definitions parait plus importante, après la constatation que les élèves français et allemands ont des concept images restreints. Plusieurs travaux de recherche ont montré que des conflits entre le concept image et le concept definition peuvent être à l'origine de certaines difficultés des élèves. Il est aussi intéressant de décrire en détail le développement du concept definition après là 2^de^, puisque dans certaines écoles la notion de fonction n'est utilisée que vers la fin de la période étudiée. Dans ce cadre on peut aussi répondre à la question de savoir si les difficultés qui existent entre le concept image et le concept definition, causées par une définition de la notion de fonction avant un travail approfondi sur plusieurs types d'entre elles, peuvent être identifiées et précisées.

La question concernant les conséquences en France de la définition de la notion de fonction en tant qu'association, et l'utilisation par la suite quasiment exclusive de l'aspect de variation reste également ouverte. Est-t-il possible d'identifier des restrictions des concepts images et des concepts definitions ? Cela dépend aussi de l'utilisation de la Grundvorstellung de

covariation et de celle d'association après la 2de.
Le développement de l'étude des variations après la 2de est également un point très intéressant. Si l'analyse qualitative des variations continue à ne pas être faite et si les accroissements des différents types de fonctions ne sont pas comparés par les élèves, on peut s'attendre à des conséquences sur les concepts images et sur les possibilités d'applications de la Grundvorstellung de covariation.

Des analyses détaillées de la Grundvorstellung de covariation dans la Realschule peuvent également donner des résultats intéressants. Il peut être par exemple intéressant d'essayer de constater, avec l'aide d'interviews, dans quelle mesure des déficits dans le domaine de la Grundvorstellung de covariation ont des conséquences sur le travail avec certains problèmes et si les élèves sont capables de développer seuls cette Grundvorstellung.

Un des résultats de l'analyse du curriculum potentiel est que les deux pays s'orientent sur la représentation algébrique pour développer l'enseignement des fonctions. La question peut donc être posée de savoir si cette orientation sur la représentation algébrique n'a pas de conséquences sur les concepts images des élèves. Cette question est intéressante parce que, dans leur vie quotidienne, les élèves sont confrontés avec des situations fonctionnelles qui n'ont pas de représentations algébriques simples. Une restriction de la pensée fonctionnelle peut donc entraîner des difficultés concernant le traitement de ces situations.

Les analyses des curricula potentiel et souhaité montrent que très peu de types de fonctions sont utilisés en France jusqu'en 3^{e} et dans la Hauptschule bavaroise. Cela restreint probablement la capacité de développer la pensée fonctionnelle. Il faudrait éventuellement essayer d'introduire de manière expérimentale plus de types de fonctions dans quelques classes de la Hauptschule bavaroise afin de vérifier si une telle anticipation est possible.